خیلی سبز!

ماجرای بیست ریاضی ۱

بر اساس سبک جدید امتحانات نهایی

۶۰٪ نمره پذیرش دانشگاه

ویژه ارتقاء معدل

پایه دهم

مصطفی دیداری

درسنامه | سؤال‌های امتحانی با پاسخ تشریحی | امتحان نهایی

- درس‌نامه‌های کاملاً کاربردی، روان و گویا منطبق بر کتاب درسی با ۲۴۰ مثال آموزشی
- دارای بیش از ۱۰۰۰ سؤال امتحانی طبقه‌بندی شده از ساده به دشوار تألیفی و برگرفته از امتحان‌های مدارس برتر کشور
- پوشش کامل همه مثال‌ها و تمرین‌ها و کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی
- حاوی سؤالات امتحانی دشوار جهت شبیه‌سازی و پیش‌بینی سؤال‌های دشوار امتحان نهایی
- تیپ‌بندی سؤال‌های نهایی در قالب "در امتحان چه خبر"
- آزمون‌های فصل به فصل، نوبت اول و نوبت دوم و نهایی
- به همراه ضمیمه رایگان مرور و جمع‌بندی مخصوص شب‌های امتحان

Jet Questions

سؤال‌های پیشرو برای بیست گرفتن

@kotob_konkore

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

برای دریافت کتابهای بیشتر
در کانال کتابیکو عضو شوید:
@kotob_konkoria

خیلی سبز!

خیلی سبز! آزمون

تجربی | ریاضی | انسانی

کتاب + آزمون آزمایشی
یه ترکیب برنده

فکر کردیم حالا که درس خوندن و کتاباتون خیلی سبزه! چرا آزموناتون خیلی سبز نباشه

برای ثبت نام و اطلاعات بیشتر عدد ۱ را به شماره ۲۰۰۰۶۳۵۶۲۰۰۰۰۰ پیامک کنید
و یا این قسمت را اسکن کنید.

شب امتحان

شب امتحان راحت بخوابید

| امتحان | درسنامه |

- زیست دهم
- شیمی دهم
- ریاضی دهم
- جغرافیا دهم
- هندسه دهم
- فیزیک ریاضی دهم
- فیزیک تجربی دهم

به نام خدا

@kotob_konkoria

ماجرای بیست

ریاضی ۱ - پایه دهم

مصطفی دیداری

برای دریافت کتابهای بیشتر
در کانال تلگرام بعد بشید:
@kotob_konkoria

@kotob_konkoria
اینجا هزاران ها و ده هزارها تهیه فایل کتابهای درسی صدها از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال تلگرام عضو شوید

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

برای دریافت کتابهای بیشتر
در کانال کتابیکو عضو شوید:
@kotob_konkoria

عنوان و نام پدیدآور: ماجرای بیست ریاضی ۱ - پایه دهم
دیداری، مصطفی
مشخصات نشر: تهران، خیلی‌سبز، ۱۳۹۵
مشخصات ظاهری: ۲۳۱ ص. : مصور ، جدول ۲۹ × ۲۲ س م
شابک: ۳ - ۸۷۷-۲۳۰-۶۲۲- ۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
موضوع: ریاضیات -- آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه)
موضوع: ریاضیات -- راهنمای آموزشی (متوسطه)
شماره کتابشناسی ملی: ۴۳۵۹۰۹۲
۵۰۰۷۳۲۱

نام کتاب: ماجرای بیست ریاضی ۱- پایه دهم
ناشر: خیلی‌سبز وابسته به توسعه خیلی‌سبز
مؤلف: مصطفی دیداری
نظارت علمی: دکتر کوروش اسلامی
کارشناس محتوایی: زهرا جالینوسی
ویراستاران علمی: فرامرز سلطان‌کریمی - هلیا فضل‌آذر - سجاد داوطلب - صادق محمدی - علی مددپور - پیام ابراهیم‌نژاد - سارا عباسی - مرضیه قیاسوند
ویراستاران فنی: نوید رمضانلو - مریم گلی‌حسنلو
طراح جلد: سپیده زمانی
گرافیست جلد: زهرا گنجی - ندا رنجبر
طراح گرافیک متن: بهاره امین‌ترابی - ساناز یوسفی
گرافیست همکار: انسیه ترکمان
رسم شکل: علی چهارنایی
حروفچینی: منیره‌سادات فرهانیان - ناصر قربانی‌رفعت
صفحه‌آرایی: فرناز قراگوزلو - آسیه بهداروند
لیتوگرافی: ایرانیان
چاپخانه: ایرانیان
نوبت چاپ: هشتاد و نهم - ۱۴۰۳
تیراژ: ۲۵۰۰ جلد
قیمت: ۲۶۰۰۰۰ تومان
تلفن مرکز پخش: ۶۳۵۶۳ (۰۲۱)
صندوق پستی: ۸۱۷۷ - ۱۴۱۵۵
SMS: ۳۰۰۰۶۳۵۶۳

محتوای افزوده
مرتبط با این کتاب را
با اسکن این QRCode ببینید

کلیه‌ی حقوق این اثر برای ناشر محفوظ است و هیچ شخص حقیقی یا حقوقی حق چاپ و برداشت تمام یا قسمتی از اثر را به صورت چاپ، فتوکپی، جزوه و حتی دست‌نویس ندارد و متخلفین به موجب بند ۵ از ماده‌ی ۲ قانون حمایت از ناشرین تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

نظرات و نکات ویرایشی‌تان در مورد این کتاب را می‌توانید از طریق آیدی تلگرامی Edit_kheilisabz@ برای ما بفرستید.

سلام برسون!

www.kheilisabz.com
kheilisabzpub
kheilisabz

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

برای دریافت کتابهای بیشتر
در کانال کتابیکو عضو شوید:
@kotob_konkoria

همهٔ پدران و مادرانی که امنیت امروز سرزمینمان را مدیون فرزندان آن‌هاییم.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

برای دریافت کتابهای بیشتر
در کانال کتابیکو عضو شوید:
@kotob_konkoria

مقدمهٔ ناشر

گپی راجع به مجموعهٔ «ماجرای بیست»

تا حالا به این فکر کردین که یه دانش‌آموز توی ۲۴ ساعت شبانه‌روز چی‌کار می‌کنه؟

- هفت هشت ساعت می‌خوابه و استراحت می‌کنه.
- حداقل هفت ساعت تو مدرسه‌ست که شیش ساعتش رو سر کلاسه و (احتمالن) داره درس گوش می‌ده.
- حدود یک ساعت تو راه خونه به مدرسه و مدرسه به خونه‌ست.
- سه چهار ساعتی هم توی خونه با کتابا و درساش مشغوله و کُشتی می‌گیره.
- چهار پنج ساعت از وقتش هم می‌ره برای غذاخوردن، حضور در آغوش گرم خانواده و کارای شخصی مهم و بازی‌گوشی (که شامل گوشی‌بازی هم می‌شه!)

خُب! با این حساب و کتابا معلوم می‌شه یه دانش‌آموز، ۷۵/۶۲۵ درصد از زمان بیداریش رو با درس و مشق و کتاب و مدرسه و معلم می‌گذرونه با کلی اتفاقات تلخ و شیرین؛ پس بی‌راه نیست که بگیم:

«ماجرای بیست» ماجرای اصلی زندگی یه دانش‌آموزه.

ما توی خیلی‌سبز این مجموعه رو آماده کردیم، چون واقعن دلمون می‌خواد داستان مدرسه‌رفتن و درس‌خوندن شما و این عمری که به پاش گذاشتین، پایان خیلی خوش و شکوهمندی داشته باشه!

اگه ماجراهای جالب خودتون با درساتون رو به صورت مطلب، عکس، سلفی، خاطره، فیلم و فیلم‌نامه و ... برامون بفرستین، خیلی رو سرمون منت گذاشتین. ما حتمن ماجراهاتون رو یه جایی (مثلن تو سایت خیلی‌سبز یا شاید هم چاپ بعدی کتاب) منتشر می‌کنیم.

ماجرای من و ریاضی ۱

چند وقتیه که ذهنم با چندتا سؤال بی‌ربط ولی بنیادی درگیر شده؛ گفتم با شما هم درمیون بذارم شاید شما جواب قانع‌کننده‌ای داشته باشین!

۱- چرا عرب‌زبان‌ها به ورزش می‌گن الریاضیه ولی ما به ریاضی می‌گیم ریاضی؟

۲- مهندس علی دایی (که مدرکشون رو از دانشگاه صنعتی شریف گرفتن)، چون ریاضی بلدن پولدار شدن یا چون ورزشکار هستن؟

۳- چرا بعضی از تیم‌های ورزشی وقتی فوتبال بازی می‌کنن، آدم احساس می‌کنه اینا انقد خوبن که دارن مسئلهٔ المپیاد ریاضی حل می‌کنن! ولی بعضیا وقتی دارن جمع و تفریق می‌کنن، انگار دارن به خودشون لایی می‌زنن؟

۴- معروف، معروف‌تر است یا مریم میرزاخانی؟

۵- کدوم بیشتر حال می‌ده؟ در زنگ ورزش ریاضی بخونیم یا در زنگ ریاضی ورزش کنیم؟

اگر در مورد این سؤالا نظری دارین برام بفرستید؛ شاید از مشغولیت‌های ذهنی بنده کم کنید. البته به یه نتایجی رسیدم! ورزشکارایی که ریاضی خوندن و ریاضی‌دانایی که ورزشکارن، خیلی کارشون درسته!

ریاضی بخونید! ورزش کنید! ماجراجو باشید!

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

برای دریافت کتابهای بیشتر
در کانال کتابیکو عضو شوید:
@kotob_konkoria

مقدمهٔ مؤلف

به نام او که از همه بیشتر تو را دوست دارد

بچه‌ها سلام! ورودتون رو به دبیرستان تبریک می‌گم. می‌بینم که همه‌تون آماده‌اید. به نظرم ریاضی امسال مهم‌ترین ریاضی دوران تحصیلتونه. می‌دونم الان می‌گید همهٔ دبیرا اولش همینو می‌گن ولی اگه ادامهٔ مقدمه رو بخونین، شما هم با من موافق می‌شید. ریاضی امسالتون هفت‌تا فصل داره. اول برای بچه‌های ریاضی بگم:

فصل اول ادامهٔ مباحث مجموعه است. در فصل‌های بعدی هم کمی به اون نیاز دارید. با دنباله‌ها هم آشنا می‌شید. به خصوص دنبالهٔ خطی، حسابی و هندسی که اهمیت زیادی دارن.

فصل دوم بای بسم ا... مثلثات هستش. ادامهٔ اون رو هم سال بعد می‌خونید، پس پایه برای سال بعده و رد پاش تو خیلی از جاهای دیگه دیده می‌شه.

فصل سوم اوایلش تا حدودی براتون آشناست. همون ریشه‌گیری و قواعد اونه. البته آخرای فصل، چیزهای مهم و جدیدی براتون داره.

فصل چهارم به نظرم از مهم‌ترین فصل‌های کتابتونه. تو خیلی از مسئله‌ها مجبورید معادله حل کنید به خصوص توی حسابان!

حسابان ۲ و کنکور هم که دیگه جای خود داره.

فصل پنجم راجع به تابع صحبت می‌کنه. الفبای تابع رو یاد می‌گیرید، ادامهٔ اون رو هم باز دوباره تو حسابان می‌خونید.

تو **فصل ششم** باید بشمرین، البته بدون انگشت! از این فصل به سادگی عبور نکنید. اگر مطالب اون رو خوب بفهمید، کارتون تو فصل احتمال خیلی ساده می‌شه. این درس هم پایه برای درس آمار و احتمال سال بعدتونه.

اما **فصل هفتم** احتمال، یه کمی هم آخرش آمار داره که آسونه، البته به شرطی که فصل ۶ رو خوب فهمیده باشین. برای بچه‌های تجربی هم تقریباً همینه. ادامهٔ مباحث مثلثات، تابع و احتمال رو توی سال‌های بعد می‌خونید و بقیهٔ مطالب رو هم به عنوان پایه نیاز دارید. دیدید حالا! ریاضی سال‌های بعدتون وابستگی زیادی به این کتاب داره. چندتا توصیه هم می‌کنم برای این‌که از این کتاب بهتر استفاده کنین:

۱) درس‌نامه‌ها پله‌پله طبقه‌بندی شدن. حتماً پله‌پله‌ها رو یکی‌یکی بالا برین و دوتا یکی نپرین.

۲) بعد از درس‌نامه، مثال و جواب داریم. حتماً اون‌ها رو بخونین و دوباره خودتون حل کنید.

۳) حالا کار اصلی شما شروع می‌شه. قلم به دست بگیرین! تا شروع به حل مسئله نکنین، متوجه اشتباهتون نمی‌شین. کسی با نگاه به مسابقات المپیک، قهرمان نمی‌شه، بنابراین برید وسط گود! بچه‌ها خودتون رو عادت به مسئله حل‌کردن بدین. توانایی حل مسئله و سرعت عمل شما (که تو کنکور بسیار مهمه) امسال باید درست بشه. سال‌های بعد وقت نمی‌کنین.

۴) **سؤال‌هایی که علامت دارن، سخت‌ترین سؤال‌های هر درس هستن. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگر، برو سراغ اون‌ها ... .**

۵) اگر به هر دلیلی نتونستین مسئله‌ای رو حل کنین، نگران نباشین، چون پاسخ‌های تشریحی برای همین نوشته شده.

دیدن پاسخ تشریحی و یادگرفتن راه حل‌ها هیچ اشکالی نداره البته به دو شرط:

اول این‌که درس‌نامه‌ها رو کامل خونده باشین. دوم این‌که تلاش خودتون رو برای حل اون سؤال، انجام داده باشین.

۶) امیدوارم همه‌تون با مطالعهٔ این کتاب عاشق ریاضی بشید.

۷) سلام برسونین.

در پایان از همهٔ کسانی که مرا در نوشتن این کتاب یاری کردند، صمیمانه تشکر می‌کنم و همچنین از دانش‌آموزان عزیز، محمد یزدان‌پناه، وستا محمدزاده، حمیده محمدزاده، گلسا ترابی و صبا فلاح و سوگند یوسف مارزی و صوفیا قربانی که در رفع اشکالات کتاب ما را یاری کردند سپاسگزارم.

۱۴۰۲/۳/۱

دوستدارتون دیداری

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

برای دریافت کتابهای بیشتر
در کانال کتابیکو عضو شوید:
@kotob_konkoria

فهرست

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله ۷
- درسنامهٔ ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۷
- درسنامهٔ ۲: متمم یک مجموعه ـ شمارش تعداد عضوهای مجموعه ۱۱
- درسنامهٔ ۳: الگو و دنباله ۱۶
- درسنامهٔ ۴: دنبالهٔ حسابی ۲۲
- درسنامهٔ ۵: دنبالهٔ هندسی ۲۵
- آزمون جمع‌بندی فصل اول ۳۰
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۳۱
- پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل اول ۳۸

فصل دوم: مثلثات ۴۰
- درسنامهٔ ۱: نسبت‌های مثلثاتی ۴۰
- درسنامهٔ ۲: دایرهٔ مثلثاتی ۴۶
- درسنامهٔ ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۵۲
- آزمون جمع‌بندی فصل دوم ۵۵
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۵۶
- پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل دوم ۶۴

فصل سوم: توان‌های گویا و عبارت‌های جبری ۶۵
- درسنامهٔ ۱: ریشه و توان ۶۵
- درسنامهٔ ۲: ریشهٔ nام ۶۸
- درسنامهٔ ۳: توان‌های گویا ۷۱
- درسنامهٔ ۴: عبارت‌های جبری ۷۴
- درسنامهٔ ۵: عبارت‌های گویا ۷۸
- آزمون جمع‌بندی فصل سوم ۸۲
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۸۳
- پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل سوم ۹۰

فصل چهارم: معادلات و نامعادلات ۹۲
- درسنامهٔ ۱: معادلهٔ درجه‌دوم و روش‌های مختلف حل آن ۹۲
- درسنامهٔ ۲: سهمی ۹۸
- درسنامهٔ ۳: تعیین علامت ۱۰۴
- درسنامهٔ ۴: حل نامعادله ۱۰۷
- آزمون جمع‌بندی فصل چهارم ۱۱۴
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۱۱۵
- پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل چهارم ۱۳۰

فصل پنجم: تابع ۱۳۱
- درسنامهٔ ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۱۳۱
- درسنامهٔ ۲: دامنه و برد توابع ۱۳۴
- درسنامهٔ ۳: انواع توابع ۱۴۰
- درسنامهٔ ۴: انتقال توابع ۱۴۵
- آزمون جمع‌بندی فصل پنجم ۱۴۹
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۱۵۰
- پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل پنجم ۱۵۹

فصل ششم: شمارش، بدون شمردن ۱۶۰
- درسنامهٔ ۱: شمارش ۱۶۰
- درسنامهٔ ۲: جایگشت ۱۶۵
- درسنامهٔ ۳: ترکیب ۱۷۰
- آزمون جمع‌بندی فصل ششم ۱۷۷
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۱۷۸
- پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل ششم ۱۸۴

فصل هفتم: آمار و احتمال ۱۸۵
- درسنامهٔ ۱: تعریف‌های مقدماتی احتمال ۱۸۵
- درسنامهٔ ۲: احتمال یا اندازه‌گیری شانس ۱۹۰
- درسنامهٔ ۳: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه، متغیر و انواع آن ۱۹۶
- آزمون جمع‌بندی فصل هفتم ۲۰۱
- پاسخ‌نامهٔ تشریحی ۲۰۲
- پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل هفتم ۲۰۷

	شماره صفحهٔ امتحان	شماره صفحهٔ پاسخ
امتحان شمارهٔ (۱): نمونه امتحان نیم‌سال اول	۲۰۸	۲۱۰
امتحان شمارهٔ (۲): نمونه امتحان نیم‌سال اول	۲۱۲	۲۱۴
امتحان شمارهٔ (۳): نمونه امتحان نیم‌سال دوم	۲۱۶	۲۱۸
امتحان شمارهٔ (۴): نمونه امتحان نیم‌سال دوم	۲۲۰	۲۲۲
امتحان شمارهٔ (۵): نمونه امتحان نیم‌سال دوم	۲۲۴	۲۲۶
امتحان شمارهٔ (۶): امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۳	۲۲۸	۲۳۰

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

درس ۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

یادآوری مجموعه‌های مهم و اعمال روی آن‌ها

قبل از این‌که درس اصلی را شروع کنیم، بد نیست چند مطلب را با هم مرور کنیم:

۱ مجموعه، دسته‌ای از اشیای کاملاً معین است.

۲ اگر شیء a، متعلق به مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $a \in A$ و اگر متعلق به A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$.

۳ مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B گوییم، هرگاه همهٔ عضوهای A متعلق به B هم باشند و می‌نویسیم $A \subseteq B$.

در سال نهم با نماد و عضوهای مجموعه‌های مهم و پرتکرار آشنا شدید. یک بار آن‌ها را مرور کنیم:

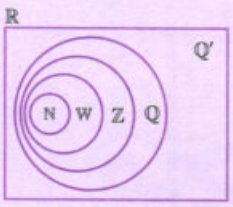
نام مجموعه	نماد	عضوهای مجموعه	نکته‌ها
اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$	$\{۱,۲,۳,۴,...\}$	بزرگ‌ترین عدد طبیعی وجود ندارد.
اعداد حسابی	$\mathbb{W}$	$\{۰,۱,۲,۳,...\}$	تنها عدد حسابی غیرطبیعی، صفر است.
اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$	$\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$	—
اعداد گویا	$\mathbb{Q}$	$\{\frac{a}{b} \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰\}$	۱) اعداد گویا، اعداد کسری هستند که صورت و مخرج صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد. ۲) $\frac{\text{عدد}}{۰}$ تعریف نشده است. ۳) $\frac{۰}{\text{عدد غیر صفر}} = ۰$
اعداد گنگ	$\mathbb{Q}^c$ یا $\mathbb{Q}'$	اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت تقسیم دو عدد صحیح نوشت.	۱) $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و π نمونه‌هایی از اعداد گنگ هستند. ۲) مجموع، تفاضل، ضرب و تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است گنگ نباشد.
اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$	اجتماع اعداد گویا و گنگ $(\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}')$	کل اعداد روی محور تشکیل اعداد حقیقی را می‌دهند.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته

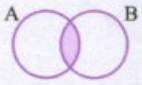
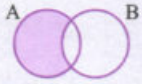
ارتباط مجموعه‌های مهم:



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{Q}' \subseteq \mathbb{R}$

یادآوری خوب است یک یادآوری هم دربارهٔ اعمال روی مجموعه‌ها داشته باشیم:

عمل	نماد	تعریف	نمودار ون	نکته‌ها
اجتماع	$A \cup B$	اشیایی که در A یا در B (یا هر دو) (به زبان دیگر عضو حداقل یکی از مجموعه‌ها) هستند. (به «یا» دقت کن.)		۱) $A \cup A = A$ ۲) $A \cup \varnothing = A$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$
اشتراک	$A \cap B$	اشیایی که در هر دوی A و B (مشترک‌ها) هستند. (به «وَ» دقت کن.)		۱) $A \cap A = A$ ۲) $A \cap \varnothing = \varnothing$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
تفاضل	$A - B$	اشیایی که در A هستند ولی در B نیستند. (فقط عضو A هستند.) (به «فقط» دقت کن.)		۱) $A - B$ با $B - A$ فرق دارد. ($B - A$ شامل عضوهایی است که در B هستند ولی در A نیستند.) ۲) $A - \varnothing = A \ , \ \varnothing - A = \varnothing$ ۳) $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \varnothing$

مثال اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{-۱,۰,۲,۷\}$ باشد، مجموعه‌های $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را به دست آورید.

پاسخ

$A \cup B = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \cup \{-۱,۰,۲,۷\} = \{۱,۲,۳,۴,۵,-۱,۰,۷\}$

$A \cap B = \{۱,۲,۳,۴,۵\} \cap \{-۱,۰,۲,۷\} = \{۲\}$

$A - B = \{۱,\cancel{۲},۳,۴,۵\} - \{-۱,۰,۲,۷\} = \{۱,۳,۴,۵\}$ (عدد ۲ در B هم هست، پس آن را از A حذف کردیم.)

$B - A = \{-۱,۰,\cancel{۲},۷\} - \{۱,۲,۳,۴,۵\} = \{-۱,۰,۷\}$

مثال با توجه به رابطهٔ زیرمجموعه‌بودن مجموعه‌های مهم، حاصل اعمال روی چند مجموعهٔ مهم را با هم بررسی کنیم:

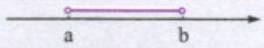
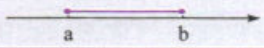
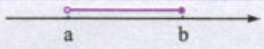
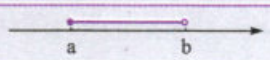
پاسخ

الف) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z} , \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N} , \mathbb{N} - \mathbb{Z} = \varnothing , \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{۰,-۱,-۲,...\}$

ب) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} , \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q} , \mathbb{Q} - \mathbb{R} = \varnothing , \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$

بازه‌ها

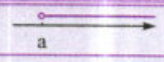
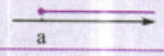
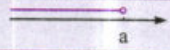
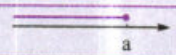
مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی بین ۱ و ۰ (مثلاً ۰/۱ ، ۰/۵ ، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ،...) را در نظر بگیرید. نمایش مجموعه‌ای این اعداد، به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid ۰ < x < ۱\}$ است. این مجموعه را به صورت ساده‌تر $(۰,۱)$ نمایش داده (*با نقطهٔ* $(۰,۱)$ *روی دستگاه اشتباه نگیری!*) و آن را بازهٔ صفر و یک می‌نامیم. چون خود ۱ و صفر عضو مجموعه نیستند، بازه را بازهٔ باز می‌نامیم. اگر عدد ۱ عضو بازه باشد، آن را به صورت $[۰,۱)$ نشان می‌دهیم. در حالت کلی داریم:

نمایش هندسی (روی محور)	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a,b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	$[a,b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	$(a,b]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	$[a,b)$	نیم‌باز

توجه اگر (a,b) بازه باشد، باید $a < b$ باشد. در سؤال‌هایی که اول یا آخر بازه مجهول هستند، حواستان به این موضوع باشد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

ممکن است همهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر از a مدنظر باشند، در این صورت نمایش مجموعه‌ای آن به صورت $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ بوده و بازهٔ نظیر آن را به صورت $(a, +\infty)$ نمایش می‌دهیم. $+\infty$ (مثبت بی‌نهایت) عدد نیست، بلکه نشان می‌دهد بازه از راست بی‌کران است. در حالت کلی داریم:

نمایش هندسی (روی محور)	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$(a, +\infty)$	باز و از راست بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز و از راست بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز و از چپ بی‌کران
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز و از چپ بی‌کران
	$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	باز و از دو طرف بی‌کران

(توجه کن $+\infty$ یا $-\infty$ همیشه باز هستن)

مثال درستی یا نادرستی هر کدام را بررسی کنید:

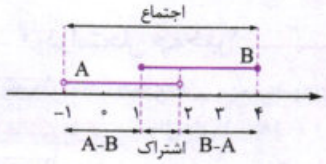
الف) $0 \in (-1,2)$ ب) $1 \in (1,5]$ پ) $7 \in (-1,7]$

پاسخ الف) $0 \in (-1,2)$ درست است، چون صفر بین ۱− و ۲ قرار دارد. هم‌چنین $-0/2 \in (-1,2)$ یا $\sqrt{2} \in (-1,2)$. (دقت کن $(-1,2) \neq [0,1]$.) ب) $1 \in (1,5]$ درست نیست، چون بازه در سمت چپ باز بوده و عدد ۱ عضو بازه نیست، اما $5 \in (1,5]$ درست است.

پ) $7 \in (-1,7]$ درست است، چون سمت راست بازه، بسته است اما $-1 \in (-1,7]$ درست نیست. در نمایش این بازه روی محور، ۱− توخالی است.

مثال بازه‌های $A = (-1,2)$ و $B = [1,4]$ را روی محور رسم کرده، اجتماع، اشتراک و تفاضل آن‌ها را به صورت بازه بنویسید.

پاسخ شبیه این مثال معمولاً در امتحان می‌آید. ببینید:



$A \cup B = (-1,4]$

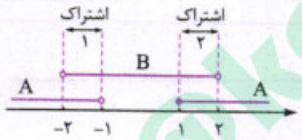
$A \cap B = [1,2)$

(اعدادی که فقط در A هستند) $A - B = (-1,1)$ (توجه دارید که $1 \in A$ و $1 \in B$، پس $1 \notin A - B$ و لذا بازه از راست باز خواهد بود.)

(اعدادی که فقط در B هستند) $B - A = [2,4]$ (توجه دارید که $2 \in B$ ولی $2 \notin A$، پس $2 \in B - A$ بوده و بازه از چپ بسته می‌شود.)

مثال مجموعهٔ $A = (-\infty,-1) \cup [1,+\infty)$ را روی محور رسم کرده و اشتراک آن را با بازهٔ $B = (-2,2)$ به دست آورید.

پاسخ نمایش مجموعه‌های A و B روی محور به صورت مقابل است.



این دو مجموعه در دو قسمت اشتراک دارند، بنابراین اشتراک آن‌ها را نمی‌توان به صورت یک بازه نوشت. داریم:

$$A \cap B = \underbrace{(-2,-1)}_{\text{قسمت (۱)}} \cup \underbrace{[1,2)}_{\text{قسمت (۲)}}$$

مورد داشتیم پرسیده آقا مگه اشتراک نبود، چرا بین اون‌ها اجتماع شد؟

ببین B و A در کدام قسمت‌ها اشتراک دارند؟ در دو بازه که هر دوی اون‌ها هم قبوله، یعنی همه‌شون جزء جواب باید باشن، پس قسمت (۱) اجتماع (به اضافه) قسمت (۲).

مثال اگر $A_n = [\frac{-3}{n}, \frac{n-1}{2})$ باشد، آن‌گاه حاصل $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ را به دست آورید و تعداد اعداد صحیح در بازهٔ به دست آمده را معین کنید.

پاسخ برای به دست آوردن A_1، A_2 و A_3 به جای n به ترتیب ۱، ۲ و ۳ قرار می‌دهیم:

$A_1 = [-3,0)$

$A_2 = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

$A_3 = [-1,1)$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [-3,1)$

جواب شامل اعداد صحیح ۳−، ۲−، ۱−، و ۰ (یعنی چهار عدد صحیح) است.

تذکر $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ را خلاصه‌تر به صورت $\bigcup_{n=1}^{3} A_n$ نیز نمایش می‌دهند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعهٔ $A=\{-1,2,5\}$، ۳ عضو دارد؛ پس $n(A)=3$ اما تعداد عضوهای مجموعهٔ $B=\{1,2,3,4,\dots\}$ را نمی‌توان با یک عدد حسابی، بیان کرد. مجموعهٔ A نمونه‌ای از یک مجموعهٔ متناهی (باپایان) و مجموعهٔ B نمونه‌ای از یک مجموعهٔ نامتناهی (بی‌پایان) است.

مجموعهٔ متناهی

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد، مجموعه‌های متناهی (باپایان) می‌نامیم.

- ممکن است تعداد اعضای یک مجموعه، عدد حسابی بزرگی باشد اما باز هم مجموعهٔ متناهی به حساب می‌آید.
- مجموعهٔ $\varnothing$، صفر عضو دارد، پس $\varnothing$ هم یک مجموعهٔ متناهی است.
- مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی می‌نامیم.

مثال متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های ستون سمت راست را مشخص کنید.

مجموعه	متناهی یا نامتناهی
A = مجموعهٔ اعداد اول دورقمی	متناهی، چون $A=\{11,13,17,\dots,97\}$ بوده و تعداد عضوها، عدد حسابی است.
B = مجموعهٔ اعداد حسابی	نامتناهی، چون $B=\{0,1,2,3,\dots\}$ بوده و تعداد عضوها، یک عدد حسابی نیست.
C = مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۳	نامتناهی، چون $C=\{3,6,9,12,\dots\}$ بوده و تعداد عضوها، یک عدد حسابی نیست.
D = مجموعهٔ اعداد بین صفر و یک	نامتناهی، چون $D=(0,1)$ و بی‌شمار عدد در این بازه وجود دارد.
E = مجموعهٔ مورچه‌های کرهٔ زمین در یک لحظهٔ خاص	متناهی، چون تعداد آن‌ها بالاخره یک عدد حسابی است هر چند بسیار بزرگ خواهد بود.
F = مجموعهٔ اعداد گویا	نامتناهی، چون تعداد عددهای گویا، یک عدد حسابی نیست.
G = مجموعهٔ اعداد اعشاری بین ۰/۱ و ۰/۲	نامتناهی، چون بی‌شمار عدد اعشاری، بین هر دو عدد مختلف، وجود دارد.

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ نماد مجموعه‌های مهم، عضوهای آن‌ها و اعمال روی آن‌ها معمولاً به صورت جای خالی یا درست و نادرست از شما خواسته می‌شود.
حالا تو حل کن سؤال‌های ۱ تا ۱۸

تیپ۲ مهم‌ترین موضوع درس اول، بازه‌ها است. از مفهوم بازه‌ها و اعمال روی آن‌ها (به‌خصوص تفاضل) حتماً در آزمون سؤال می‌آید.
حالا تو حل کن سؤال‌های ۱۹ تا ۲۵ و ۴۴ و ۴۵

تیپ۳ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های داده‌شده از شما خواسته می‌شود. هم‌چنین متناهی یا نامتناهی بودن اجتماع، اشتراک و تفاضل دو مجموعه (متناهی یا نامتناهی) به صورت درست و نادرست یا زدن مثال نیز می‌تواند در آزمون مطرح شود.
حالا تو حل کن سؤال‌های ۲۶ تا ۴۳

سؤال‌های امتحانی

سؤال‌هایی که علامت دارن، سخت‌ترین سؤال‌های هر بخشن. اگر به کم‌تر از ۲۰ راضی نمی‌شی، بعد از تسلط روی سؤال‌های دیگه، برو سراغ اون‌ها.

- در جای خالی یکی از مجموعه‌های $\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{N}$، $\varnothing$ را قرار دهید. (مشابه کتاب درسی)

۱- $\mathbb{N}\cup\mathbb{Z}=\cdots$ ۲- $\mathbb{W}\cap\mathbb{N}=\cdots$ ۳- $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\cdots$

۴- $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Q}'=\cdots$ ۵- $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\cdots$ ۶- $\mathbb{Z}-\mathbb{Q}=\cdots$

۷- $\mathbb{Z}-\mathbb{Q}'=\cdots$ ۸- $\mathbb{Q}'-\mathbb{R}=\cdots$ ۹- $\mathbb{Q}'\cap\mathbb{R}=\cdots$

- درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (مشابه کتاب درسی)

۱۰- $3\in\{0,3\}$ ۱۱- $-1\in\{-2,0\}$ ۱۲- $3\in(0,3)$

۱۳- $-1\in(-2,0)$ ۱۴- $(-1,2)\subseteq[-1,2)$ ۱۵- $\varnothing\in(-5,0]$

۱۶- $\varnothing\subseteq(0,1)$ ۱۷- $\frac{\sqrt{5}}{3}\notin[0,1]$ ۱۸- $(2,3)=[2,3)$

۱۹- مشخص کنید هر عدد متعلق به کدام بازه است. (مانند نمونه) (مشابه کتاب درسی)

-10^{20}	$(-10)^{-2}$	$0/075\times10^{100}$	$\frac{\sqrt{11}}{2}$	$\sqrt{8}$	نمونه ۳-
$(4,+\infty)$	$(\sqrt{7},3]$	$(-\infty,-100)$	$(-5,-3]$	$(0,1)$	$[1,2)$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۲۰- جدول زیر را کامل کنید. (مشابه کتاب درسی)

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
.....	.....	$(-3,2]$	.....
.....	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	.....	.....
۴	.....	.....	.....

در هر قسمت $A \cup B$ ، $A \cap B$ ، $A - B$ و $B - A$ را به دست آورده و در صورت امکان با بازه‌ها نمایش دهید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۲۱- $A = [-2,1)$ ، $B = (0,5)$

۲۲- $A = (-2,0)$ ، $B = [1,+\infty)$

۲۳- $A = (-2,2)$ ، $B = [-1,1]$

۲۴- $A = [-3,1]$ ، $B = (0,1)$

۲۵- مجموعه‌های $\mathbb{R} - \{0\}$ ، $\mathbb{R} - \{1,-1\}$ و $\mathbb{R} - (-1,1)$ را روی محور نمایش داده و سپس آن‌ها را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

متناهی یا نامتناهی بودن هر مجموعه را مشخص کنید. (مشابه کتاب درسی)

۲۶- مجموعهٔ اعداد طبیعی مضرب ۱۰۰

۲۷- مجموعهٔ سلول‌های زندهٔ بدن شما

۲۸- مجموعهٔ همهٔ دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

۲۹- اعداد بازهٔ $(-\frac{1}{100},\frac{1}{100})$

۳۰- اعداد گویای بین ۱ و ۲

۳۱- اعداد حسابی منفی

۳۲- مجموعه اعداد اول چهاررقمی

۳۳- مجموعهٔ اعداد طبیعی که مربع آن‌ها از ۱۰ بیشتر است.

۳۴- مجموعه اعداد اعشاری بین ۰/۲ و ۰/۵

۳۵- مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۰۰

در هر قسمت دو مجموعهٔ B و A مثال بزنید که شرایط خواسته‌شده را دارا باشد. (مشابه کتاب درسی)

۳۶- B و A نامتناهی بوده ولی اشتراک آن‌ها متناهی باشد.

۳۷- B و A نامتناهی بوده ولی $A - B$ متناهی و $B - A$ نامتناهی باشد.

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (مشابه کتاب درسی)

	درست	نادرست
۳۸- اجتماع دو مجموعهٔ متناهی، متناهی است.	○	○
۳۹- اشتراک دو مجموعهٔ نامتناهی، نامتناهی است.	○	○
۴۰- اگر $A \subseteq B$ بوده و B متناهی باشد، A هم متناهی است.	○	○
۴۱- اگر $A \subseteq B$ بوده و A نامتناهی باشد، B هم نامتناهی است.	○	○
۴۲- اگر $A - B$ نامتناهی باشد، A نامتناهی و B حتماً متناهی است.	○	○
۴۳- اگر $B - A$ متناهی باشد، B متناهی است.	○	○

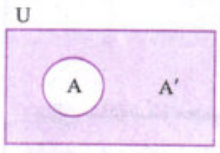
۴۴- اگر $\frac{m-2}{3} \in [2,6)$ باشد، m برابر با چند عدد صحیح می‌تواند باشد؟

۴۵- اگر $(b,3] \cap [-2,a) = (-\frac{2}{3},0)$ باشد، حاصل $(a,-b] \cup (-3a,2b+3)$ را به دست آورید.

درس ۲ متمم یک مجموعه ـ شمارش تعداد عضوهای مجموعه‌ها

مجموعهٔ مرجع و متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث، مجموعه‌ای که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند را مجموعهٔ مرجع یا مجموعهٔ جهانی می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم. مجموعهٔ مرجع، معمولاً توسط خودِ مسئله مشخص می‌گردد.



متمم مجموعهٔ A: فرض کنید U مجموعهٔ مرجع و $A \subseteq U$ باشد. مجموعهٔ $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. (A'، شامل عضوهایی از مجموعهٔ مرجع است که در A نیستند.)

نکته

روابط زیر همواره در مجموعهٔ U برقرار است:

$A \cap A' = \varnothing$ ، $A \cup A' = U$ ، $(A')' = A$ ، $\varnothing' = U$ ، $U' = \varnothing$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $U=\mathbb{N}$ باشد، مجموعهٔ A' را به دست آورید.

پاسخ $A'=U-A=\mathbb{N}-A=\{۱,۲,۳,۴,۵,\dots\}-\{۱,۲,۳,۴\}=\{۵,۶,۷,\dots\}$

مثال در مثال بالا، اگر $U=\mathbb{Z}$ باشد، مجموعهٔ A' را به دست آورید.

پاسخ $A'=U-A=\mathbb{Z}-A=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}-\{۱,۲,۳,۴\}=\{\dots,-۲,-۱,۰,۵,۶,۷,\dots\}$

مثال در مثال اول، اگر $U=\mathbb{R}$ باشد، مجموعهٔ A' را به دست آورید.

پاسخ از کل محور، اعداد ۱,۲,۳,۴ را حذف می‌کنیم:

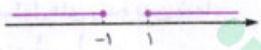
$$A'=U-A=\mathbb{R}-\{۱,۲,۳,۴\}=(-\infty,۱)\cup(۱,۲)\cup(۲,۳)\cup(۳,۴)\cup(۴,+\infty)$$

می‌بینید با این‌که در هر سه مثال، مجموعهٔ A یکسان است ولی چون مجموعه‌های مرجع، در هر کدام متفاوت است، مجموعه‌های مختلفی برای A' به دست می‌آید. به همین دلیل است که وقتی صحبت از متممِ مجموعه می‌شود، حتماً باید مجموعهٔ مرجع داده شده باشد.

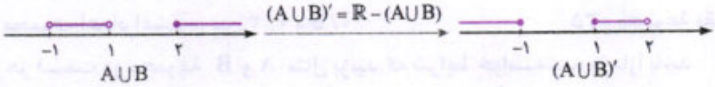
مثال فرض کنید $U=\mathbb{R}$، $A=(-۱,۱)$ و $B=[۲,+\infty)$ باشد. مجموعه‌های A'، B' و $(A\cup B)'$ را به دست آورید.

پاسخ

$$A'=U-A=\underbrace{\mathbb{R}-(-۱,۱)}_{\text{بازهٔ }(-۱,۱)\text{ را از کل }\mathbb{R}\text{ برمی‌داریم}}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$



$$B'=U-B=\mathbb{R}-[۲,+\infty)=(-\infty,۲)$$



$$(A\cup B)'=(-\infty,-۱]\cup[۱,۲)$$

روابط بین متمم مجموعه‌ها

در حالت کلی روابط مهمی بین متمم‌های دو مجموعه و اعمال اجتماع، اشتراک و تفاضل وجود دارد که آن‌ها را در جدول می‌بینید. درستی هرکدام را با نمودار ون یا مثال، بهتر می‌توانید درک کنید.

اسم قانون	قانون	توضیح	مثال
تفاضل به اشتراک	$A-B=A\cap B'$	تفاضل به اشتراک تبدیل شده و دومی متمم می‌شود.	$A-B'=A\cap(B')'=A\cap B$
دمورگان	$(A\cup B)'=A'\cap B'$ $(A\cap B)'=A'\cup B'$	هر دو مجموعه متمم شده و علامت وسط برعکس می‌شود.	$(A\cup B')'=A'\cap B$
تفاضل مجموعه از متمم خودش	$A-A'=A$ $A'-A=A'$	چون A و A' جدا از هم هستند، تفاضل آن‌ها همان مجموعهٔ اول می‌شود.	_

مثال مجموعهٔ مرجع را $U=\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$ در نظر گرفته و $A=\{۲,۳,۵\}$ و $B=\{۳,۵,۷,۸\}$ تعریف می‌کنیم. درستی رابطهٔ $(A\cup B)'=A'\cap B'$ را بررسی کنید.

پاسخ ابتدا مجموعه‌های راست و چپ تساوی را جداگانه به دست می‌آوریم:

$$A\cup B=\{۲,۳,۵,۷,۸\}\Rightarrow(A\cup B)'=U-(A\cup B)=\{۱,۴,۶,۹,۱۰\}$$

$$A'=\{۱,۴,۶,۷,۸,۹,۱۰\}\ ,\ B'=\{۱,۲,۴,۶,۹,۱۰\}\Rightarrow A'\cap B'=\{۱,۴,۶,۹,۱۰\}$$

مثال ساده‌شدهٔ مجموعهٔ $(A\cup B)\cap(A'\cap B')$ را به دست آورید.

پاسخ طبق قانون دمورگان $A'\cap B'=(A\cup B)'$، پس داریم:

$$\underbrace{(A\cup B)}_{X}\cap\underbrace{(A\cup B)'}_{X'}=X\cap X'=\varnothing$$

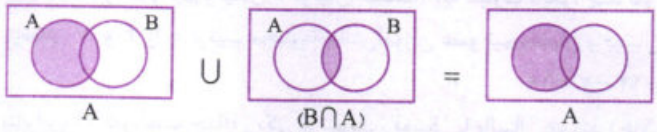
نکته

برای ساده‌سازی عبارات مجموعه‌ای می‌توانیم از نمودار ون هم کمک بگیریم.

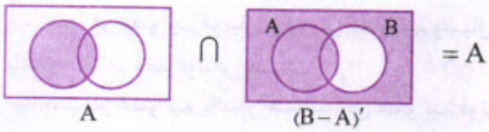
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال حاصل مجموعهٔ $[A\cup(B\cap A)]\cap(B-A)'$ را به دست آورید.

پاسخ



حالا داریم:



تعداد عضوهای اجتماع، تفاضل و متمم مجموعه‌ها

به دو روش می‌توانیم تعداد عضوهای مجموعه‌ها را به دست آوریم: ۱) روش فرمولی ۲) روش نمودار ون

روش فرمول

۱ **تعداد عضوهای $A\cup B$**: اگر تعداد اعضای A را با تعداد اعضای B جمع کنیم، عضوهای تکراری دو بار شمرده می‌شوند *(در صورتی که عضوهای تکراری تو $A\cup B$ رو یه بار می‌نویسیم)*، پس یک بار آن را کم می‌کنیم، بنابراین:

$$\underbrace{n(A\cup B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در A یا در B هستند}} = \underbrace{n(A)}_{\text{تعداد A}} + \underbrace{n(B)}_{\text{تعداد B}} - \underbrace{n(A\cap B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در هر دوی A, B هستند}}$$

نکته

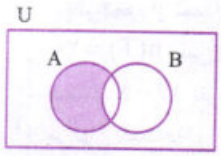
B و A را دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا گوییم هرگاه اشتراکی نداشته باشند؛ به عبارت دیگر $A\cap B=\varnothing$. رابطهٔ بالا در این حالت به صورت مقابل درمی‌آید.

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-\underbrace{n(\varnothing)}_{\text{صفر}}=n(A)+n(B)$$

نتیجه اگر دو مجموعه جدا از هم باشند، برای به دست آوردن تعداد عضوهای اجتماع، تعداد عضوهای دو مجموعه را با هم جمع می‌کنیم.

۲ **تعداد عضوهای $A-B$**: شکل زیر نمایش نمودار ون $A-B$ است. برای به دست آوردن تعداد عضوهای این مجموعه، کافی است تعداد عضوهای مشترک را از تعداد اعضای A کم کنیم.

به عبارت دیگر:



$$\underbrace{n(A-B)}_{\text{تعداد عضوهایی که در A هستند ولی در B نیستند (فقط A)}} = \underbrace{n(A)}_{\text{(مجموعهٔ اول) n}} - \underbrace{n(A\cap B)}_{\text{(اشتراک) n}}$$

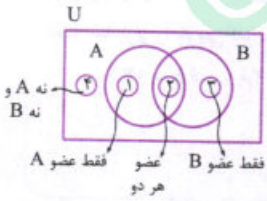
۳ **تعداد عضوهای متمم**:

$$\underbrace{n(A')}_{\text{تعداد عضوهایی که در A نیستند}} = \underbrace{n(U)}_{\text{تعداد مرجع}} - n(A)$$

برای به دست آوردن تعداد عضوها، هم می‌توانید از این روابط مهم استفاده کنید یا این‌که از نمودار ون کمک بگیرید.

روش نمودار ون

در این روش، نموداری به صورت مقابل رسم می‌کنیم:



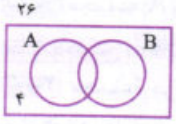
۱ اگر اشتراک داده شده باشد، اول آن را قرار می‌دهیم، در غیر این صورت آن را x می‌گیریم.

۲ با کم‌کردن اشتراک از تعداد عضوهای A، ناحیهٔ (۱) را به دست می‌آوریم. (شبیه همین ناحیهٔ (۳))

۳ مجموع تعداد عضوهایی که در ۴ ناحیه قرار دارد، برابر مجموعهٔ مرجع می‌شود که از حل معادله، مجهول به دست می‌آید.

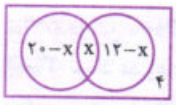
مثال در یک کلاس ۲۶نفره که ۲۰ نفر علاقه‌مند به فوتبال، ۱۲ نفر علاقه‌مند به والیبال و ۴ نفر علاقه‌مند به هیچ‌کدام نیستند، برای محاسبهٔ علاقه‌مندان به هر دو رشته داریم:

پاسخ **روش اول** $۲۶-۴=۲۲$ درون دایره‌ها هستند.



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$۲۲=۲۰+۱۲-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=۱۰$$



روش دوم اشتراک را x می‌گیریم. مجموع اعضای تمام نواحی برابر ۲۶ می‌شود:

$$۲۰-x+x+۱۲-x+۴=۲۶ \Rightarrow x=۱۰$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال **در یک کلاس ۳۰ نفره، ۸ نفر عضو تیم والیبال، ۱۴ نفر عضو تیم فوتبال و ۳ نفر هم عضو هر دو تیم هستند.**

الف **چند نفر عضو تیم والیبال یا فوتبال هستند؟ (به عبارت دیگر، چند نفر عضو حداقل یکی از تیم‌ها هستند؟)**

پاسخ V و F را به ترتیب مجموعهٔ دانش‌آموزان عضو تیم والیبال و فوتبال تعریف می‌کنیم:

$$\underbrace{n(V\cup F)}_{\text{تعداد فوتبال یا والیبال}} = n(V)+n(F)-n(V\cap F)=۸+۱۴-۳=۱۹$$

بنابراین ۱۹ نفر، عضو حداقل یکی از تیم‌های فوتبال یا والیبال هستند (حالا فوتبال یا والیبال یا هر دو)

ب **چند نفر عضو تیم فوتبال بوده ولی عضو تیم والیبال نیستند؟**

پاسخ ۱۱ نفر فقط فوتبالی هستند. $n(F\cap V')=n(F-V)=n(F)-n(F\cap V)=۱۴-۳=۱۱$

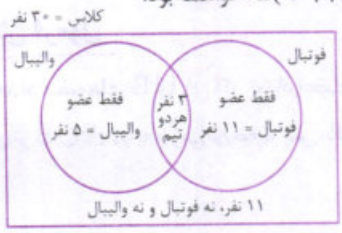
پ **چند نفر عضو تیم والیبال هستند ولی عضو تیم فوتبال نیستند؟**

پاسخ ۵ نفر فقط والیبالی هستند. $n(V\cap F')=n(V-F)=n(V)-n(V\cap F)=۸-۳=۵$

ت **چند نفر عضو هیچ‌کدام از تیم‌ها نیستند؟**

پاسخ **روش اول** طبق قسمت الف، ۱۹ نفر فوتبالی یا والیبالی هستند. کلاس ۳۰ دانش‌آموز دارد، بنابراین ۱۱ = ۱۹ − ۳۰ نفر، نه عضو فوتبال و نه عضو والیبال هستند. طبق توضیحات پلهٔ دوم این تعداد همان $n((V\cup F)')$ یا $n(V'\cap F')$ خواهند بود.

روش دوم از نمودار ون استفاده می‌کنیم. شکلی به صورت مقابل رسم می‌کنیم. اول ۳ نفر را در قسمت اشتراک می‌نویسیم. کل والیبالی‌ها ۸ نفر بودند، پس ۵ = ۳ − ۸ نفر فقط عضو والیبال هستند. به همین صورت ۱۱ = ۳ − ۱۴ نفر هم فقط عضو فوتبال هستند. حالا ۱۹ = ۱۱ + ۳ + ۵ نفر بالأخره عضو حداقل یکی از تیم‌ها و بنابراین ۱۱ = ۱۹ − ۳۰ نفر عضو هیچ تیمی نیستند.

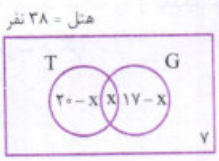


مثال **در یک هتل، ۳۸ مسافر وجود دارد. ۲۰ نفر آنان تاجر و ۱۷ نفر جهانگرد هستند. اگر ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد باشند، چند مسافرِ تاجرِ جهانگرد در هتل وجود دارد؟**

پاسخ **روش اول** از ۳۸ مسافر، ۷ نفر نه تاجر و نه جهانگرد هستند، پس ۳۱ = ۷ − ۳۸ نفر بالأخره تاجر هستند یا جهانگرد. مجموعهٔ تاجران و جهانگردان را به ترتیب T و G در نظر می‌گیریم:

$$n\underbrace{(T\cup G)}_{\text{تاجر یا جهانگرد}} = n(T)+n(G)-n\underbrace{(T\cap G)}_{\text{تاجر و جهانگرد}} \Rightarrow ۳۱=۲۰+۱۷-n(T\cap G) \Rightarrow n(T\cap G)=۶$$

روش دوم از نمودار ون کمک می‌گیریم. اول اشتراک اما چون آن را نداریم $n(T\cap G)=x$ می‌گیریم. $n(T)=۲۰$، پس تعداد افرادی که فقط تاجرند $۲۰-x$ خواهد بود. به همین صورت افرادی که فقط جهانگرد هستند $۱۷-x$ نفر خواهند بود. در داخل دایره‌ها $۲۰-x+x+۱۷-x$ نفر وجود دارد. به شکل دیگری می‌توان گفت داخل دایره‌ها ۳۱ = ۷ − ۳۸ نفر وجود دارد، پس:

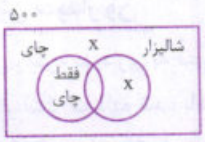


$$۲۰-x+x+۱۷-x=۳۱ \Rightarrow ۳۷-x=۳۱ \Rightarrow x=۶$$

مثال **در بررسی ۵۰۰ کشاورز، ۳۷۰ نفر دارای مزرعهٔ چای و ۲۰۰ نفر دارای شالیزار هستند. تعداد آن‌هایی که نه مزرعهٔ چای و نه شالیزار دارند، برابر تعداد کشاورزانی است که فقط شالیزار دارند. چند کشاورز فقط مزرعهٔ چای دارند؟ (کشاورزان فقط چای و برنج برداشت می‌کنند.)** *(تجربی دی ۱۴۰۱)*

پاسخ بهتر است به جای درگیرشدن با فرمول‌ها از نمودار ون استفاده کنیم:

فقط شالیزار را x می‌گیریم، پس بیرون دایره‌ها (نه چای و نه شالیزار) نیز x می‌شود:



$$\underbrace{۳۷۰}_{\text{چای}}+\underbrace{x}_{\text{فقط شالیزار}}+\underbrace{x}_{\text{هیچ‌کدام}}=۵۰۰ \Rightarrow ۲x=۱۳۰ \Rightarrow x=۶۵ \Rightarrow \text{مشترک}=۲۰۰-x=۲۰۰-۶۵=۱۳۵$$

$$\Rightarrow \text{فقط چای}=۳۷۰-۱۳۵=۲۳۵$$

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ مجموعهٔ A و مجموعهٔ مرجع داده می‌شود و شما باید A' را به دست آورید. حواستان به باز یا بسته بودن بازه‌های داده‌شده باشد.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۴۶ تا ۷۲

تیپ۲ مجموعهٔ مرجع و دو مجموعه که ویژگی خاصی دارند داده می‌شود. باید از روی تعداد عضوهای داده‌شده تعداد عضوهای خواسته‌شده را به دست آورید. روش نمودار ون معمولاً بهتر از فرمول جواب می‌دهد. حواستان اول به اشتراک دو مجموعه باشد.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۷۳ تا ۸۱

تیپ۳ تعداد عضوهای برخی از مجموعه‌ها داده شده و شما باید با استفاده از فرمول‌ها تعداد عضوهای مجموعه‌های خواسته‌شده را پیدا کنید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۸۲ تا ۸۴

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤال‌های امتحانی

(مشابه کتاب درسی)

جاهای خالی را تکمیل کنید.

۴۶- $A \cup A' = \cdots$

۴۷- $A \cap A' = \cdots$

۴۸- $U \cup A = \cdots$

۴۹- $U \cap A = \cdots$

۵۰- $U - A = \cdots$

۵۱- $A - U = \cdots$

۵۲- $\varnothing' = \cdots$

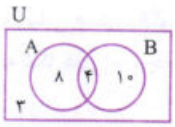
درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۵۳- نمایش نمودار $(A - B)'$ به صورت مقابل است:

۵۴- متمم مجموعهٔ $\{2,3,5\}$ نسبت به اعداد طبیعی یک‌رقمی ۶ عضو دارد.

۵۵- $(A - B)' = A' \cup B$

۵۶- در شکل مقابل تعداد عضوهایی که فقط در یکی از مجموعه‌ها هستند، برابر ۱۸ است.



فرض کنید مجموعهٔ $A = \{0,1,2\}$ باشد. متمم مجموعهٔ A را نسبت به هر کدام از مجموعه‌های مرجع داده‌شده به دست آورید.

۵۷- $U = \{-5,-4,\ldots,5\}$

۵۸- $U = \mathbb{Z}$

۵۹- $U = [0,2]$ (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۶۰- $U = (-1,4]$

۶۱- $U = \mathbb{R}$

۶۲- فرض کنید $U = \mathbb{R}$ باشد. متمم مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{W}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}'$ را مشخص کرده و در صورت امکان با بازه‌ها نمایش دهید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۶۳- فرض کنید $U = [-3,3]$ باشد. متمم مجموعه‌های $(-3,0]$، $(-3,1)$، $(-3,3)$ و $(0,1)$ را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۶۴- فرض کنید $U = \mathbb{R}$، $A = (-\infty,1]$ و $B = (2,+\infty)$ باشد. مجموعه‌های A'، B'، $A' \cap B'$، $(A \cap B)'$ و $(A - B)'$ را به دست آورید.

اگر $U = \{1,2,\ldots,10\}$، مجموعهٔ مضارب ۲ برابر A و مجموعهٔ مضارب ۳ برابر B باشد، با تکمیل جدول درستی هر یک از رابطه‌های زیر را نشان دهید. (مشابه کتاب درسی)

۶۵-

A	A′	(A′)′	نتیجه
			A = (A′)′

۶۶-

A′	B′	A∪B	(A∪B)′	A′∩B′	نتیجه

۶۷-

A′	B′	A∩B	(A∩B)′	A′∪B′	نتیجه

۶۸-

B′	A−B	A∩B′	A−(A∩B)	نتیجه

(مشابه کتاب درسی)

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (U مجموعهٔ مرجع است.)

۶۹- متمم مجموعهٔ متناهی، همواره نامتناهی است.

۷۰- اگر U نامتناهی و A متناهی باشد، آن‌گاه A' نامتناهی است.

۷۱- اگر U نامتناهی و A نامتناهی باشد، آن‌گاه A' متناهی است.

۷۲- $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.

۷۳- در یک نمایشگاه ماشین ۵۰ اتومبیل وجود دارد. ۱۷ ماشین ترمز ABS و ۳۰ ماشین، فرمان هیدرولیک دارند. اگر ۶ ماشین هم ترمز ABS و هم فرمان هیدرولیک داشته باشند، (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

الف) چند ماشین حداقل یکی از دو امکانات را دارند؟

ب) چند ماشین نه ترمز ABS و نه فرمان هیدرولیک دارند؟

۷۴- در یک همایش ۱۲۰ نفر شرکت کرده‌اند. ۴۳ نفر از آنان، عضو هیچ شبکهٔ اجتماعی نیستند، در حالی که ۷۰ نفر عضو شبکهٔ اجتماعی A و ۳۰ نفر عضو هر دو شبکهٔ اجتماعی A و B هستند. چند نفر عضو شبکهٔ اجتماعی B هستند؟ (مشابه کتاب درسی)

۷۵- در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟ (کنکور ریاضی ۹۸)

در یکی از مدارس استان خراسان رضوی، ۱۲ نفر عضو تیم المپیاد ریاضی و ۹ نفر عضو تیم المپیاد فیزیک هستند. اگر ۳ نفر عضو هر دو تیم المپیاد باشند و ۷۵ نفر هم عضو هیچ‌کدام از تیم‌ها نباشند، (مشابه کتاب درسی)

۷۶- این مدرسه چند دانش‌آموز دارد؟

۷۷- چند نفر فقط عضو المپیاد ریاضی هستند؟

۷۸- چند نفر فقط عضو المپیاد فیزیک هستند؟

۷۹- چند نفر عضو فقط یکی از تیم‌ها هستند؟

۸۰- چند نفر عضو تیم ریاضی نیستند؟

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۸۱- در یک مسابقه، ۱۲۰ پویانمایی فرستاده شده است. اگر تعداد پویانمایی‌هایی که به دو داور B و A داده شده به ترتیب برابر ۸۶ و ۶۴ بوده و تعداد پویانمایی‌هایی که به هیچ‌کدام داده نشده برابر با تعداد پویانمایی‌هایی باشد که فقط به یکی از آن‌ها داده شده است، چند پویانمایی فقط به داور A داده شده است؟

اگر $n(U) = ۱۰۰$ ، $n(A') = ۲۳$ ، $n(A - B) = ۴۵$ و $n(B) = ۳۲$ باشد، *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۸۲- $n(A \cup B)$ را به دست آورید.

۸۳- $n(A \cap B')$ را پیدا کنید.

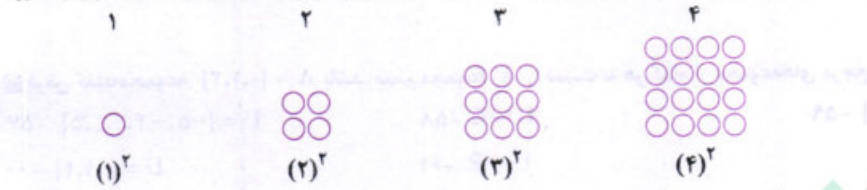
۸۴- تعداد عضوهای مجموعهٔ $(A \cup B)'$ را به دست آورید.

درس ۳ الگو و دنباله

الگوهای عددی

دنیای ما سرشار از الگوهای مختلفی است. برای مثال، مدل رشد بسیاری از گیاهان و جانوران، گردش سیارات و بسیاری از طرح‌های هنری، دارای الگوهای منظم و زیبایی هستند. الگو، یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده، رشدکننده یا ترکیبی از آن‌ها باشد.

به شکل‌های زیر توجه کنید. تعداد دایره‌های به کار رفته در هر شکل چندتا است؟ آیا می‌توانید تعداد دایره‌های شکل پنجم را حدس بزنید؟ شکل nام را چه‌طور؟



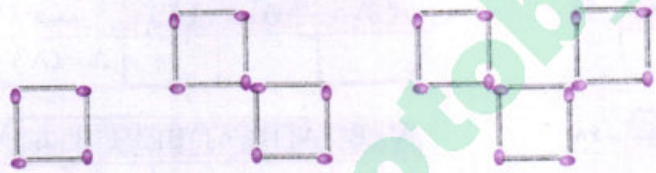
تعداد دایره‌های شکل nام را با a_n نمایش می‌دهیم. مثلاً $a_۱ = ۱$ ، $a_۲ = ۴$ ، $a_۳ = ۹$ و ... . a_n را متغیر اندیس‌دار می‌نامند و آن را a اندیس n *(یا ساده a.ان)* می‌خوانیم. با توجه به الگوی تعداد دایره‌ها، می‌فهمیم تعداد دایره‌ها در شکل nام برابر $n^۲$ است، بنابراین می‌نویسیم $a_n = n^۲$.

جملهٔ عمومی: a_n را جملهٔ عمومی الگو می‌نامیم. با داشتن جملهٔ عمومی الگو، می‌توانیم هر شکل الگو را به دست آوریم.

جملهٔ عمومی الگوها را می‌توانیم با a_n ، b_n ، t_n و ... نمایش دهیم. n شمارهٔ الگو و a_n ، مقدار مورد بررسی در الگوی nام است.

مثال الف) با توجه به الگو، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام (جملهٔ عمومی الگو) را حدس بزنید.

ب) آیا می‌توانید بگویید در شکل چندم، تعداد ۹۶ چوب‌کبریت به کار رفته است؟



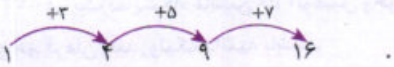
$a_۱ = ۱(۴)$ $a_۲ = ۲(۴)$ $a_۳ = ۳(۴)$ ، $a_n = n(۴) = ۴n$

پاسخ الف) تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام می‌شود ۴n.

ب) $۴n = ۹۶$ و لذا $n = ۲۴$ ، یعنی $a_{۲۴} = ۹۶$ است و در شکل بیست و چهارم، ۹۶ چوب‌کبریت وجود دارد.

الگوهای خطی و غیرخطی

به الگوهای به دست آمده در دو مثال قبل توجه کنید.



مشخص است که وقتی از یک شکل به شکل بعدی می‌رویم، تعداد دایره‌های اضافه‌شده، ثابت نیستند. *(از اولی به دومی ۳ تا اضافه شده، از دومی به سومی ۵ تا اضافه شده و ...)*

اما در مثال دوم، تعداد چوب‌کبریت‌های اضافه‌شده به صورت مقابل است.

اگر تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل را با عدد ثابت ۴، جمع کنیم، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل بعدی به دست می‌آید. چنین الگویی را خطی می‌گوییم. علت این نام‌گذاری آن است که اگر نقاط (۱,۴) و (۲,۸) و (۳,۱۲) و ... را روی دستگاه مختصات رسم کنیم، همهٔ آن‌ها روی خط $y = ۴x$ قرار دارند.

الگوی خطی

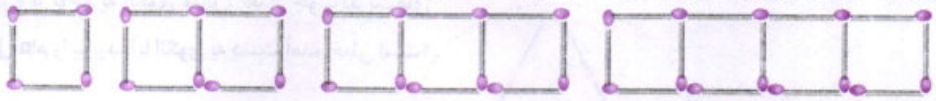
الگوهایی که در آن‌ها، اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، یک عدد ثابت باشد *(تو مثال دوم ۴)* را الگوی خطی می‌نامیم.

جملهٔ عمومی الگوهای خطی: جملهٔ عمومی الگوهای خطی به صورت $t_n = an + b$ است.

- جملهٔ عمومی الگوهای خطی یک چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌یک، نسبت به n است.
- ضریب n (عدد a) همان اختلاف هر دو جملهٔ متوالی الگو را نشان می‌دهد.
- اگر جملهٔ عمومی الگو را نتوانیم به صورت بالا نمایش دهیم، الگو غیرخطی می‌شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال با توجه به الگوی زیر، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام را بیابید. آیا الگوی به دست آمده خطی است؟



شکل اول	شکل دوم	شکل سوم	شکل چهارم	شکل nأم
۴	$۴+۱(۳)$	$۴+۲(۳)$	$۴+۳(۳)$	$t_n=۴+(n-۱)(۳)$

پاسخ جملهٔ عمومی الگو را ساده می‌کنیم، بنابراین: $t_n=۴+(n-۱)(۳)=۴+۳n-۳=۳n+۱$

الگوی به دست آمده خطی است. ضریب n (یعنی ۳)، تعداد چوب‌کبریت‌های اضافه‌شده در هر مرحله را نشان می‌دهد.

می‌توانستیم تعداد چوب‌کبریت‌ها را با الگوی دیگری هم به دست آوریم. در شکل اول یک مربع (۴ چوب‌کبریت) وجود دارد، پس $t_۱=۴$. در شکل دوم، دو مربع وجود دارد اما چوب‌کبریت وسط دو بار شمارش شده است، پس یک بار آن را کم می‌کنیم، پس $t_۲=۴\times۲-۱$. در شکل سوم سه مربع (۴×۳) وجود دارد ولی هر کدام از چوب‌کبریت‌های وسط را دو بار شمارش کرده‌ایم، پس آن‌ها را کم می‌کنیم، یعنی $t_۳=۴\times۳-۲$ و ... . به همین صورت تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام می‌شود: $t_n=۴n-(n-۱)\Rightarrow t_n=۳n+۱$

مثال c_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ (الگو) خطی است که $c_۳=۷$ و $c_۹=۴۳$. جملهٔ عمومی را به دست آورید.

پاسخ جملهٔ عمومی دنبالهٔ خطی به صورت $c_n=an+b$ است. حالا:

$$\begin{cases}c_۳=۷\Rightarrow ۳a+b=۷\\ c_۹=۴۳\Rightarrow ۹a+b=۴۳\end{cases}\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}۶a=۳۶\Rightarrow a=۶\Rightarrow b=-۱۱\Rightarrow c_n=۶n-۱۱$$

مثال اگر ۸ و ۵ به ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جملهٔ شانزدهم الگو را پیدا کنید. *(کنکور تجربی ۱۴۰۱)*

پاسخ جملهٔ عمومی الگوی خطی به صورت $t_n=an+b$ است. جملهٔ پنجم برابر ۸ $(a_۵=۸)$ و جملهٔ دهم برابر ۵ $(a_{۱۰}=۵)$ است، پس داریم:

$$\begin{cases}n=۵\Rightarrow ۵a+b=۸\\ n=۱۰\Rightarrow ۱۰a+b=۵\end{cases}\xrightarrow{\text{کم}}۵a=-۳\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}}۵(-\frac{۳}{۵})+b=۸\Rightarrow b=۸+۳=۱۱$$

پس $t_n=-\frac{۳}{۵}n+۱۱$. جملهٔ شانزدهم برابر است با: $n=۱۶\Rightarrow t_{۱۶}=-\frac{۳}{۵}(۱۶)+۱۱=-\frac{۴۸}{۵}+\frac{۵۵}{۵}=\frac{۷}{۵}$

مثال در یک الگوی خطی، جملهٔ چهاردهم، چهار برابر جملهٔ سوم است. در این الگو نسبت جملهٔ دوازدهم به جملهٔ پنجم را به دست آورید.

پاسخ $t_{۱۴}=۴t_۳$ و $t_n=an+b$ است. n را یک بار ۱۴ و بار دیگر ۳ قرار می‌دهیم و در رابطهٔ داده‌شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{۱۴a+b}_{t_{۱۴}}=۴\underbrace{(۳a+b)}_{t_۳}\Rightarrow ۱۴a+b=۱۲a+۴b\Rightarrow ۲a=۳b\Rightarrow a=\frac{۳b}{۲}$$

حالا نسبت خواسته‌شده:

$$\frac{t_{۱۲}}{t_۵}=\frac{۱۲a+b}{۵a+b}=\frac{۱۲(\frac{۳b}{۲})+b}{۵(\frac{۳b}{۲})+b}=\frac{۱۹b}{\frac{۱۷}{۲}b}=\frac{۳۸}{۱۷}$$

الگوهای درجه‌دوم

اگر جملهٔ عمومی الگو به صورت $t_n=an^۲+bn+c$ باشد، الگو درجه‌دوم است. مثلاً الگوی $t_n=۲n^۲+n-۳$ درجه‌دوم است. $n=۱,۲,۳,۴$ قرار داده و به جمله‌ها دقت کنید:

$$۰\ ,\ ۷\ ,\ ۱۸\ ,\ ۳۳\ \xrightarrow{\text{دنبالهٔ اختلاف‌ها}}\ ۷\ ,\ ۱۱\ ,\ ۱۵$$

(+۷ ، +۱۱ ، +۱۵ ؛ +۴ ، +۴)

درست است که الگو خطی نیست *(عدد ثابتی اضافه نمی‌شه)* ولی اگر یک مرحله جلو برویم و اختلاف‌ها را به دست آوریم می‌بینیم که عدد ثابتی (+۴) به هر جمله اضافه می‌شود. ضریب $n^۲$ همیشه نصف این عدد ثابت است.

نکته

در الگوهای درجه‌دوم $t_n=an^۲+bn+c$:

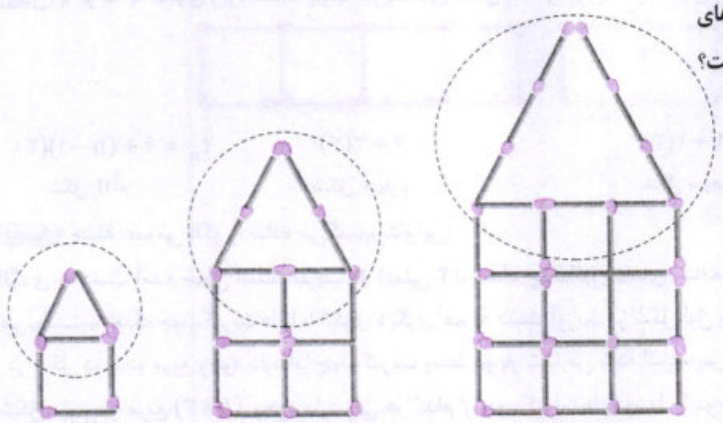
۱ خود دنباله خطی نیست ولی الگوی اختلاف‌ها، خطی است. یعنی در دنبالهٔ اختلاف‌ها، هر عدد جمله با عدد ثابت k جمع شده و بعدی به دست می‌آید.

۲ ضریب $n^۲$ همواره نصف k است؛ یعنی $a=\frac{k}{۲}$.

۳ با قراردادن $n=۱,۲$ و حل دستگاه، b و c را نیز می‌توانیم به دست آوریم.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال با توجه به الگوی مقابل، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام را بیابید. آیا الگوی به دست آمده خطی است؟



(۱) (۲) (۳)

پاسخ **روش اول** در شکل اول ۶ چوب‌کبریت، در دومی ۱۶تا و در سومی ۳۰ چوب‌کبریت وجود دارد. از اولی به دومی ۱۰تا و از دومی به سومی ۱۴تا اضافه شده است؛ پس الگو خطی نیست. به دست آوردن الگو از روی همین اعداد کار دشواری است! تعداد چوب‌کبریت‌ها را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. تعداد چوب‌های بالای مربع‌ها (*سقف خونه‌ها*) اعداد ۳، ۶، ۹ و ... هستند، پس الگوی این‌ها $3n$ است. اما هر سطر آن مربع‌های پایینی به صورت زیر است:

۳ ۵ ۷

الگوی این‌ها، $2n+1$ می‌شود. حالا n سطر داریم؛ پس تعداد چوب‌کبریت‌های پایین آن مثلث‌ها برابر $n(2n+1)$ می‌شود.

خلاصه این‌که تعداد کل چوب‌کبریت‌ها برابر $n(2n+1)+3n=2n^2+4n$ می‌شود.

روش دوم اگر تعداد چوب‌کبریت‌های شکل چهارم را به دست آورید، برابر ۴۸تا می‌شود.

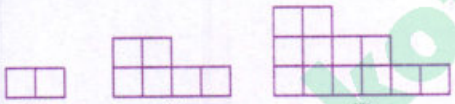
$$6 \xrightarrow{+10} 16 \xrightarrow{+14} 30 \xrightarrow{+18} 48, \ldots \qquad +4 \quad +4$$

جملهٔ عمومی الگو را به صورت $a_n=an^2+bn+c$ می‌گیریم. $a=\frac{4}{2}=2$ با جای‌گذاری دو جملهٔ الگو (مثلاً جمله‌های اول و دوم) و حل دستگاه b و c را نیز به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow 2(1)^2+b(1)+c=6 \Rightarrow b+c=4 \\ n=2 \Rightarrow 2(2)^2+b(2)+c=16 \Rightarrow 2b+c=8 \end{cases} \Rightarrow b=4, c=0$$

پس جملهٔ عمومی الگو به صورت $a_n=2n^2+4n+0$ به دست می‌آید.

مثال تعداد مربع‌های واحد در الگوی مقابل، تشکیل یک الگو می‌دهند. تعداد مربع‌ها در شکل صدم را پیدا کنید.



(۱) (۲) (۳)

پاسخ چند جملهٔ الگو را می‌نویسیم:

$$2, 6, 12, 20 \qquad +4 \quad +6 \quad +8 \qquad +2 \quad +2$$

عدد ثابت ۲ به هر جملهٔ الگوی اختلاف‌ها $(4,6,8,\ldots)$ اضافه می‌شود، پس الگو درجه‌دوم است و $a=\frac{2}{2}=1$؛ یعنی جملهٔ عمومی الگو به صورت $t_n=n^2+bn+c$ است.

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow t_1=1+b+c=2 \Rightarrow b+c=1 \\ n=2 &\Rightarrow t_2=4+2b+c=6 \Rightarrow 2b+c=2 \end{aligned} \xrightarrow{\text{کم}} b=1 \Rightarrow c=0$$

جملهٔ عمومی الگو $t_n=n^2+n$ است، پس تعداد مربع‌های شکل صدم می‌شود: $t_{100}=100^2+100=10100$

دنباله

دیدید که، برای هر الگوی هندسی، یک الگوی عددی به دست آوردیم. مثلاً الگوی عددی تعداد چوب‌کبریت‌ها در مثال قبل به صورت $4,7,10,13,\ldots$ به دست آمد. به این الگوی عددی، یک دنباله گفته می‌شود.

تعریف دنباله: الگوهایی را که در آن‌ها تعدادی عدد، پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. اعداد موجود در دنباله را جمله‌های دنباله می‌نامیم (*جملهٔ اول، جملهٔ دوم و ...*). جملهٔ عمومی دنباله را معمولاً با t_n نمایش می‌دهیم. با استفاده از جملهٔ عمومی دنباله، می‌توان مقدار جمله‌های آن را به دست آورد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال چهار جملهٔ اول هر دنباله را به دست آورید.

الف) $t_n = \frac{1}{n}$ ب) $t_n = n(n+1)$ پ) $t_n = \sqrt{n}$

پاسخ برای به دست آوردن جملهٔ اول، دوم و ... کافی است به جای n اعداد ۱، ۲ و ... را قرار دهیم.

الف) $t_1 = 1 , t_2 = \frac{1}{2} , t_3 = \frac{1}{3} , t_4 = \frac{1}{4} \Rightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

ب) $t_1 = 1\times 2 = 2 , t_2 = 2\times 3 = 6 , t_3 = 3\times 4 = 12 , t_4 = 4\times 5 = 20 \Rightarrow 2, 6, 12, 20, \dots$

پ) $t_1 = 1 , t_2 = \sqrt{2} , t_3 = \sqrt{3} , t_4 = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$

مثال جملهٔ عمومی دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

الف) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ ب) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$ پ) $0, 3, 8, 15, 24, \dots$

پاسخ

الف) $\xrightarrow{\text{حدس الگو}} \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots \Rightarrow t_n = \frac{1}{2^n}$

ب) $\xrightarrow{\text{حدس الگو}} 2(1), 2(2), 2(3), 2(4), \dots \Rightarrow t_n = 2n$

پ) $\xrightarrow{\text{حدس الگو}} 1^2 - 1, 2^2 - 1, 3^2 - 1, 4^2 - 1, 5^2 - 1, \dots \Rightarrow t_n = n^2 - 1$

تذکر با تمرین‌های متنوع و توجه به دنباله‌های پرکاربرد مانند مضارب، مربع‌های کامل، توان‌ها و ... می‌توانید جملهٔ عمومی دنباله‌ها را حدس بزنید.

مثال جملهٔ چهارم دنبالهٔ $a_n = n^2 - 5$ با کدام جملهٔ دنبالهٔ $b_n = 3n - 7$ برابر است؟

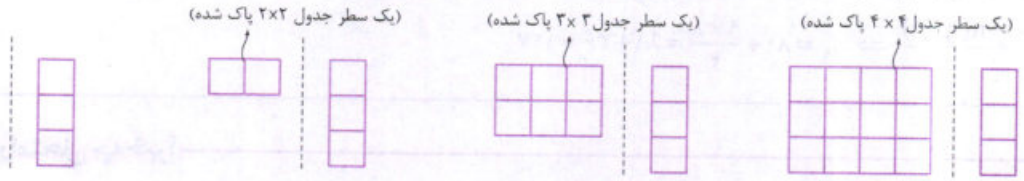
پاسخ برای به دست آوردن جملهٔ چهارم دنبالهٔ a_n، $n = 4$ قرار می‌دهیم، پس $a_4 = 4^2 - 5 = 11$. می‌خواهیم ببینیم کدام جملهٔ دنبالهٔ b_n (*کدوم n*) برابر با ۱۱ است، پس $3n - 7 = 11$ و لذا $n = 6$. جملهٔ ششم دنبالهٔ b_n برابر با جملهٔ چهارم a_n است.

مثال جملهٔ عمومی دنبالهٔ $3, 5, 9, 15, 23, \dots$ را به دست آورده؛ سپس یک الگوی هندسی به آن نظیر کنید.

پاسخ دقت کنید که $3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+4} 9 \xrightarrow{+6} 15 \xrightarrow{+8} 23, \dots$. چون عدد ثابتی به هر جمله اضافه نمی‌شود، دنباله خطی نیست ولی اگر به دنبالهٔ تفاضلات یعنی $2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+2} 8, \dots$ توجه کنید، درمی‌یابید که دو واحد دو واحد $(k = 2)$ دارد اضافه می‌شود. در قبل گفتم که در این مواقع، می‌توانیم جملهٔ عمومی را به صورت درجه‌دوم $a_n = an^2 + bn + c$ در نظر بگیریم. خب $a = \frac{k}{2} = 1$ می‌شود. حالا با جای‌گذاری دو جملهٔ اول دنباله، b و c را هم به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow (1)^2 + b(1) + c = 3 \Rightarrow b + c = 2 \\ n = 2 \Rightarrow (2)^2 + b(2) + c = 5 \Rightarrow 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -1, c = 3$$

پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت $a_n = n^2 - n + 3$ درمی‌آید. اما چگونه می‌توانیم یک الگو، به این دنباله نظیر کنیم؟ خب مثلاً برای n^2 می‌توانیم یک جدول $n \times n$ (که n^2 تا مربع واحد دارد) را در نظر بگیریم. برای ساختن $-n$ یک ردیف آن را پاک می‌کنیم. ۳تا مربع ثابت هم اضافه می‌کنیم. الگو آماده است! تعداد مربع‌های واحد الگوی زیر در شکل nام برابر $n^2 - n + 3$ می‌شود.



$n = 1 \Rightarrow a_1 = 3$ $n = 2 \Rightarrow a_2 = 5$ $n = 3 \Rightarrow a_3 = 9$ $n = 4 \Rightarrow a_4 = 15$

دنبالهٔ بازگشتی

به دنبالهٔ مقابل دقت کنید: $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

هر جمله، جمع دو جملهٔ قبلی می‌شود. جملهٔ عمومی این دنباله به صورت $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ که $a_1 = a_2 = 1$ است، نوشته می‌شود. مثلاً اگر $n = 1$ قرار دهیم $a_3 = a_2 + a_1$ می‌شود. در اصطلاح می‌گوییم دنباله به صورت بازگشتی داده شده است. برای به دست آوردن جمله‌ها به جای n عدد می‌گذاریم و هر جمله را با توجه به قبلی‌ها به دست می‌آوریم.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال بین جمله‌های دنباله‌ای، رابطهٔ $a_{n+1} = a_n + 2^n$ که $a_1 = 1$ است برقرار است. جمله‌های دوم تا پنجم دنباله را به دست آورید.

پاسخ

$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ $\qquad$ $n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$

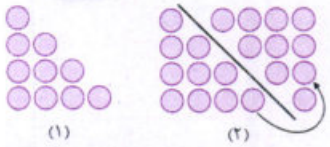
$n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 2^3 = 7 + 8 = 15$ $\qquad$ $n = 4 \Rightarrow a_5 = a_4 + 2^4 = 15 + 16 = 31$

جمله‌های این دنباله می‌شود:

$1, 3, 7, 15, 31, \ldots$

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n (دنبالهٔ مثلثی)

می‌خواهیم با توجه به الگوی زیر، مجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ را به دست آوریم. قبل از به دست آوردن رابطهٔ کلی، حاصل عبارت را به ازای $n = 4$ بررسی می‌کنیم. تعداد دایره‌های شکل (۱) برابر $1 + 2 + 3 + 4$ است. همین تعداد دایره را به صورت برعکس کرده و کنار دایره‌ها قرار می‌دهیم تا شکل ۲ به دست آید. تعداد دایره‌های شکل دوم $2(1 + 2 + 3 + 4)$ خواهد بود. از طرفی شکل (۲) یک مستطیل است، پس تعداد دایره‌ها می‌شود 4×5، بنابراین:



$$2(1 + 2 + 3 + 4) = 4 \times 5 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$$

نکته

مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دنبالهٔ مثلثی

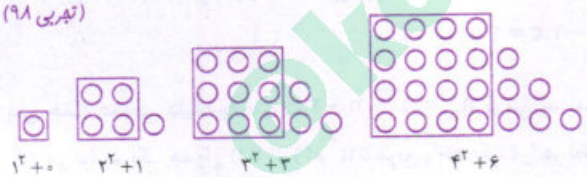
به دنبالهٔ $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$، دنبالهٔ مثلثی گفته می‌شود:

نکته

اگر شروع دنبالهٔ مثلثی از صفر باشد قانون آن به صورت مقابل است:

$$t_n = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 0, 1, 3, 6, \ldots$$

مثال در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها در شکل نهم را به دست آورید. (تجربی ۹۸)



پاسخ دنباله از یک دنبالهٔ مربعی و یک دنبالهٔ مثلثی (با شروع صفر) تشکیل شده است، پس:

$$t_n = n^2 + \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow t_9 = 81 + \frac{9 \times 8}{2} = 81 + 36 = 117$$

در امتحان چه خبر؟

تیپ۱ تعدادی شکل (الگو) داده شده و جملهٔ عمومی یا تعداد شکل‌های شمارهٔ خاصی از شما خواسته می‌شود. ابتدا چند جملهٔ اول الگو را بنویسید و ببینید خطی است یا غیرخطی. الگوهای غیرخطی که در امتحان داده می‌شود معمولاً درجه‌دوم هستند.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۸۵ تا ۹۵

تیپ۲ جملهٔ عمومی یک دنباله (حالا به صورت صریح یا بازگشتی) داده شده و جملهٔ خاصی خواسته می‌شود. با جای‌گذاری n مناسب، آن جمله به دست می‌آید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۹۶ تا ۱۰۲

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

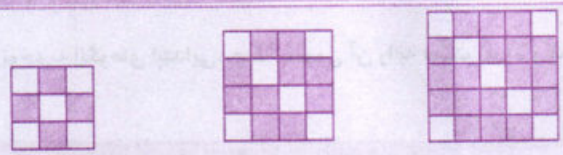
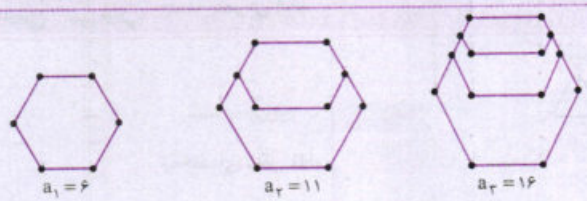
سؤال‌های امتحانی

در هر ردیف با توجه به الگوهای ابتدایی، جملهٔ عمومی آن را به دست آورید و مشخص کنید الگو خطی است یا غیرخطی.

(مشابه کتاب درسی - برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

	خطی	غیرخطی	جملهٔ عمومی الگو	
۸۵-	○	○	..... = تعداد پاره‌خط‌های شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$
۸۶-	○	○	..... = تعداد مربع‌های شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$
۸۷-	○	○	..... = تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$
۸۸-	○	○	..... = تعداد مربع‌های رنگی در شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$
۸۹-	○	○	..... = تعداد آجرهای شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$ $a_4 =$
۹۰-	○	○	..... = تعداد مهره‌های شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$
۹۱-	○	○	= تعداد پاره‌خط‌های شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$
۹۲-	○	○	= تعداد دایره‌های شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$
۹۳-	○	○	= تعداد مربع‌های رنگی شکل nاُم	$a_1 =$ $a_2 =$ $a_3 =$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

	خطی یا غیرخطی: خطی	خطی یا غیرخطی: غیرخطی	جملهٔ عمومی الگو	
۹۴-	○	○	= تعداد مربع‌های رنگی شکل nام	 $a_1 =$ ، $a_2 =$ ، $a_3 =$
۹۵-	○	○	= تعداد پاره‌خط‌های شکل nام	 $a_1 = 6$ ، $a_2 = 11$ ، $a_3 = 16$

۹۶- c_n جملهٔ عمومی یک الگوی خطی است که $c_4 = 17$ و $c_{10} = 35$ است. c_{20} را بیابید. *(مشابه کتاب درسی)*

۹۷- جملهٔ عمومی دنبالهٔ درجه‌دوم ...,۴۱,۲۳,۱۱,۵ را به دست آورده؛ سپس یک الگوی هندسی به آن نظیر کنید. *(مشابه کتاب درسی)*

در هر قسمت، چهار جملهٔ اول هر دنباله را به دست آورید.

۹۸- $a_{n+1} - a_n = 7$ و $a_1 = -1$

۹۹- $b_{n+1} = 3b_n$ و $b_1 = 2$

۱۰۰- $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$ و $c_1 = c_2 = 1$

۱۰۱- اگر در یک دنباله داشته باشیم: $a_{2n} = \frac{1}{4n^2}$، آن‌گاه $a_8 = \cdots\cdots$ *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۰۲- دربارهٔ دنبالهٔ a_n می‌دانیم $a_1 = 2$ و $a_{n+1} = 1 + 2a_n$. کوچک‌ترین مقدار n که a_n اول نیست، را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

درس ۴ دنبالهٔ حسابی

به دنباله‌های زیر دقت کنید. هر جمله با عدد ثابتی جمع شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید. به چنین دنباله‌هایی، **دنبالهٔ حسابی** گفته می‌شود. عدد ثابت هر دنباله را **قدرنسبت** دنبالهٔ حسابی می‌نامیم.

$2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{+5} 12 \xrightarrow{+5} 17 \xrightarrow{+5} 22 , \ldots$

الف) $1 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{3}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 2 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{5}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 3 , \ldots$

ب) $7 \xrightarrow{-2} 5 \xrightarrow{-2} 3 \xrightarrow{-2} 1 \xrightarrow{-2} -1 , \ldots$

قدرنسبت ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد. قدرنسبت دنباله‌های بالا به ترتیب ۵ و $\frac{1}{2}$ و ۲- هستند. حتماً متوجه شدید که دنباله‌های خطی همان دنباله‌های حسابی هستند.

تعریف دنبالهٔ حسابی: دنباله‌ای را که در آن هر جمله (*به‌جز جملهٔ اول*)، با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به دست می‌آید، یک دنبالهٔ حسابی می‌نامیم. در دنبالهٔ حسابی، اختلاف هر دو جملهٔ متوالی دنباله، عدد ثابتی است (*همان الگوی خطی*). به این عدد ثابت، قدرنسبت دنباله گفته و آن را با d نمایش می‌دهیم. جملهٔ اول دنباله‌های حسابی را نیز معمولاً با a نمایش می‌دهیم. مثلاً در دنبالهٔ الف: $a = 1$, $d = \frac{+1}{2}$

جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی: با استفاده از جملهٔ اول (a) و قدرنسبت (d) دنبالهٔ حسابی، می‌توان جملهٔ عمومی آن را به دست آورد.

جملهٔ اول $t_1 =$	جملهٔ دوم $t_2 =$	جملهٔ سوم $t_3 =$	جملهٔ چهارم $t_4 =$	...	جملهٔ nام $t_n =$
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	...	$a+(n-1)d$

$a \xrightarrow{+d} a+d \xrightarrow{+d} a+2d \xrightarrow{+d} a+3d$

ضریب d، یکی کم‌تر از شمارهٔ جمله است، بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d می‌شود: $t_n = a + (n-1)d$

مثال جملهٔ عمومی هر یک از دنباله‌های حسابی زیر را بنویسید.

الف) $-1, 3, 7, 11$ ب) $-2, -5, -8, \ldots$

پاسخ

الف) $\xrightarrow[\text{می‌شه، پس } d=4]{\text{چهار تا چهار تا اضافه}} t_n = a + (n-1)d \Rightarrow t_n = -1 + (n-1)(4) \Rightarrow t_n = 4n - 5$

ب) $\xrightarrow[\text{کم می‌شه، پس } d=-3]{\text{سه تا سه تا}} t_n = a + (n-1)d \Rightarrow t_n = -2 + (n-1)(-3) \Rightarrow t_n = -3n + 1$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال جملهٔ دهم یک دنبالهٔ حسابی برابر ۲۴ و جملهٔ هجدهم آن برابر ۵۶ است. جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.

پاسخ می‌دانیم $t_n = a + (n-1)d$، پس برای به دست آوردن جمله عمومی، نیاز به a و d داریم.

(تو فرمول $n = 10$ می‌ذاریم)

$$\begin{cases} t_{10} = 24 \Rightarrow a + 9d = 24 \\ t_{18} = 56 \Rightarrow a + 17d = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - 9d = -24 \\ a + 17d = 56 \end{cases}$$

$$8d = 32 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a = -12 \Rightarrow t_n = a + (n-1)d = -12 + (n-1)(4) = 4n - 16$$

(تو فرمول $n = 18$ می‌ذاریم)

مثال دنباله‌ای حسابی معرفی کنید که جملهٔ اول آن ۱ بوده و مجموع ۵ جملهٔ اول آن، $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جملهٔ بعدی باشد.

پاسخ

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = \frac{1}{4}\underbrace{(t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10})}_{\text{پنج جملهٔ بعدی}}$$

$$\xrightarrow[\text{باز می‌کنیم و } a=1]{\text{با فرمول جملهٔ عمومی}} (a + a + d + a + 2d + a + 3d + a + 4d) = \frac{1}{4}(a + 5d + a + 6d + a + 7d + a + 8d + a + 9d)$$

$$\Rightarrow 5a + 10d = \frac{1}{4}(5a + 35d) \xrightarrow{a=1} 5 + 10d = \frac{1}{4}(5 + 35d) \xrightarrow{\times 4} 20 + 40d = 5 + 35d \Rightarrow 5d = -15$$

$$\Rightarrow d = -3 \Rightarrow \text{دنباله: } 1, -2, -5, -8, \ldots \Rightarrow t_n = 1 + (n-1)(-3) = -3n + 4$$

واسطهٔ حسابی دو عدد

فرض کنید سه عدد a, b, c (از چپ به راست) تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند، در این صورت داریم:

$$\begin{cases} a + d = b \\ b + d = c \end{cases} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{دو طرف را کم}} a - b = b - c \Rightarrow a + c = 2b \Rightarrow \frac{a+c}{2} = b$$

یعنی b، میانگین دو عدد کناری خواهد بود و به آن میانگین یا واسطهٔ حسابی بین دو عدد c و a گفته می‌شود.

مثال سه عدد $k+6$، $k+1$ و $2k-5$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. k و قدرنسبت را به دست آورید.

پاسخ

$$\frac{2k - 5 + k + 6}{2} = k + 1 \Rightarrow 3k + 1 = 2k + 2 \Rightarrow k = 1$$

اگر اعداد را از چپ به راست بگیریم: $-3, 2, 7 \Rightarrow d = +5$ و اعداد را از راست به چپ بگیریم: $d = -5$

نکته

۱ دسته مسئله‌های معروفی وجود دارند که در آن‌ها رابطهٔ خاصی بین سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی داده شده و خود جمله‌ها خواسته می‌شود. برای این‌که مسئله، سه‌مجهولی نشود و دارای دو مجهول باشد، اعداد را به صورت $x-d, x, x+d$ در نظر می‌گیریم.

۲ اگر پنج جملهٔ متوالی از دنبالهٔ حسابی مجهول باشد، بهتر است آن‌ها را به صورت $x-2d, x-d, x, x+d, x+2d$ در نظر بگیرید.

مثال مجموع سه عدد که دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند برابر ۱۲ و مجموع مربعات آن‌ها ۶۶ است. این اعداد را بیابید.

پاسخ اعداد را به صورت $x-d, x, x+d$ می‌گیریم، پس:

$$x - d + x + x + d = 12 \Rightarrow x = 4$$

پس اعداد به صورت $4-d, 4, 4+d$ هستند. حالا: $(4-d)^2 + 4^2 + (4+d)^2 = 66 \Rightarrow 16 - 8d + d^2 + 16 + 16 + 8d + d^2 = 66$

$$\Rightarrow 48 + 2d^2 = 66$$

$$\Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} d = 3 \Rightarrow 1, 4, 7 \\ d = -3 \Rightarrow 7, 4, 1 \end{cases}$$

درج n واسطهٔ حسابی

فرض کنید می‌خواهیم بین دو عدد c و a، تعداد n عدد، طوری قرار دهیم که همهٔ این $n+2$ عدد، تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. به دو روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

۱ جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی: جملهٔ اول دنباله همان a و جملهٔ $n+2$ام دنباله همان c است. با نوشتن معادله و بازکردن با فرمول جملهٔ عمومی، d به دست می‌آید.

۲ فرمول: اگر n واسطه بین دو عدد c و a درج کنیم، قدرنسبت می‌شود $d = \frac{c-a}{n+1}$. *(داره می‌گه فاصلهٔ بین a تا c به $n+1$ قسمت مساوی تقسیم می‌شه.)*

$$a \quad \overbrace{\square \quad \square \quad \cdots \quad \square}^{n\ \text{عدد}} \quad c$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال بین دو عدد ۵ و ۲۰ چهار عدد، طوری قرار دهید که تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند.

پاسخ **روش اول** با توجه به شکل مقابل:

$$\begin{cases} a = ۵ \\ t_۶ = ۲۰ \Rightarrow a + ۵d = ۲۰ \Rightarrow ۵d = ۱۵ \Rightarrow d = ۳ \end{cases}$$

۵ □ □ □ □ ۲۰

پس اعداد به صورت ۲۰ , ۱۷ , ۱۴ , ۱۱ , ۸ , ۵ خواهند بود. (+۳ , +۳ , +۳ , +۳ , +۳)

روش دوم $d = \frac{۲۰-۵}{۴+۱} = ۳$ پس کافی است از عدد ۵، سه‌تا سه‌تا جلو برویم تا به ۲۰ برسیم.

در امتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ تشخیص دنبالهٔ حسابی از دنبالهٔ غیرحسابی (ناحسابی!) و نوشتن جملهٔ عمومی دنباله است.
اگر عدد ثابتی به هر جمله اضافه شده باشد، دنباله حسابی است و $a_n = a_۱ + (n-۱)d$.

حالا توحل‌کن سؤال‌های ۱۰۳ تا ۱۰۹ و ۱۲۴ تا ۱۲۸

تیپ۲ اطلاعاتی در مورد برخی از جمله‌های دنبالهٔ حسابی داده شده است. باید از روی جملهٔ عمومی دو معادله بنویسید و $a_۱$ و d را به دست آورید.

حالا توحل‌کن سؤال‌های ۱۱۰ تا ۱۱۹ و ۱۲۹ و ۱۳۰ و ۱۳۵ و ۱۳۶

تیپ۳ ارتباط سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی یا به دست آوردن تعدادی واسطهٔ حسابی است.

حالا توحل‌کن سؤال‌های ۱۲۰ تا ۱۲۳

تیپ۴ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی مجهول است. این‌جا بهتر است آن‌ها را به صورت $x-d, x, x+d$ بگیریم و معادله‌های گفته‌شده را تشکیل دهیم تا x و d به دست آید.

حالا توحل‌کن سؤال‌های ۱۳۱ تا ۱۳۴

سؤال‌های امتحانی

مشخص کنید کدام دنباله‌ها حسابی هستند. در دنباله‌های حسابی قدرنسبت و جملهٔ عمومی آن‌ها را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۰۳- $۱, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۳}, \ldots$

۱۰۴- $-۴, -۷, -۱۰, \ldots$

۱۰۵- $\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۵۰}, \ldots$

۱۰۶- $a, ۲a, ۳a, \ldots$

۱۰۷- $a_n = \frac{n}{۲} - ۱$

۱۰۸- $b_n = n^۲ + ۳n - ۱$

۱۰۹- چندمین جملهٔ دنبالهٔ $-۳, ۲, ۷, \ldots$ برابر ۵۷ است؟

۱۱۰- جای خالی را طوری پر کنید که اعداد تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. *(مشابه کتاب درسی)*

$\ldots\ldots, -۲, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \frac{۵}{۲}$

۱۱۱- جملهٔ هفتم یک دنبالهٔ حسابی ۱۶ و جملهٔ یازدهم آن ۲۸ است. دنباله را مشخص کنید. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۱۲- در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

الف) جملهٔ عمومی این دنباله را بیابید.

ب) جملهٔ چندم آن ۴۹۷ است؟

در یک دنبالهٔ حسابی، جمله‌های چهارم و هفتم به ترتیب برابر ۲ و ۵ هستند. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۱۳- جملهٔ اول و قدرنسبت را بیابید.

۱۱۴- مجموع ۵ جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۱۱۵- مجموع ۵ جملهٔ دوم دنباله را به دست آورید.

۱۱۶- مجموع ۵ جملهٔ دوم را برحسب a و d به دست آورید.

۱۱۷- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع دو جملهٔ اول برابر ۲۰ و مجموع جمله‌های نهم و دهم برابر ۵۲ است. جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۱۸- مجموع پنج جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی برابر ۲۵ و مجموع پنج جملهٔ بعدی آن ۷۵ است. دنباله را مشخص کنید.

۱۱۹- بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ چند عدد بخش‌پذیر بر ۶ وجود دارد؟ (تعداد اعداد ۱۰۲، ۱۰۸، ... و ۱۹۸)

در هر قسمت ابتدا x را به گونه‌ای بیابید که سه عدد تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. سپس قدرنسبت دنباله را بیابید. (دنباله‌ها از چپ به راست هستند.) *(مشابه کتاب درسی)*

۱۲۰- $۲x-۱, x, x-۴$

۱۲۱- $۲x+۱, ۲x-۴, ۳x+۳$

۱۲۲- بین دو عدد ۸- و ۲۲، نه واسطهٔ حسابی درج کنید. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۲۳- بین دو عدد $۵-\sqrt{۳}$ و $۵+\sqrt{۳}$ چند عدد می‌توان قرار داد به طوری که دنبالهٔ حاصل تشکیل یک دنبالهٔ عددی با قدرنسبت ۱ بدهند؟ *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

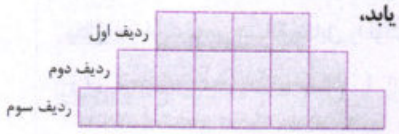
۱۲۴- دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d و جملهٔ اول a داریم. همهٔ جمله‌های دنباله را دو برابر می‌کنیم. دنبالهٔ جدید به دست آمده چگونه دنباله‌ای خواهد بود؟

۱۲۵- در مسئلهٔ قبل، اگر جمله‌های دنباله را با عدد ثابت k جمع کنیم، دنبالهٔ جدید چه تغییری می‌کند؟

۱۲۶- شمعی ۲۵ سانتی‌متری را روشن کرده‌ایم. این شمع در هر دقیقه، ۲ میلی‌متر می‌سوزد. بعد از چند دقیقه، ارتفاع شمع ۸ سانتی‌متر خواهد بود؟ *(مشابه کتاب درسی)*

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۲۷- شکل مقابل، صندلی‌های یک سالن تئاتر را نمایش می‌دهد. اگر تعداد صندلی‌ها با همین الگو ادامه یابد،



الف) در ردیف دهم چند صندلی وجود دارد؟

ب) اگر این سالن ۳۰ ردیف صندلی داشته باشد، تعداد صندلی‌های موجود در سالن چندتا است؟

۱۲۸- جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی به صورت $t_n = (a-2)n^2 + an - 3$ است. جملهٔ دهم دنباله را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۲۹- دنباله‌ای حسابی را معرفی کنید که مجموع جمله‌های دوم، پنجم و ششم آن، ۸ برابر جملهٔ دوم و جملهٔ هفتم آن ۲ واحد از ۲ برابر جملهٔ چهارم کم‌تر باشد.

۱۳۰- دنباله با جملهٔ عمومی $t_n = 7n - 71$ چند جملهٔ منفی دارد؟

۱۳۱- مجموع سه عدد که دنبالهٔ حسابی تشکیل می‌دهند، ۲۱ و مجموع مربعات آن‌ها، ۲۱۹ است. سه عدد را بیابید.

۱۳۲- مجموع سه عدد که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، ۳۳ و حاصل‌ضرب آن‌ها، ۱۲۸۷ است. سه عدد را بیابید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۳۳- اندازهٔ اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای به محیط ۲۴ واحد، تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اندازهٔ وتر این مثلث را بیابید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۳۴- مجموع ۵ عدد که تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند، برابر ۱۵ و مجموع مربع‌های آن‌ها ۸۵ است. این اعداد را بیابید.

۱۳۵- از جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی ۳ واحد کم و به قدرنسبت آن ۲ واحد، اضافه می‌کنیم تا دنبالهٔ حسابی جدیدی به دست آید. جملهٔ دهم دنبالهٔ جدید، چه‌قدر از جملهٔ دهم دنبالهٔ قبلی بیشتر است؟

۱۳۶- در یک دنبالهٔ حسابی $t_4 + t_8 = 20$. مجموع یازده جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

درس ۵ دنبالهٔ هندسی

به دنباله‌های مقابل توجه کنید. هر جمله در عدد ثابتی (قدرنسبت) ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست آمده است. به چنین دنباله‌هایی، **هندسی** گفته می‌شود. جملهٔ اول قدر نسبت دنباله‌های هندسی را به ترتیب با a و r نمایش می‌دهیم.

$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24, \ldots \qquad r = 2$

$1 \xrightarrow{\times(-3)} -3 \xrightarrow{\times(-3)} 9 \xrightarrow{\times(-3)} -27 \qquad r = -3$

$4 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 2 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} 1 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{4}, \ldots \qquad r = \frac{1}{2}$

تعریف دنبالهٔ هندسی: دنباله‌ای است که در آن هر جمله *(به‌جز جملهٔ اول)* از ضرب جملهٔ قبل از خودش، در عدد ثابت به دست می‌آید. عدد ثابت (r) را قدر نسبت دنبالهٔ هندسی می‌نامیم. *(r را می‌توانید با تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبلی نیز به دست آورید.)* $(a, r \neq 0)$

مثال کدام دنباله حسابی، کدام هندسی و کدام‌یک نه حسابی و نه هندسی است؟

الف) $-3, 2, 7, 12, 17, \ldots$ ب) $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ پ) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots$ ت) $\frac{5}{2}, 4, \frac{13}{2}, \ldots$

پاسخ الف) واضح است که هر جمله با عدد ثابت ۵ جمع شده و جملهٔ بعدی به دست آمده است، پس دنباله حسابی است.

ب) هر جمله در $-\frac{1}{2}$ ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست آمده است، پس دنباله هندسی است.

پ) هر جمله با $\sqrt{2}$ جمع شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید، پس دنباله حسابی است.

ت) $4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$ و $\frac{13}{2} - 4 = \frac{5}{2}$ و ...، یعنی جملهٔ اول با $\frac{3}{2}$ جمع شده، ولی دومی با $\frac{5}{2}$ جمع شده است، پس دنباله حسابی نیست. از طرفی $\frac{8}{5} = \frac{4}{\frac{5}{2}}$ و $\frac{13}{8} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{4}{1}}$، یعنی جملهٔ اول در $\frac{8}{5}$ ضرب ولی بعدی در $\frac{13}{8}$ ضرب شده است، پس دنباله هندسی هم نیست.

نکته

در دنباله‌های حسابی، اختلاف هر جمله از جملهٔ قبلی خود عدد ثابت یا همان قدرنسبت (d) است $(t_n - t_{n-1} = d)$ اما در دنباله‌های هندسی، تقسیم هر جمله بر جملهٔ قبلی، عدد ثابت یا همان قدرنسبت (r) است $(\frac{t_n}{t_{n-1}} = r)$.

جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی

جملهٔ اول $= t_1$	جملهٔ دوم $= t_2$	جملهٔ سوم $= t_3$	جملهٔ چهارم $= t_4$	...	جملهٔ n ام
$a \xrightarrow{\times r}$	$ar \xrightarrow{\times r}$	$ar^2 \xrightarrow{\times r}$	ar^3	...	ar^{n-1}

توان r، همواره یکی از شمارهٔ جمله کم‌تر است. جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی که جملهٔ اول آن a و قدرنسبت آن r است، می‌شود: $t_n = ar^{n-1}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل را نوشته و جملهٔ هفتم آن را به دست آورید.

$\frac{3}{5}, \frac{6}{25}, \frac{12}{125}, \dots$

پاسخ واضح است که $r = \frac{2}{5}$، پس $t_n = ar^{n-1} = \frac{3}{5}(\frac{2}{5})^{n-1}$. حالا $t_7 = \frac{3}{5}(\frac{2}{5})^6$.

مثال جملهٔ عمومی دنبالهٔ مقابل را نوشته و نسبت جملهٔ سیزدهم به دهم را به دست آورید:

$\sqrt{2}, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$

پاسخ نسبت جملهٔ دوم به اول برابر است با: $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (اگر $\sqrt{2}$ را در $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ضرب کنیم، دومی می‌شود.)

نسبت جملهٔ سوم به دوم برابر است با: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ یا نسبت جملهٔ چهارم به سوم $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ می‌شود.

دقت دارید که $-\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌شود، یعنی هر جمله در $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ یا همان $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ضرب شده و جملهٔ بعدی به دست آمده است، پس دنباله هندسی است که $a = \sqrt{2}$ و $r = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$t_n = ar^{n-1} = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$

هم‌چنین داریم:

$$\frac{t_{13}}{t_{10}} = \frac{ar^{12}}{ar^9} = r^3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2})^3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{2\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

مثال جملهٔ پنجم و هشتم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۴۸ و ۳۸۴ است. نسبت جملهٔ دوازدهم به جملهٔ دهم دنباله، چه‌قدر است؟

پاسخ

$$\begin{cases} t_5 = 48 \Rightarrow ar^4 = 48 \\ t_8 = 384 \Rightarrow ar^7 = 384 \end{cases} \xrightarrow{\text{(دستگاه‌های این‌جا معمولاً با تقسیم حل می‌شن)}} \frac{ar^7}{ar^4} = \frac{384}{48} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

حالا:

$$\frac{t_{12}}{t_{10}} = \frac{ar^{11}}{ar^9} = r^2 = 4$$

مثال حاصل‌ضرب جمله‌های چهارم و ششم یک دنبالهٔ هندسی برابر جملهٔ دهم و جملهٔ نهم آن برابر ۵۱۲ است. جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید. (همهٔ جمله‌ها ناصفر هستند.)

پاسخ

$$\begin{cases} t_4 t_6 = t_{10} \Rightarrow (ar^3)(ar^5) = ar^9 \Rightarrow a^2 r^8 = ar^9 \Rightarrow a = r \\ t_9 = 512 \Rightarrow ar^8 = 512 \xrightarrow{a=r} r^9 = 512 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow t_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \end{cases}$$

مثال حاصل‌ضرب ۲۹ جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی ۴,۸,۱۶,... را به دست آورید.

پاسخ

$$4 \times 8 \times 16 \times \dots = \underbrace{2^2 \times 2^3 \times 2^4 \times \dots \times 2^{30}}_{\text{ضرب ۲۹ جملهٔ اول}} = 2^{2+3+4+\dots+30} = 2^{464}$$

دقت کنید که $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$، پس:

$$1+2+\dots+30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465$$

بنابراین مجموع توان‌ها برابر است با:

$$2+3+\dots+30 = 465 - 1$$

واسطهٔ هندسی دو عدد

فرض کنید سه عدد a, b, c (از چپ به راست) تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. عدد b را واسطهٔ هندسی دو عدد c و a می‌نامیم. هرگاه مربع جملهٔ وسط، حاصل‌ضرب جمله‌های کناری باشد.

$$\begin{cases} ar = b \\ br = c \end{cases} \xrightarrow[(r \neq 0)]{\text{تقسیم}} \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{b^2 = ac}$$

درج n واسطهٔ هندسی

اگر بخواهیم بین دو عدد c و a تعداد n واسطهٔ هندسی قرار دهیم، داریم:

$$a \underbrace{\square\square\dots\square}_{n\text{ واسطهٔ هندسی}} c$$

c جملهٔ $n+2$ ام است. $\Rightarrow ar^{n+1} = c \Rightarrow r^{n+1} = \frac{c}{a}$

- اگر سه عدد مجهول، تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، بهتر است آن‌ها را به صورت ar و a و $\frac{a}{r}$ در نظر بگیریم.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال واسطهٔ هندسی دو عدد ۶ و ۲ را بیابید.

پاسخ واسطهٔ هندسی را b می‌گیریم، پس ۲,b,۶ دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند. داریم: $b^2 = 2\times 6 \Rightarrow b = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

مثال سه عدد $x-1, \sqrt{8}, x+1$ تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند (از چپ به راست). x و قدرنسبت را بیابید. مسئله چند جواب دارد؟

پاسخ

$$(x-1)(x+1) = (\sqrt{8})^2 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow 2, \sqrt{8}, 4 \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{8}}{2} = \dfrac{\sqrt{4\times 2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ x = -3 \Rightarrow -4, \sqrt{8}, -2 \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{8}}{-4} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

مسئله دو جواب دارد.

مثال بین دو عدد ۱۰ و ۳۲۰ چهار واسطهٔ هندسی درج کنید.

پاسخ **روش اول** با توجه به شکل مقابل، $a = 10$ و $t_6 = 320$ است، پس $ar^5 = 320$ و لذا $r^5 = \frac{320}{10} = 32$ بوده و $r = 2$ خواهد بود، بنابراین جمله‌ها به صورت زیر هستند:

$$10 \xrightarrow{\times 2} \boxed{20} \xrightarrow{\times 2} \boxed{40} \xrightarrow{\times 2} \boxed{80} \xrightarrow{\times 2} \boxed{160} \xrightarrow{\times 2} 320$$

روش دوم می‌توانیم از فرمول هم استفاده کنیم. اگر بین a و c (c آخری) n واسطهٔ هندسی درج کنیم، قدرنسبت از $r^{n+1} = \frac{c}{a}$ به دست می‌آید.

مثال اعداد $2^x, 4\sqrt{2}, 2^y$ سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی هستند. واسطهٔ حسابی بین y و x را به دست آورید.

پاسخ

$$2^x, 4\sqrt{2}, 2^y \xrightarrow{\text{تشکیل دنبالهٔ هندسی}} 2^x \times 2^y = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2^{x+y} = 16\times 2 = 32 = 2^5 \Rightarrow x + y = 5$$

واسطهٔ حسابی بین دو عدد y و x همان میانگین آن‌هاست، پس $\frac{x+y}{2} = \frac{5}{2}$ واسطهٔ حسابی y و x خواهد بود.

مثال حاصل‌ضرب سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی برابر ۲۷ است. اگر مجموع جملات اول و دوم برابر ۵ باشد، جملهٔ سوم را به دست آورید.

پاسخ سه جمله را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ (از چپ به راست) در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} (\frac{a}{r})(a)(ar) = 27 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3 \xrightarrow{\text{جملات}} \frac{3}{r}, 3, 3r \\ \frac{3}{r} + 3 = 5 \Rightarrow \frac{3}{r} = 2 \Rightarrow 2r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{2} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جملات}} 2, 3, \underbrace{\frac{9}{2}}_{\text{جملهٔ سوم}}$$

جمع‌بندی نکات دنبالهٔ حسابی و هندسی

	دنبالهٔ حسابی	دنبالهٔ هندسی
جملهٔ عمومی	$t_n = a + (n-1)d$	$t_n = ar^{n-1}$
ارتباط دو جملهٔ متوالی	$t_n - t_{n-1} = d$	$\frac{t_n}{t_{n-1}} = r$
ارتباط هر دو جمله دلخواه	$t_n - t_m = (n-m)d$	$\frac{t_n}{t_m} = r^{n-m}$
سه جملهٔ متوالی a,b,c	$b = \frac{a+c}{2}$	$b^2 = ac$
درج n واسطه بین c : c,a	$d = \frac{c-a}{n+1}$	$r^{n+1} = \frac{c}{a}$
شکل سه جملهٔ متوالی	$x-d, x, x+d$	$\frac{a}{r}, a, ar$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ تشخیص دنبالهٔ هندسی و نوشتن جملهٔ عمومی آن است.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۳۷ تا ۱۴۵ و ۱۶۳ و ۱۶۶ تا ۱۶۹

تیپ۲ مهم‌ترین تیپ دنبالهٔ هندسی است. دو جمله (یا دو معادله) داده می‌شود. با بازکردن آن‌ها با استفاده از جملهٔ عمومی باید a و r را به دست آورید. دستگاه‌ها در این‌جا معمولاً با تقسیم دو معادله حل می‌شوند.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۴۶ تا ۱۵۲

تیپ۳ ارتباط سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی یا درج n واسطهٔ هندسی است.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۵۳ تا ۱۶۲

تیپ۴ مقدار یک کمیت در واحد زمان r درصد افزایش یا کاهش پیدا می‌کند. مقدار کمیت بعد از n واحد زمانی از شما خواسته می‌شود.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۶۴، ۱۶۵ و ۱۷۱

تیپ۵ می‌گوید سه جمله از یک دنبالهٔ حسابی، سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی است. سه جمله مثلاً a_n, a_m, a_p هستند که چون تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند $(a_m)^2 = a_p \times a_n$ اما این سه جمله را با استفاده از جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی باز کرده و ارتباط a و d را پیدا می‌کنیم.

حالاتوحل‌کن سؤال ۱۷۰

سؤال‌های امتحانی

کدام دنباله‌ها هندسی هستند؟ در دنباله‌های هندسی قدرنسبت و جملهٔ عمومی را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۳۷- $2, 6, 18, \ldots$

۱۳۸- $12, -3, \frac{3}{4}, \ldots$

۱۳۹- $5, 10, 30, \ldots$

۱۴۰- $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{2}, \ldots$

۱۴۱- $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \ldots$

۱۴۲- $t_n = n^2 - 2n$

۱۴۳- $t_n = 3^{n+1}$

۱۴۴- $t_n = \frac{2^n}{5}$

۱۴۵- $3, 3, 3, \ldots$

جملهٔ چهارم یک دنبالهٔ هندسی ۱۲ و جملهٔ هفتم آن ۹۶ است. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۴۶- جملهٔ اول این دنباله را مشخص کنید.

۱۴۷- نسبت جملهٔ دهم به جملهٔ چهاردهم دنباله را به دست آورید.

۱۴۸- حاصل $\frac{t_{n+2}}{t_{n-1}}$ را به دست آورید.

۱۴۹- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ دهم برابر ۷۲ و جملهٔ دوازدهم برابر ۲۸۸ است. قدرنسبت و جملهٔ اول را به دست آورید. چند دنبالهٔ هندسی با این شرایط وجود دارد؟ *(مشابه کتاب درسی - برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۵۰- جملهٔ چهارم و جملهٔ هفتم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۱۲۸ و ۸۱۹۲ است. مجموع چهار جملهٔ اول دنباله را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۵۱- مجموع جمله‌های اول و دوم یک دنبالهٔ هندسی (با جمله‌های ناصفر) برابر $\frac{3}{5}$ و مجموع جمله‌های دوم و سوم آن برابر $\frac{6}{5}$ است. دنباله را مشخص کنید.

۱۵۲- در یک دنبالهٔ هندسی (با جمله‌های ناصفر) داریم $t_1 t_3 = 4$ و $(t_2)^2 = 16$. اگر جمله‌های دنباله در حال زیادشدن باشند، دنباله را مشخص کنید.

واسطهٔ هندسی هر جفت از اعداد داده‌شده را بیابید. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۵۳- $3, 27$

۱۵۴- $54, 6$

بین هر جفت از اعداد، به تعداد خواسته‌شده واسطهٔ هندسی درج کنید. *(مشابه کتاب درسی)*

۱۵۵- (چهار واسطه) $\frac{3}{8}$ و $\frac{128}{81}$

۱۵۶- (چهار واسطه) ۳ و ۹۶

۱۵۷- بین دو عدد ۸۱ و ۶۲۵ سه عدد چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند. $(r > 0)$ *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۵۸- عدد m را طوری به دست آورید که اعداد زیر تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند. سپس قدرنسبت دنباله را بیابید. (جمله‌ها از چپ به راست هستند.)
(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

$4m+44, 2m+6, m-6$

۱۵۹- جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی $x+1, x+3, x+6, \ldots$ را بنویسید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۶۰- سه عدد 3^y و $9\sqrt{3}$ و 3^x تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند. واسطهٔ حسابی بین y و x را به دست آورید. (کنکور ریاضی ۸۷)

۱۶۱- حاصل‌ضرب سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی برابر ۲۷ است. جملهٔ وسط این سه جمله را به دست آورید.

۱۶۲- با توجه به رابطهٔ $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$، حاصل‌ضرب بیست جملهٔ اول دنبالهٔ $1, 2, 4, 8, \ldots$ را به دست آورید. (مشابه کتاب درسی)

۱۶۳- اعداد طبیعی را به صورت مقابل دسته‌بندی می‌کنیم:

$\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \ldots$

اولین عدد دستهٔ یازدهم را به دست آورید.

۱۶۴- مساحت مربعی ۴ متر مربع است. در مرحلهٔ اول، نصف مربع را رنگ می‌کنیم.

در مرحلهٔ دوم، نصف قسمت رنگ‌نشده را رنگ می‌کنیم. با ادامهٔ همین روند، در مرحلهٔ ششم چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

۱۶۵- قیمت طلا در سال جاری، گرمی ۱۰۰ هزار تومان است. فرض کنید قیمت طلا بعد از گذشت هر سال، ۱۰ درصد افزایش یابد.
(مشابه کتاب درسی - برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

الف) قیمت طلا بعد از یک سال، دو سال و سه سال چه‌قدر است؟

ب) قیمت طلا در n سال بعد، از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

دنبالهٔ هندسی $t_1, t_2, t_3, \ldots$ داده شده است. در هر مورد مشخص کنید دنبالهٔ جدید هندسی است یا خیر؟

۱۶۶- $2t_1, 2t_2, 2t_3, \ldots$

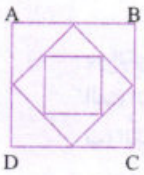
۱۶۷- $t_1+5, t_2+5, t_3+5, \ldots$

۱۶۸- $\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \frac{1}{t_3}, \ldots$

۱۶۹- $t_1^2, t_2^2, t_3^2, \ldots$

۱۷۰- جمله‌های دوم، چهارم و هشتم یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت غیرصفر، جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ هندسی هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی را بیابید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

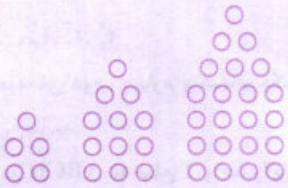
۱۷۱- مربع $ABCD$ به ضلع ۲ واحد را در نظر بگیرید. محیط این مربع را t_1 می‌نامیم. در مرحلهٔ دوم، وسط‌های اضلاع را به هم وصل می‌کنیم. محیط این مربع جدید را t_2 می‌نامیم. با ادامهٔ این روند، محیط مربع ششم چه‌قدر است؟



۱۷۲- در دنباله هندسی a_n، ضرب جملهٔ سوم در جملهٔ هفتم برابر ۸ است. حاصل $(a_5-a_1a_9)(a_5+a_1a_9)$ را به دست آورید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل اول، منتخب سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل اول	رشتهٔ: ریاضی و تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.om	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) $۰/۲ \in (-۲,۳)$ ب) دنبالهٔ $۲\sqrt{۵},۴\sqrt{۵},۶\sqrt{۵},...$ یک دنبالهٔ هندسی است. پ) اگر مجموعهٔ C دارای یک زیرمجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه C حتماً یک مجموعهٔ نامتناهی است. ت) اگر $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه $(\mathbb{Z}-\mathbb{W})'=\mathbb{N}$ است.				۱
۲	جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) $(-\infty,۵]-[-۱,۵]$ مجموعه‌ای است ..... (متناهی یا نامتناهی). ب) حاصل $(\mathbb{Q}-\mathbb{Q}^c)\cup(\mathbb{Q}^c-\mathbb{Q})$ برابر است با مجموعهٔ ..... . پ) متمم مجموعهٔ $[-۲,۱]-\{۰\}$ روی محور اعداد حقیقی به صورت ..... می‌باشد. ت) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $B-A$ مجموعه‌ای ..... است.				۲
۳	اگر حاصل $([-۶,۴)\cap(-\infty,۱])-[۰,۲]$ به صورت بازهٔ $[a,b)$ باشد، حاصل $a-b$ را به دست آورید. (نوشتن مراحل لازم است.)				۱
۴	حاصل متمم $[A'\cap(A'\cup B)]-(A-B)'$، نسبت به مجموعهٔ مرجع را به دست آورید.				۱
۵	در یک مدرسهٔ ۱۲۲نفری، ۸۲ نفر ساعت در دست دارند و ۷۹ نفر عینک می‌زنند و ۵۴ نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت در دست دارند. چند نفر: الف) حداقل یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟ ب) فقط ساعت در دست دارند؟ پ) دقیقاً یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟ ت) نه ساعت می‌بندند و نه عینک می‌زنند؟				۱
۶	فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ مرجع U باشد به طوری که $n(U)=۱۲۰$ ، $n(A)=۷۵$ ، $n(B)=۵۰$ و $n(A\cap B)=۳۵$ مطلوب است: الف) $n(A\cup B)$ ب) $n(A\cap B')$ پ) $n(A'\cap B)$ ت) $n(A'\cap B')$				۲
۷	با توجه به الگوی مقابل تعداد دایره‌ها در شکل یازدهم چه‌قدر است؟ 				۱/۵
۸	در الگوی مقابل: الف) الگوی مربع‌های سیاه را بنویسید. ب) الگوی مربع‌های سفید را بنویسید. پ) وقتی کل مربع‌ها برابر ۱۰۶تا باشد، تعداد مربع‌های سفید چه‌قدر است؟				۱/۵
۹	شش جملهٔ اول از دنبالهٔ بازگشتی با اطلاعات زیر را بنویسید. $F_۱=۱\ ,\ F_۲=۱\ ,\ F_n=F_{n-۱}+F_{n-۲}$				۱
۱۰	برای دنبالهٔ زیر جملهٔ عمومی را بنویسید. $۵,۱۲,۲۲,۳۵,۵۱,...$				۱
۱۱	در یک دنبالهٔ حسابی اگر $a_۵^۲-a_۴^۲=۲۰$ و قدرنسبت ۴ باشد، دنباله را مشخص کنید.				۱
۱۲	واسطهٔ حسابی دو عدد $\sqrt{۸}$ و $\sqrt{۱۲۸}$ چند برابر واسطهٔ مثبت هندسی آن‌هاست؟				۱
۱۳	جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ هندسی $a_n=\frac{۳}{۲\times ۳^n}$ است. قدرنسبت آن را پیدا کنید.				۱
۱۴	در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع معکوس جملات هفتم و نهم برابر ۵ و حاصل‌ضرب جملات پنجم و یازدهم برابر $\frac{۱}{۴}$ می‌باشد. جملهٔ اول و قدرنسبت مثبت دنباله چه‌قدر است؟				۱/۵
۱۵	بین دو عدد ۸۱ و ۶۲۵ سه عدد مثبت چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند.				۱
۱۶	سه عدد تشکیل دنبالهٔ حسابی داده‌اند. اگر مجموع آن‌ها ۱۵ و مجموع مربعاتشان ۱۰۷ باشد، آن سه عدد را بیابید.				۱/۵
	جمع نمرات				۲۰

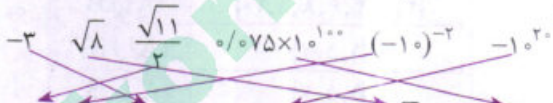
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ سؤال‌های امتحانی

● اگر $A \subseteq B$ باشد $A \cup B = B$ ، $A \cap B = A$ و $A - B = \varnothing$ می‌شود. با توجه به رابطهٔ زیرمجموعه بین مجموعه‌های مهم داریم:

۱- $\mathbb{Z}$ ۲- $\mathbb{N}$
۳- $\mathbb{Q}$ ۴- $\varnothing$
۵- $\mathbb{Q}$ ۶- $\varnothing$
۷- $\mathbb{Z}$ ۸- $\varnothing$
۹- $\mathbb{Q}'$ ۱۰- درست
۱۱- نادرست ۱۲- نادرست
۱۳- درست ۱۴- درست
۱۵- نادرست
۱۶- درست ($\varnothing$ زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست)
۱۷- نادرست $(\frac{\sqrt{5}}{3} < 1)$ ۱۸- نادرست

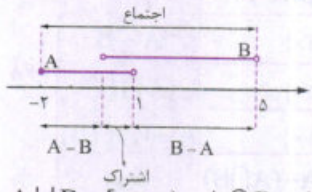
۱۹-



۲۰-

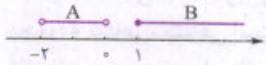
نمایش هندسی و مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
$\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le 2\}$	$(-3,2]$	نیم‌باز
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	$(-1,+\infty)$	باز بی‌کران
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 4\}$	$(-\infty,4]$	نیم‌باز بی‌کران

۲۱-



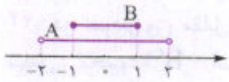
$A \cup B = [-2,5)$, $A \cap B = (0,1)$
$A - B = [-2,0]$, $B - A = [1,5)$

۲۲-



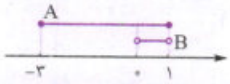
$A \cup B = (-2,0) \cup [1,+\infty)$, $A \cap B = \varnothing$
$A - B = A = (-2,0)$, $B - A = B = [1,+\infty)$

۲۳-



$A \cup B = A = (-2,2)$, $A \cap B = B = [-1,1]$
$A - B = (-2,-1) \cup (1,2)$, $B - A = \varnothing$

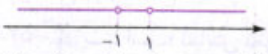
۲۴-



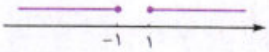
$A \cup B = A = [-3,1]$, $A \cap B = B = (0,1)$
$A - B = [-3,0] \cup \{1\}$, $B - A = \varnothing$

۲۵-

$\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$



$\mathbb{R} - \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$



$\mathbb{R} - (-1,1) = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

از کل $\mathbb{R}$ بازهٔ $(-1,1)$ را حذف می‌کنیم. چون بازه، باز است، ۱ و ۱- حذف نمی‌شوند.

۲۶- نامتناهی ۲۷- متناهی
۲۸- نامتناهی ۲۹- نامتناهی
۳۰- نامتناهی ۳۱- متناهی (برابر $\varnothing$ است)
۳۲- متناهی ۳۳- نامتناهی ($\{4,5,6,\ldots\}$)
۳۴- نامتناهی ۳۵- متناهی

۳۶- $A = \{\ldots,-2,-1,0\}$, $B = \{0,1,2,\ldots\} \Rightarrow A \cap B = \{0\}$

۳۷- $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$
$\Rightarrow A - B = \varnothing$, $B - A = \{\cdots,-2,-1,0\}$

۳۸- درست

۳۹- اشتراک دو مجموعهٔ نامتناهی می‌تواند متناهی هم باشد (*مثل ۳۶*)، پس نادرست است.

۴۰- وقتی مجموعهٔ بزرگ‌تر (یعنی B) متناهی باشد، زیرمجموعه‌های آن نیز متناهی هستند، پس درست است.

۴۱- B همهٔ اعضای A را هم دارد، چون A نامتناهی است، پس B هم نامتناهی می‌شود، پس درست است.

۴۲- ممکن است B نامتناهی هم باشد، پس نادرست است.

۴۳- ممکن است B نامتناهی باشد ولی $B - A$ متناهی شود، پس نادرست است. (*سعی کن برای خودت مثال بزنی.*)

۴۴- $\frac{m-2}{3} \in [2,6)$ یعنی $2 \le \frac{m-2}{3} < 6$. حالا باید محدودهٔ m را به دست آوریم. اول همهٔ عبارت‌ها را در ۳ ضرب می‌کنیم، بعد هم با ۲+ جمع می‌کنیم، ببینید:

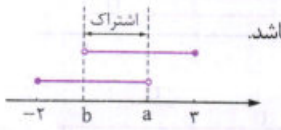
$$2 \le \frac{m-2}{3} < 6 \xrightarrow{\times 3} 6 \le m-2 < 18 \xrightarrow{+2} 8 \le m < 20$$

$\Rightarrow m \in [8,20)$

پس m برابر با اعداد صحیح ۸، ۹، ۱۰، ...، ۱۹ (یعنی ۱۲ عدد صحیح) می‌تواند باشد.

۴۵- به شکل زیر دقت کنید. $a < b$ نمی‌تواند باشد چون اشتراک دو بازه تهی می‌شود. از طرفی $b < -2$ هم نمی‌تواند باشد، چون آن‌وقت اشتراک را از ۲- باید شروع کرد؛ پس چاره‌ای جز این‌که $-2 < b < a$ باشد، نمی‌ماند. شبیه همین استدلال $a < 3$ باید باشد (*اگه $a \ge 3$ باشه، اشتراک تا ۳ میره نه صفر!*) خلاصه این‌که اشتراک دو بازهٔ داده‌شده برابر (b,a) می‌شود؛ پس می‌فهمیم که $a = 0$ و $b = -\frac{2}{3}$ باید باشد.

با جای‌گذاری داریم:



$(a,-b] \cup (-3a,2b+3) = (0,\frac{2}{3}] \cup (0,\frac{5}{3}) = (0,\frac{5}{3})$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

با استفاده از نمودار ون درمی‌یابیم که:

۴۶- U

۴۷- $\varnothing$

۴۸- U (چون $A \subseteq U$)

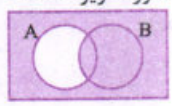
۴۹- A (چون $A \subseteq U$)

۵۰- A'

۵۱- $\varnothing$ (چون هرچی تو A هست تو U هست)

۵۲- $\varnothing' = U - \varnothing = U$

۵۳- نادرست است؛ نمایش نمودار $(A-B)'$ به صورت زیر است:



۵۴- درست است؛ $\{1,2,3,\dots,9\} - \{2,3,5\} = \{1,4,6,7,8,9\}$

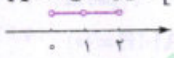
۵۵- درست است؛ $(A-B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$

۵۶- درست است چون $(A-B) \cup (B-A) = 8 + 10 = 18$

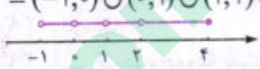
۵۷- $A' = U - A = \{-5,-4,\dots,5\} - \{0,1,2\}$
$= \{-5,-4,-3,-2,-1,3,4,5\}$

۵۸- $A' = U - A = \mathbb{Z} - \{0,1,2\} = \{\dots,-2,-1,3,4,5,\dots\}$

۵۹- $A' = U - A = [0,2] - \{0,1,2\} = (0,1) \cup (1,2)$

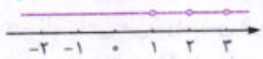


۶۰- $A' = U - A = (-1,4] - \{0,1,2\}$
$= (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup (2,4]$



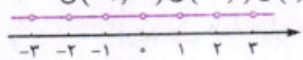
۶۱- $A' = U - A = \mathbb{R} - \{0,1,2\}$
$= (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$

۶۲- $\mathbb{N}' = U - \mathbb{N} = \mathbb{R} - \mathbb{N} = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,3) \cup \dots$



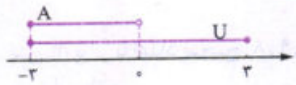
$\mathbb{W}' = U - \mathbb{W} = \mathbb{R} - \mathbb{W} = (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \dots$

$\mathbb{Z}' = U - \mathbb{Z} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$
$= \dots \cup (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2) \cup \dots$



$\mathbb{Q}' = U - \mathbb{Q} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$, $(\mathbb{Q}')'$
$= U - \mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$

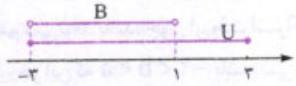
۶۳-



$A = [-3,0)$

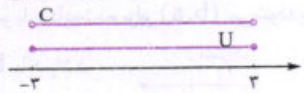
$A' = U - A = [0,3]$ $\quad B' = U - B = \{-3\} \cup [1,3]$

$B = (-3,1)$



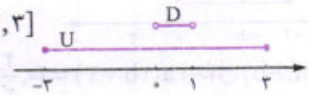
$C' = U - C = \{-3,3\}$ (فقط دوتا عدد می‌شه)

$C = (-3,3)$

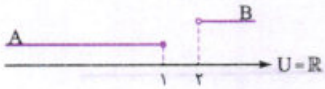


$D' = U - D = [-3,0] \cup [1,3]$

$D = (0,1)$



۶۴-



$A' = (1,+\infty)$, $B' = (-\infty,2]$ (اول A' و B' بعد اشتراک اون‌ها)

$A' \cap B' = (1,+\infty) \cap (-\infty,2] = (1,2]$

$(A \cap B)' = (\varnothing)' = \mathbb{R} - \varnothing = \mathbb{R}$ (اول $A \cap B$ بعد متمم)

$A - B = A \Rightarrow (A-B)' = A' = (1,+\infty)$

$A = \{2,4,6,8,10\}$ و $B = \{3,6,9\}$. توجه دارید که A و B باید زیرمجموعهٔ مجموعهٔ مرجع باشند.

۶۵-

A	$\{2,4,6,8,10\}$
A'	$\{1,3,5,7,9\}$
$(A')'$	$\{2,4,6,8,10\}$
نتیجه	$(A')' = A$

۶۶-

A'	$\{1,3,5,7,9\}$
B'	$\{1,2,4,5,7,8,10\}$
$A \cup B$	$\{2,3,4,6,8,9,10\}$
$(A \cup B)'$	$\{1,5,7\}$
$A' \cap B'$	$\{1,5,7\}$
نتیجه	$(A \cup B)' = A' \cap B'$

۶۷-

A'	$\{1,3,5,7,9\}$
B'	$\{1,2,4,5,7,8,10\}$
$A \cap B$	$\{6\}$
$(A \cap B)'$	$\{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$
$A' \cup B'$	$\{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$
نتیجه	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

۶۸-

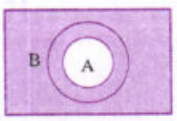
B'	$\{1,2,4,5,7,8,10\}$
$A - B$	$\{2,4,8,10\}$
$A \cap B'$	$\{2,4,8,10\}$
$A - (A \cap B)$	$\{2,4,8,10\}$
نتیجه	$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$

۶۹- بستگی به مجموعهٔ مرجع دارد. اگر U نامتناهی باشد، متمم مجموعهٔ متناهی، نامتناهی می‌شود، اما اگر U متناهی باشد، متمم مجموعهٔ متناهی، متناهی است، پس در حالت کلی نادرست است.

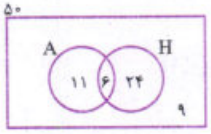
۷۰- با توجه به توضیحات الف درست است.

۷۱- نادرست است. ممکن است A و A' هر دو نامتناهی باشند. مثلاً اگر $U = \mathbb{Z}$ و $A = \mathbb{N}$ باشد، A' هم نامتناهی است.

۷۲- در نمودار ون مقابل، $A \subseteq B$ است. A' شامل مجموعهٔ B' است، پس $B' \subseteq A'$ درست خواهد بود.



۷۳- الف) $n(A \cup H) = n(A) + n(H) - n(A \cap H)$
$= 17 + 30 - 6 = 41$ (دارای ABS یا هیدرولیک)

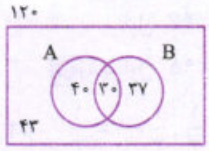


بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

ب) ماشین‌هایی که نه ترمز ABS و نه فرمان هیدرولیک دارند.

$= n((A\cup H)') = n(U) - n(A\cup H) = ۵۰ - ۴۱ = ۹$

۷۴- عضو شبکهٔ A یا شبکهٔ B هستند. $۱۲۰ - ۴۳ = ۷۷$

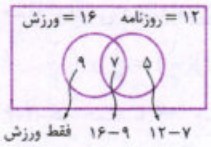


$\Rightarrow \underbrace{n(A\cup B)}_{۷۷}$

$= \underbrace{n(A)}_{۷۰} + n(B) - \underbrace{n(A\cap B)}_{۳۰}$

$\Rightarrow n(B) = ۳۷$

۷۵-



روزنامه یا ورزش $۹ + ۷ + ۵ = ۲۱$

نه روزنامه و نه ورزش $۳۹ - ۲۱ = ۱۸$

۷۶- $n(R) = ۱۲ \ , \ n(F) = ۹ \ , \ n(R\cap F) = ۳$

$\Rightarrow n(R\cup F) = \overbrace{n(R)}^{۱۲} + \overbrace{n(F)}^{۹} - \overbrace{n(R\cap F)}^{۳} = ۱۸$

بنابراین ۱۸ نفر عضو حداقل یکی از تیم‌ها هستند. ۷۵ نفر هم عضو هیچ تیمی نیستند، پس $۷۵ + ۱۸ = ۹۳$ نفر، تعداد دانش‌آموزان این مدرسه خواهد بود.

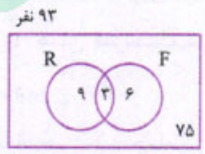
۷۷- $n(\text{فقط ریاضی}) = n(R - F) = n(R) - n(R\cap F)$

$= ۱۲ - ۳ = ۹$

۷۸- $n(\text{فقط فیزیک}) = n(F - R) = n(F) - n(F\cap R)$

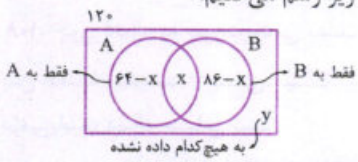
$= ۹ - ۳ = ۶$

۷۹- $۹ + ۶ = ۱۵$ نفر، عضو فقط یکی از تیم‌ها هستند.



۸۰- $n(R') = n(U) - n(R) = ۹۳ - ۱۲ = ۸۱$

۸۱- نمودار ون را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



$۶۴ - x + ۸۶ - x = y \Rightarrow ۱۵۰ - ۲x = y$

$۶۴ - \cancel{x} + \cancel{x} + ۸۶ - x + y = ۱۲۰$

$\Rightarrow ۱۵۰ - x + ۱۵۰ - ۲x = ۱۲۰ \Rightarrow ۳۰۰ - ۳x = ۱۲۰$

$\Rightarrow ۱۸۰ = ۳x \Rightarrow x = ۶۰$

تعداد $۶۴ - ۶۰ = ۴$ پویانمایی فقط به داور A داده شده است.

۸۲- ابتدا داریم:

$$\begin{cases} n(A') = ۲۳ \Rightarrow \overbrace{n(U)}^{۱۰۰} - n(A) = ۲۳ \Rightarrow n(A) = ۷۷ \\ n(A - B) = n(A) - n(A\cap B) \\ \Rightarrow ۴۵ = ۷۷ - n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B) = ۳۲ \end{cases}$$

$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

$= ۷۷ + ۳۲ - ۳۲ = ۷۷$

۸۳- $n(A\cap B') = n(A - B) = ۴۵$

۸۴- $n((A\cup B)') = n(U) - n(A\cup B) = ۱۰۰ - ۷۷ = ۲۳$

۸۵- تعداد پاره‌خط‌ها:

خطی $a_۱ = ۳, a_۲ = ۳\times۲, a_۳ = ۳\times۳ \ldots \Rightarrow a_n = ۳n$

۸۶- تعداد مربع‌ها:

غیرخطی $a_۱ = ۱, a_۲ = ۲\times۱ = ۲, a_۳ = ۲\times۲ = ۴ = ۲^۲$

$, a_۴ = ۲\times۲^۲ = ۲^۳, \ldots \Rightarrow a_n = ۲^{n-۱}$

۸۷- تعداد چوب‌کبریت‌ها:

خطی $a_۱ = ۲ \ , \ a_۲ = ۲ + ۱(۳) = ۵ \ , \ a_۳ = ۲ + ۲(۳)$

$a_۴ = ۲ + ۳(۳), \ldots \Rightarrow a_n = \underbrace{۲ + (n-۱)(۳)}_{۳n-۱}$

۸۸- تعداد مربع‌های رنگی:

خطی $a_۱ = ۲^۲, a_۲ = ۳^۲ - ۱^۲, a_۳ = ۴^۲ - ۲^۲, \ldots$

$\Rightarrow a_n = (n+۱)^۲ - (n-۱)^۲ = ۴n$

۸۹- تعداد آجرها:

غیرخطی $a_۱ = ۱, a_۲ = ۱+۲, a_۳ = ۱+۲+۳, a_۴ = ۱+۲+۳+۴, \ldots$

$\Rightarrow a_n = ۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

۹۰- تعداد مهره‌ها:

غیرخطی $a_۱ = ۱ + ۴(۱) \ , \ a_۲ = ۴ + ۴(۲) \ , \ a_۳ = ۹ + ۴(۳), \ldots$

$\Rightarrow a_n = n^۲ + ۴(n)$

۹۱- تعداد پاره‌خط‌ها: $a_۱ = ۱, a_۲ = ۴\times۱ = ۴^۱, a_۳ = ۴\times۴ = ۴^۲$

$a_۴ = ۴^۲\times۴ = ۴^۳, \ldots$

می‌بینید که در هر مرحله هر پاره‌خط تبدیل به ۴ پاره‌خط می‌شود $(a_n = ۴a_{n-۱})$؛ پس جملهٔ عمومی الگو $a_n = ۴^{n-۱}$ می‌شود *(توان ۴ یکی از شمارهٔ جمله کوچک‌تره!)* الگو غیرخطی است.

۹۲- تعداد دایره‌ها:

(خطی) $a_۱ = ۱ + ۲\times۳, a_۲ = ۲ + ۴\times۳, a_۳ = ۲ + ۶\times۳, \ldots$

$\Rightarrow a_n = ۲ + (۲n)(۳) = ۶n + ۲$

۹۳- تعداد مربع‌های رنگی:

(خطی) $a_۱ = ۸, a_۲ = ۸ + ۵, a_۳ = ۸ + ۲\times۵, \ldots$

$\Rightarrow a_n = ۸ + (n-۱)(۵) = ۵n + ۳$

۹۴- تعداد مربع‌های رنگی:

(غیرخطی) $a_۱ = ۳^۲ - ۳ - ۲, a_۲ = ۴^۲ - ۴ - ۲, a_۳ = ۵^۲ - ۵ - ۲, \ldots$

$\Rightarrow a_n = n^۲ - n - ۲$

دقت کنید در کل $n^۲$ مربع واحد در جدول داریم، اما nتا روی قطر و دوتا در گوشهٔ بالا را باید حذف کنیم.

۹۵- تعداد پاره‌خط‌ها:

(خطی) $a_۱ = ۶, a_۲ = ۶ + ۵, a_۳ = ۶ + ۲\times۵, \ldots$

$\Rightarrow a_n = ۶ + (n-۱)(۵) = ۵n + ۱$

۹۶- $c_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} c_۴ = ۱۷ \Rightarrow ۴a + b = ۱۷ \\ c_{۱۰} = ۳۵ \Rightarrow ۱۰a + b = ۳۵ \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۶a = ۱۸ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow b = ۵$

$\Rightarrow c_n = ۳n + ۵ \Rightarrow c_{۲۰} = ۳(۲۰) + ۵ = ۶۵$

۹۷- با توجه به توضیحات متن درس $۵ \ , \ ۱۱ \ , \ ۲۳ \ , \ ۴۱, \ldots$

$+۶ \quad +۱۲ \quad +۱۸$

$+۶ \quad +۶$

جملهٔ عمومی این دنباله را می‌توانیم به صورت درجه‌دوم $a_n = an^۲ + bn + c$ بنویسیم. دنبالهٔ تفاضلات یعنی $۶, ۱۲, ۱۸, \ldots$ دارد ۶تا ۶تا اضافه می‌شود؛ پس $a = \frac{۶}{۲} = ۳$ می‌شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

تا این‌جا $a_n = 3n^2 + bn + c$ می‌شود. حالا با جای‌گذاری دو جملهٔ اول دنباله، c و b را نیز به دست می‌آوریم:

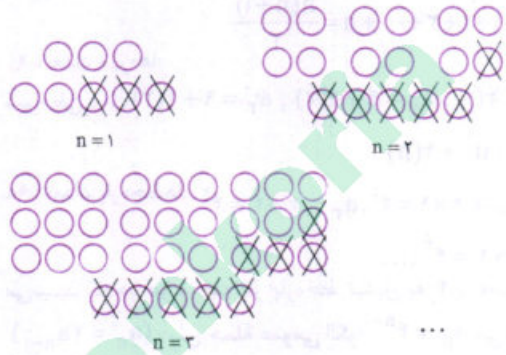
$$\begin{cases} n=1 \Rightarrow 5 = 3+b+c \Rightarrow b+c=2 \\ n=2 \Rightarrow 11 = 12+2b+c \Rightarrow 2b+c=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b=-3, c=5$$

پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت $a_n = 3n^2 - 3n + 5$ درمی‌آید.

می‌توانیم شبیه مثالی که در پلهٔ سوم گفتیم $3n^2 - 3n = 3(n^2 - n)$ را بسازیم ولی این‌جا می‌خواهم جور دیگری عمل کنم.

من می‌گویم $3n^2 + 5$ را بسازیم، بعد $3n$ تا از آن کم کنیم. یعنی در مرحلهٔ اول $3(1)^2 + 5$ دایره بگذاریم، بعد $3(1)$ آن را خط بزنیم. در مرحلهٔ دوم $3(2)^2 + 5$ دایره بگذاریم، بعد $3(2)$ آن را خط بزنیم.



همین‌جوری تعداد دایره‌های باقی‌مانده در هر مرحله دارای الگوی $a_n = 3n^2 + 5 - 3n$ می‌شود.

-۹۸

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \Rightarrow a_2 - a_1 = 7 \Rightarrow a_2 = a_1 + 7 = -1+7 = 6 \\ n=2 \Rightarrow a_3 - a_2 = 7 \Rightarrow a_3 = a_2 + 7 = 6+7 = 13 \\ n=3 \Rightarrow a_4 - a_3 = 7 \Rightarrow a_4 = a_3 + 7 = 13+7 = 20 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow -1 \xrightarrow{+7} 6 \xrightarrow{+7} 13 \xrightarrow{+7} 20, \ldots$$

در درس بعد چنین دنباله‌های خطی را دنبالهٔ حسابی می‌نامیم. شکل بازگشتی دنباله‌های حسابی، به صورت $a_{n+1} - a_n = d$ است که d عدد ثابتی است.

-۹۹

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \Rightarrow b_2 = 3b_1 = 3\times 2 \\ n=2 \Rightarrow b_3 = 3b_2 = 3\times 3\times 2 = 2\times 3^2 \\ n=3 \Rightarrow b_4 = 3b_3 = 3\times 2\times 3^2 = 2\times 3^3 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{\times 3} 54, \ldots$$

در درس بعدی چنین دنباله‌هایی را دنبالهٔ هندسی می‌نامیم.

-۱۰۰

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \Rightarrow c_3 = c_2 + c_1 = 1+1 = 2 \\ n=2 \Rightarrow c_4 = c_3 + c_2 = 2+1 = 3 \\ n=3 \Rightarrow c_5 = c_4 + c_3 = 3+2 = 5 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

هر جمله، جمع دو جملهٔ قبلی است. این دنباله، دنبالهٔ فیبوناتچی نامیده می‌شود.

-۱۰۱ دقت کنید که جملهٔ شمارهٔ $2n$ داده شده، چون a_8 را می‌خواهیم پس $2n = 8$؛ یعنی باید $n = 4$ قرار دهیم:

$$n=4 \Rightarrow a_8 = \frac{1}{4\times 4^2} = \frac{1}{64}$$

-۱۰۲

$n=1 \Rightarrow a_2 = 1 + 2a_1 = 1 + 2(2) = 5$ اول

$n=2 \Rightarrow a_3 = 1 + 2a_2 = 1 + 2(5) = 11$ اول

$n=3 \Rightarrow a_4 = 1 + 2a_3 = 1 + 2(11) = 23$ اول

$n=4 \Rightarrow a_5 = 1 + 2a_4 = 1 + 2(23) = 47$ اول

$n=5 \Rightarrow a_6 = 1 + 2a_5 = 1 + 2(47) = 95$ غیر اول ✓

-۱۰۳ $\frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3}, \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}, \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}, \ldots$ پس هر جمله با $\frac{1}{3}$ جمع شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید. دنباله حسابی است و $d = \frac{1}{3}$.

جملهٔ عمومی دنباله می‌شود:

$$t_n = a + (n-1)d \Rightarrow t_n = 1 + (n-1)(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}n + \frac{2}{3}$$

-۱۰۴ هر جمله با -3 جمع شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید، پس دنباله حسابی بوده و $d = -3$ جملهٔ عمومی آن برابر است با:

$$t_n = a + (n-1)d \Rightarrow t_n = -4 + (n-1)(-3) = -3n - 1$$

-۱۰۵ $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{-4}{10}, \frac{1}{10} - \frac{1}{50} = \frac{-4}{50}, \ldots$ پس اختلاف هر دو جمله، ثابت نبوده و دنباله حسابی نیست.

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\frac{-4}{10}} \frac{1}{10} \xrightarrow{\frac{-4}{50}} \frac{1}{50}, \ldots$$

-۱۰۶ هر جمله با عدد ثابت a جمع شده و جملهٔ بعدی به دست می‌آید، پس $d = a$. جملهٔ عمومی:

$$t_n = a + (n-1)d = a + (n-1)(a) = an$$

-۱۰۷ جملهٔ عمومی دنباله‌های حسابی به صورت خطی است. ضریب n همان قدرنسبت دنباله است، پس دنبالهٔ $a_n = \frac{n}{2} - 1$ حسابی بوده و $d = \frac{1}{2}$.

با امتحان چند جمله نیز درمی‌یابیم که:

$$-\frac{1}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 0 \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 1, \ldots$$

-۱۰۸ چون دنباله به صورت خطی نیست (درجه نسبت n برابر ۲)، پس دنبالهٔ داده‌شده حسابی نیست. با امتحان چند جمله نیز درمی‌یابیم، دنباله حسابی نیست.

$$b_1 = 3,\ b_2 = 9,\ b_3 = 17 \Rightarrow 3, 9, 17, \ldots$$

-۱۰۹

$$t_n = a + (n-1)d \Rightarrow t_n = -3 + (n-1)(5) = 5n - 8$$

$$\Rightarrow 5n - 8 = 57 \Rightarrow n = 13$$ جملهٔ سیزدهم

-۱۱۰

$$\begin{cases} t_2 = -2 \Rightarrow a + d = -2 \\ t_5 = \frac{5}{2} \Rightarrow a + 4d = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - d = 2 \\ a + 4d = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$3d = \frac{9}{2} \Rightarrow d = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{7}{2} \xrightarrow{-\frac{3}{2}} -2 \xrightarrow{+\frac{3}{2}} -\frac{1}{2} \xrightarrow{+\frac{3}{2}} 1 \xrightarrow{+\frac{3}{2}} \frac{5}{2}$$

-۱۱۱

$$\begin{cases} t_7 = 16 \Rightarrow a + 6d = 16 \\ t_{11} = 28 \Rightarrow a + 10d = 28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a - 6d = -16 \\ a + 10d = 28 \end{cases} \Rightarrow -2 \xrightarrow{+3} 1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7, \ldots$$

$$4d = 12 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a = -2$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۱۲- الف)

$a_3 = 20 \Rightarrow a_1 + 2d = 20$

$a_7 = 56 \Rightarrow a_1 + 6d = 56 \xrightarrow{\text{کم}} 4d = 36 \Rightarrow d = 9$

$\Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$

$= 2 + (n-1)(9) = 9n - 7$

ب) $9n - 7 = 497 \Rightarrow 9n = 504 \Rightarrow n = 56$

۱۱۳-

$$\begin{cases} t_4 = 2 \Rightarrow a + 3d = 2 \\ t_7 = 5 \Rightarrow a + 6d = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - 3d = -2 \\ a + 6d = 5 \end{cases} \Rightarrow -1, 0, 1, 2, \ldots$$

$3d = 3 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow a = -1$

۱۱۴- مجموع پنج جملهٔ اول

$= t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$

۱۱۵- مجموع پنج جملهٔ دوم

$= t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$

۱۱۶- مجموع پنج جملهٔ دوم

$= t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}$

$= (a + 5d) + (a + 6d) + (a + 7d) + (a + 8d) + (a + 9d)$

$= 5a + 35d$

۱۱۷-

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 20 \Rightarrow \overbrace{a + a + d}^{2a+d} = 20 \\ t_9 + t_{10} = 52 \Rightarrow \underbrace{a + 8d + a + 9d}_{2a+17d} = 52 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a - d = -20 \\ 2a + 17d = 52 \end{cases}$$

$16d = 32 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a = 9$

$\Rightarrow t_n = a + (n-1)d = 9 + (n-1)(2) = 2n + 7$

۱۱۸-

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 25$

$\underbrace{t_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10}}_{\text{مجموع ۵ جملهٔ دوم (بعدی)}} = 75$

$\Rightarrow \overbrace{a + a + d + a + 2d + a + 3d + a + 4d}^{5a+10d} = 25$

$\Rightarrow a + 5d + a + 6d + a + 7d + a + 8d + a + 9d = 75$

حل دستگاه:

$$\begin{cases} -5a - 10d = -25 \\ 5a + 35d = 75 \end{cases}$$

$25d = 50 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a = 1$

بنابراین دنباله به صورت $1, 3, 5, 7, \ldots$ خواهد بود.

۱۱۹- عددی بر ۶ بخش‌پذیر است که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد. اولین این اعداد ۱۰۲ و آخرین آن‌ها ۱۹۸ است. کافی است تعداد اعداد $102, 108, 114, \ldots, 198$ را به دست آوریم. جملهٔ عمومی دنباله را می‌نویسیم:

$t_n = a + (n-1)d \Rightarrow t_n = 102 + (n-1)(6) = 6n + 96$

$\xrightarrow{\text{باید دید آخرین جمله، جملهٔ چندمه}} 6n + 96 = 198 \Rightarrow n = 17$

۱۷ عددِ مضرب ۶، بین ۱۰۰ تا ۲۰۰ وجود دارد.

اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ حسابی باشند، $\frac{a+c}{2} = b$ خواهد بود.

۱۲۰- $\frac{2x - 1 + x - 4}{2} = x \Rightarrow 3x - 5 = 2x$

$\Rightarrow x = 5 \xrightarrow{\text{دنباله}} 9, 5, 1 \Rightarrow d = -4$

۱۲۱- $\frac{2x + 1 + 3x + 3}{2} = 2x - 4 \Rightarrow 5x + 4 = 4x - 8$

$\Rightarrow x = -12 \xrightarrow{\text{دنباله}} -23, -28, -33 \Rightarrow d = -5$

تذکر اگر دنباله را از راست به چپ در نظر بگیریم، قدرنسبت‌ها به ترتیب ۴ و ۵ خواهند بود.

۱۲۲-

$$-8 \underbrace{\square\ \square \cdots \square}_{\text{۹ واسطه}} 22 \Rightarrow \begin{cases} a = -8 \\ a_{11} = 22 \Rightarrow a + 10d = 22 \end{cases}$$

$\Rightarrow 10d = 30 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow -8, -5, -2, \ldots, 19, 22$

۱۲۳- از فرمول تعداد واسطه‌ها داریم:

$d = \frac{c - a}{n + 1} \Rightarrow 1 = \frac{\sqrt{3} + 5 - (\sqrt{3} - 5)}{n + 1} = \frac{10}{n + 1}$

$\Rightarrow n + 1 = 10 \Rightarrow n = 9$

۱۲۴- دنبالهٔ حسابی: $a, a + d, a + 2d, \ldots$

$\Rightarrow$ دنبالهٔ جدید: $2a, 2a + 2d, 2a + 4d, \ldots$

دنبالهٔ جدید حسابی بوده و جملهٔ اول و قدرنسبت دنبالهٔ جدید هم دو برابر قبلی می‌شود.

۱۲۵- دنبالهٔ حسابی: $a, a + d, a + 2d, \ldots$

$\Rightarrow$ دنبالهٔ جدید: $a + k \xrightarrow{+d} a + d + k \xrightarrow{+d} a + 2d + k, \ldots$

دنبالهٔ جدید هم حسابی است. قدرنسبت دنبالهٔ جدید تغییری نمی‌کند و فقط جملهٔ اول، k واحد بیشتر می‌شود.

۱۲۶-

ارتفاع شمع در ابتدا	$t_n = 24/8 + (n-1)(-0/2)$
پس از یک دقیقه	$t_1 = 24/8$
پس از دو دقیقه	$t_2 = 24/6$
...	...
پس از n دقیقه	$t_n = 24/8 + (n-1)(-0/2)$

$-0/2$

پس از ۸۵ دقیقه $t_n = 8 \Rightarrow 24/8 + (n-1)(-0/2) = 8$

$\Rightarrow -0/2n = -17 \Rightarrow n = 85$

۱۲۷- الف) $t_1 = 4\ ,\ t_2 = 6\ ,\ t_3 = 8$

$\Rightarrow t_n = a + (n-1)d = 4 + (n-1)(2) = 2n + 2$

$\Rightarrow t_{10} = 2(10) + 2 = 22$

ب) کافی است جمع جمله‌های اول تا سی‌ام را بیابیم.

$t_1 + t_2 + \cdots + t_{30}$

$= a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + 29d)$

$= 30a + (1 + 2 + \cdots + 29)d$

$= 30a + \frac{29 \times 30}{2}d = 30a + 435d \xrightarrow[d=2]{a=4}$

مجموع $= 120 + 870 = 990$

۱۲۸- جملهٔ عمومی دنباله‌های حسابی به صورت خطی است. به عبارت دیگر جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی، یک چندجمله‌ای درجه‌اول برحسب n است. باید کاری کنیم تا n^2 از بین برود، پس $a - 2 = 0$ و لذا $a = 2$ است. جملهٔ عمومی $t_n = 2n - 3$ است. حالا $t_{10} = 2(10) - 3 = 17$.

۱۲۹-

$$\begin{cases} t_2 + t_5 + t_6 = 8t_2 \\ t_7 = 2t_4 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + d + a + 4d + a + 5d = 8(a + d) \\ a + 6d = 2(a + 3d) - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5a + 2d = 0 \\ -a = -2 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{دربالا}} d = 5$$

$\xrightarrow{\text{دنبالهٔ حسابی}} 2, 7, 12, 17, \ldots$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۳۰- $t_n < ۰ \Rightarrow ۷n - ۷۱ < ۰ \Rightarrow n < \frac{۷۱}{۷} = ۱۰/\cdots$

$\Rightarrow n = ۱,۲,\ldots,۱۰$

جمله‌های اول تا دهم منفی هستند، یعنی دنباله، ده جملهٔ منفی دارد.

۱۳۱- طبق توضیحات پلهٔ سوم، اعداد را به صورت $x-d, x, x+d$ در نظر می‌گیریم. $x-d+x+x+d=۲۱ \Rightarrow x=۷ \Rightarrow$

اعداد: $۷-d, ۷, ۷+d \Rightarrow (۷-d)^۲+۷^۲+(۷+d)^۲=۲۱۹$

$\Rightarrow ۴۹-۱۴d+d^۲+۴۹+۴۹+۱۴d+d^۲=۲۱۹$

$\Rightarrow ۲d^۲=۷۲ \Rightarrow d^۲=۳۶ \Rightarrow d=\pm ۶ \xrightarrow{\text{اعداد}} ۱,۷,۱۳$

۱۳۲- شبیه مسئلهٔ قبل داریم:

$x-d+x+x+d=۳۳ \Rightarrow x=۱۱ \Rightarrow$ اعداد: $۱۱-d, ۱۱, ۱۱+d$

$\Rightarrow \underbrace{(۱۱-d)(۱۱)(۱۱+d)}_{\text{مزدوج}}=۱۲۸۷ \xrightarrow{\div ۱۱} ۱۲۱-d^۲=۱۱۷$

$\Rightarrow d^۲=۴ \Rightarrow d=\pm ۲ \xrightarrow{\text{اعداد}} ۹,۱۱,۱۳$

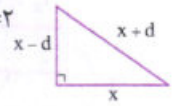
۱۳۳- شبیه دو مسئلهٔ قبل، اضلاع را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم:

محیط: $x-d+x+x+d=۲۴ \Rightarrow x=۸ \Rightarrow$ اضلاع: $۸-d, ۸, ۸+d$

$\xrightarrow{\text{رابطهٔ فیثاغورس}} (۸-d)^۲+۸^۲=(۸+d)^۲$

$\Rightarrow ۶۴-۱۶d+d^۲+۶۴=۶۴+۱۶d+d^۲ \Rightarrow d=۲$

اضلاع: $۶,۸,۱۰ \Rightarrow$ وتر $=۱۰$



۱۳۴- برای این‌که تعداد مجهول‌های مسئله کم‌تر باشد، اعداد را به صورت $x-۲d, x-d, x, x+d, x+۲d$ در نظر می‌گیریم:

$x-۲d+x-d+x+x+d+x+۲d=۱۵ \Rightarrow ۵x=۱۵$

$\Rightarrow x=۳ \Rightarrow$ اعداد: $۳-۲d, ۳-d, ۳, ۳+d, ۳+۲d$

$\Rightarrow (۳-۲d)^۲+(۳-d)^۲+۳^۲+(۳+d)^۲+(۳+۲d)^۲=۸۵$

$\Rightarrow ۹-۱۲d+۴d^۲+۹-۶d+d^۲+۹+۹+۶d+d^۲+۹+۱۲d+۴d^۲$
$=۸۵$

$\Rightarrow ۱۰d^۲=۴۰ \Rightarrow d^۲=۴ \Rightarrow d=\pm ۲ \Rightarrow$ اعداد: $-۱,۱,۳,۵,۷$

۱۳۵- دنبالهٔ حسابی را به صورت $a, a+d, \ldots$ در نظر می‌گیریم.

جملهٔ دهم این دنباله می‌شود: $t_{۱۰}=a+۹d$

جملهٔ دهم دنبالهٔ جدید نیز می‌شود: $b_{۱۰}=a-۳+۹(d+۲)$

حالا: $b_{۱۰}-t_{۱۰}=a-۳+۹d+۱۸-a-۹d=۱۵$

یعنی جملهٔ دهم دنبالهٔ جدید، ۱۵ واحد بیشتر از جملهٔ دهم دنبالهٔ اولیه است.

۱۳۶- قبل از این‌که سؤال را حل کنیم، یک نکته را با هم بررسی کنیم: بین جمله‌های دنبالهٔ حسابی، رابطه‌های خاصی وجود دارد.

مثلاً دنبالهٔ حسابی به صورت $۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳,۱۵,۱۷,۱۹$ را در نظر بگیرید. $t_۱+t_۹=۱۸$، از طرفی $t_۳+t_۷=۱۸$. حالا به جمع اندیس‌ها توجه کنید.

جمع اندیس‌ها برابر ۱۰ است. اگر جمع اندیس‌ها با هم برابر باشند، جمع خود جمله‌ها نیز برابر می‌شود. مثلاً در هر دنبالهٔ حسابی؛ چون جمع اندیس‌ها در هر جمع دوتایی برابر ۱۰ است، داریم:

$t_۱+t_۹=t_۲+t_۸=t_۳+t_۷=t_۴+t_۶=t_۵+t_۵$

$m,n,p,k \in \mathbb{N}\ ,\ m+n=p+k \Rightarrow t_m+t_n=t_p+t_k$

نکته

توجه دارید که همهٔ اندیس‌ها مثبت هستند. تذکر بسیار مهم این‌که $t_۳+t_۷ \neq t_{۱۰}$ *(اندیس‌ها رو جمع نکنی بذاری، دوتا این‌ور و دوتا اون‌ور).*

برسیم به حل سؤال! یک معادله بیشتر نداریم. معمولاً در این مواقع، پای رابطهٔ اندیسی در میان است. طبق این رابطه $t_۱+t_{۱۱}=t_۲+t_{۱۰}=\cdots=t_۶+t_۶$،

پس: $t_۱+t_۲+t_۳+t_۴+t_۵+t_۶+t_۷+t_۸+t_۹+t_{۱۰}+t_{۱۱}$

$t_۴+t_۸$

$t_۴+t_۸$

$=۵(t_۴+t_۸)+t_۶=۵(۲۰)+t_۶=۱۰۰+۱۰=۱۱۰$

توجه دارید که $t_۴+t_۸=t_۶+t_۶$، پس $۲۰=۲t_۶$ و $۱۰=t_۶$.

۱۳۷- $۲ \xrightarrow{\times ۳} ۶ \xrightarrow{\times ۳} ۱۸, \ldots \xrightarrow[\text{است } r=۳]{\text{دنباله هندسی و}} t_n=ar^{n-۱}$

$\Rightarrow t_n=۲\times ۳^{n-۱}$

۱۳۸- $۱۲ \xrightarrow{\times(-\frac{۱}{۴})} -۳ \xrightarrow{\times(-\frac{۱}{۴})} \frac{۳}{۴}, \ldots \xrightarrow[\text{است } r=-\frac{۱}{۴}]{\text{دنباله هندسی و}} t_n=ar^{n-۱}$

$\Rightarrow t_n=۱۲(-\frac{۱}{۴})^{n-۱}$

۱۳۹- عددی که در هر جمله ضرب می‌شود، ثابت نیست پس دنباله هندسی نیست. پ) $۵ \xrightarrow{\times ۲} ۱۰ \xrightarrow{\times ۳} ۳۰, \ldots$

۱۴۰- $\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۱}{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}=\sqrt{۲}, \frac{t_۳}{t_۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۱}=\sqrt{۲} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}} \xrightarrow{\times\sqrt{۲}} ۱ \xrightarrow{\times\sqrt{۲}} \sqrt{۲}, \ldots$

$\xrightarrow[\text{با قدرنسبت } \sqrt{۲}]{\text{دنباله هندسی}} t_n=ar^{n-۱}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\sqrt{۲})^{n-۱}=\sqrt{۲}^{n-۲}$

۱۴۱- $\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۴}, \frac{t_۳}{t_۲}=\frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۳}{۴}$

$\Rightarrow \frac{۲}{۳} \xrightarrow{\times\frac{۳}{۴}} \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\times\frac{۳}{۴}} \frac{۳}{۸}, \ldots \xrightarrow[\text{با قدرنسبت } \frac{۳}{۴}]{\text{دنباله هندسی}} t_n=ar^{n-۱}=\frac{۲}{۳}(\frac{۳}{۴})^{n-۱}$

۱۴۲- جملهٔ عمومی دنباله‌های هندسی به صورت $t_n=ar^{n-۱}$ است، مانند نمونه‌هایی که در بالا به دست آوردیم. دنبالهٔ $t_n=n^۲-۲n$ هندسی نیست. با امتحان چند جملهٔ اول نیز درمی‌یابیم عددی که در هر جمله ضرب می‌شود ثابت نیست.

$-۱ \xrightarrow{\times(۰)} ۰ \xrightarrow{\times(?)} ۳, \ldots$

۱۴۳- دنبالهٔ داده‌شده به صورت جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی است. جمله‌های دنباله عبارت‌اند از: $۹,۲۷,۸۱,۲۴۳,\ldots$

پس $a=۹$ و $r=۳$ خواهد بود.

۱۴۴- دنبالهٔ داده‌شده به صورت جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی است. جمله‌های دنباله عبارت‌اند از: $\frac{۲}{۵}, \frac{۴}{۵}, \frac{۸}{۵}, \ldots$

پس $a=\frac{۲}{۵}$ و $r=۲$ خواهد بود.

۱۴۵- واضح است که دنباله هندسی با قدرنسبت یک است. جملهٔ عمومی این دنباله $t_n=۳(۱)^{n-۱}=۳$ است. دنباله‌هایی که تمام جملات آن برابر با عدد ثابتی باشد، دنبالهٔ ثابت می‌نامیم. دنباله‌های ثابت هم هندسی و هم حسابی هستند؛ هندسی با قدرنسبت $r=۱$ و حسابی با قدرنسبت $d=۰$.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۴۶- $\begin{cases} t_4 = 12 \Rightarrow ar^3 = 12 \\ t_7 = 96 \Rightarrow ar^6 = 96 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{96}{12}$

$\Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a(2)^3 = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

۱۴۷- $\frac{t_{10}}{t_{14}} = \frac{ar^9}{ar^{13}} = \frac{1}{r^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

۱۴۸- $\frac{t_{n+2}}{t_{n-1}} = \frac{ar^{n+2-1}}{ar^{n-1-1}} = \frac{r^{n+1}}{r^{n-2}} = r^{n+1-(n-2)} = r^3 = 8$

توجه دارید اندیس‌های صورت و مخرج، ۳ واحد اختلاف داشتند.

۱۴۹- $\begin{cases} t_{10} = 72 \Rightarrow ar^9 = 72 \\ t_{12} = 288 \Rightarrow ar^{11} = 288 \end{cases} \Rightarrow \frac{ar^{11}}{ar^9} = \frac{288}{72} \Rightarrow r^2 = 4$

$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \Rightarrow a(2)^9 = 72 \Rightarrow a = \frac{72}{512} \\ r = -2 \Rightarrow a(-2)^9 = 72 \Rightarrow a = -\frac{72}{512} \end{cases}$

دو دنبالهٔ هندسی با این شرایط وجود دارد.

۱۵۰- $\begin{cases} t_7 = 8192 \Rightarrow ar^6 = 8192 \\ t_4 = 128 \Rightarrow ar^3 = 128 \\ \Rightarrow r^3 = 64 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow a = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{ar^6}{ar^3} = \frac{8192}{128}$

مجموع چهار جملهٔ اول $= 2 + 8 + 32 + 128 = 170$

۱۵۱- $\begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{3}{5} \Rightarrow a + ar = \frac{3}{5} \Rightarrow a(1+r) = \frac{3}{5} \\ t_2 + t_3 = \frac{6}{5} \Rightarrow ar + ar^2 = \frac{6}{5} \Rightarrow ar(1+r) = \frac{6}{5} \\ \Rightarrow r = 2 \Rightarrow a + 2a = \frac{3}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{5} \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{1}{r} = \frac{3}{6}$

دنبالهٔ هندسی به صورت $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$ خواهد بود.

۱۵۲- $\begin{cases} t_1 t_3 = 4 \Rightarrow a(ar^2) = 4 \Rightarrow a^2 r^2 = 4 \\ (t_3)^2 = 16 \Rightarrow a^2 r^4 = 16 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$

توجه اگر $r = -2$ باشد، جمله‌ها یک‌درمیان مثبت و منفی می‌شوند (*کم و زیاد می‌شه*)، پس $r = 2$ قابل قبول است. حالا: $4a^2 = 4 \Rightarrow a^2 = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \xrightarrow{\text{دنباله}} 1, 2, 4, 8, \ldots \text{ در حال زیادشدن، پس قابل قبول است} \\ a = -1 \Rightarrow -1, -2, -4, \ldots \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$

عدد b را واسطهٔ هندسی c و a گوییم، هرگاه $b^2 = ac$ باشد. پس:

۱۵۳- $b^2 = 3 \times 27 = 81 \Rightarrow b = \pm 9 \Rightarrow 3, 9, 27$ یا $3, -9, 27$

۱۵۴- $b^2 = 6 \times 54 \Rightarrow b = \pm\sqrt{6 \times 54} = \pm\sqrt{6 \times 6 \times 9} = \pm 6 \times 3 = \pm 18$

۱۵۵- $\frac{3}{8} \; \square \; \square \; \square \; \square \; \frac{128}{81} \Rightarrow t_6 = \frac{128}{81} \Rightarrow ar^5 = \frac{128}{81}$

$\Rightarrow r^5 = \frac{128}{81} \times \frac{8}{3} = \frac{2^{10}}{3^5} = (\frac{4}{3})^5 \Rightarrow r = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{3}{8} \xrightarrow{\times\frac{4}{3}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\times\frac{4}{3}} \frac{2}{3} \xrightarrow{\times\frac{4}{3}} \frac{8}{9} \xrightarrow{\times\frac{4}{3}} \frac{32}{27} \xrightarrow{\times\frac{4}{3}} \frac{128}{81}$

۱۵۶- $\underset{a}{3} \xrightarrow{\times 2} \boxed{6} \xrightarrow{\times 2} \boxed{12} \xrightarrow{\times 2} \boxed{24} \xrightarrow{\times 2} \boxed{48} \xrightarrow{\times 2} \underset{t_6}{96} \Rightarrow t_6 = 96$

$\Rightarrow ar^5 = 96 \Rightarrow r^5 = \frac{96}{3} = 32 \Rightarrow r = 2$

۱۵۷- از فرمول درج n واسطهٔ هندسی داریم:

$r^{n+1} = \frac{c}{a} \Rightarrow r^{3+1} = \frac{625}{81} \Rightarrow r^4 = (\frac{5}{3})^4 \Rightarrow r = \frac{5}{3}$

$81 \xrightarrow{\times\frac{5}{3}} 135 \xrightarrow{\times\frac{5}{3}} 225 \xrightarrow{\times\frac{5}{3}} 375 \xrightarrow{\times\frac{5}{3}} 625$

۱۵۸- وقتی سه عدد a, b, c تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند، $ac = b^2$ است. پس:

$(4m + 44)(m - 6) = (2m + 6)^2$

$\Rightarrow 4m^2 + 20m - 264 = 4m^2 + 24m + 36$

$\Rightarrow -4m = 300 \Rightarrow m = -75 \xrightarrow{\text{اعداد}} -256, -144, -81$

$\Rightarrow r = \frac{-144}{-256} = \frac{144}{256} = \frac{81}{144} = \frac{9}{16}$

۱۵۹- سه جملهٔ داده‌شده سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی هستند، پس داریم:

$(x + 3)^2 = (x + 1)(x + 6)$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 7x + 6 \Rightarrow -x = -3$

$\Rightarrow x = 3 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 4, 6, 9, \ldots$ ($\times\frac{3}{2}$, $\times\frac{3}{2}$)

قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر $r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ ، $a_n = 4(\frac{3}{2})^{n-1}$ است.

۱۶۰- $3^x \times 3^y = (9\sqrt{3})^2 \Rightarrow 3^{x+y} = 81 \times 3 = 3^5$

$\Rightarrow x + y = 5$

$\Rightarrow$ واسطهٔ حسابی x, y = میانگین $= \frac{x+y}{2} = \frac{5}{2}$

۱۶۱- جمله‌ها را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر می‌گیریم، پس:

$(\frac{a}{r})(a)(ar) = 27 \Rightarrow a^3 = 27 \Rightarrow a = 3$

۱۶۲- $t_n = ar^{n-1} = 2^{n-1} \Rightarrow t_{20} = 2^{19}$

$\Rightarrow \underbrace{1 \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{19}}_{\text{ضرب ۲۰ جملهٔ اول}} = 2^{1+2+3+\cdots+19} = 2^{\frac{19 \times 20}{2}} = 2^{190}$

۱۶۳- فرض کنید یک دنباله از اعداد داریم. اعداد را این‌جوری دسته‌بندی می‌کنیم که دستهٔ اول یک عدد، دستهٔ دوم دو عدد و ...

$\{\bigcirc\}, \{\bigcirc, \bigcirc\}, \{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc\}, \underbrace{\{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc\}}_{\text{دستهٔ چهارم}}$

اگر اعداد را پشت سر هم به صورت دنباله ببینیم شروع دستهٔ چهارم، عدد هفتم دنباله است یا مثلاً اگر به تعداد $1 + 2 + 3 = 6$ جمله جلو برویم، به انتهای دستهٔ سوم می‌رسیم یا مثلاً اگر $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$ جمله جلو برویم به عدد انتهایی دستهٔ دهم می‌رسیم؛ پس جملهٔ ۵۶اُم دنباله اعداد طبیعی (یعنی ۵۶) شروع دستهٔ یازدهم می‌شود.

۱۶۴- مساحت رنگ شده در مرحلهٔ اول $= 2$ ،

مساحت رنگ شده در مرحلهٔ دوم $= 1, \ldots$

$\Rightarrow$ دنبالهٔ مساحت‌های رنگ شده: $2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$

$t_n = ar^{n-1} = 2(\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow t_6 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

پس در مرحلهٔ ششم، $\frac{1}{16} = 0/0625$ متر مربع رنگ می‌شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۶۵-

$110, 121, 133/1, \ldots \Rightarrow r = 1/1$

قیمت فعلی $= 100,100 \times \frac{10}{100}$

میزان افزایش پس از یک سال $= 10$

قیمت در سال بعد $= 110 \Rightarrow$

میزان افزایش $= 110 \times \frac{10}{100} = 11$

$\Rightarrow 110 + 11 = 121$

قیمت پس از دو سال

$121 \times \frac{10}{100} = 12/1$

$\Rightarrow 121 + 12/1 = 133/1$

قیمت پس از سه سال

$\Rightarrow t_n = ar^{n-1} = 110(1/1)^{n-1} = 100 \times 1/1 \times (1/1)^{n-1} = 100 \times (1/1)^n$

نکته

در حالت کلی اگر مقدار فعلی چیزی برابر x بوده و در هر واحد، r درصد افزایش یابد، مقدار آن پس از گذشت n واحد می‌شود: $t_n = x(1+r)^n$

(اگر r درصد کاهش یابد نیز $t_n = x(1-r)^n$ خواهد بود.)

دنبالهٔ $t_1, t_2, t_3, \ldots$ هندسی است، پس $\frac{t_2}{t_1} = r$ یا $\frac{t_3}{t_2} = r$ یا $\frac{t_{n+1}}{t_n} = r \ldots$.

۱۶۶- در این دنباله هم، نسبت هر جمله، به جملهٔ قبلی همان r است. مثلاً $\frac{2t_2}{2t_1} = r$. پس این دنباله هندسی با قدرنسبت r است.

۱۶۷- اگر جمله‌های دنبالهٔ هندسی را با عددی جمع کنیم، دنبالهٔ جدید ممکن است هندسی نباشد. مثلاً دنبالهٔ $1, 2, 4, 8, \ldots$ هندسی با قدرنسبت ۲ است. اگر جمله‌ها را با ۱ جمع کنیم می‌شود $2, 3, 5, 9, \ldots$ که هندسی نیست.

۱۶۸- واضح است که $\frac{\frac{1}{t_2}}{\frac{1}{t_1}} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{r}$ و ...، بنابراین، دنبالهٔ داده‌شده، هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{r}$ $(r \neq 0)$ خواهد بود.

۱۶۹- $\frac{(t_2)^2}{(t_1)^2} = (\frac{t_2}{t_1})^2 = r^2$ ، $\frac{(t_3)^2}{(t_2)^2} = (\frac{t_3}{t_2})^2 = r^2$ و ...، بنابراین دنبالهٔ داده‌شده، هندسی با قدرنسبت r^2 خواهد بود.

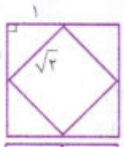
۱۷۰- جملهٔ دوم، چهارم و هشتم دنبالهٔ حسابی به ترتیب به صورت $a+d$ ، $a+3d$ و $a+7d$ هستند. حالا این اعداد سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی هستند، پس $(a+7d)(a+d) = (a+3d)^2$ و لذا:

$a^2 + 8ad + 7d^2 = a^2 + 6ad + 9d^2$

$\Rightarrow 2d^2 - 2ad = 0 \xrightarrow[d \neq 0]{\div 2d} d - a = 0 \Rightarrow d = a$

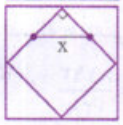
اعداد: $\underbrace{2a}_{a+d} \xrightarrow{\times 2} \underbrace{4a}_{a+3d} \xrightarrow{\times 2} \underbrace{8a}_{a+7d} \Rightarrow r = 2$

۱۷۱-



محیط مربع اول $= 8$

محیط مربع دوم $= t_2 = 4\sqrt{2}$



$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = x^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x^2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$

محیط مربع سوم $= t_3 = 4$

$\xrightarrow{\text{دنبالهٔ محیط‌ها}} 8, 4\sqrt{2}, 4, \ldots$

دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

$\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ldots \Rightarrow$

$t_n = ar^{n-1} = 8(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1} \Rightarrow t_6 = 8(\frac{\sqrt{2}}{2})^5 = 8 \times (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 (\frac{\sqrt{2}}{2})$

$= 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

۱۷۲- شبیه دنباله حسابی، بین جمله‌های دنباله هندسی هم، رابطهٔ اندیسی وجود دارد. اگر $m + n = p + k$ *(هیچ کدوم صفر نیستن)* بشود؛ داریم: $a_m a_n = a_p a_k$ *(تو حسابی جمع بود، این‌جا ضرب میشه)* مثلاً $a_3 a_7 = a_1 a_9$ می‌شود چون جمع اندیس‌های دو طرف برابر می‌شود. یا $a_3 a_7 = a_5 a_5 = a_5^2$. حالا داریم:

$(a_5 - a_1 a_9)(a_5 + a_1 a_9) = a_5^2 - (a_1 a_9)^2 = 8 - (8)^2 = -56$

پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل اول

۱- **الف)** درست

ب) نادرست (هر جمله با $2\sqrt{5}+$ جمع می‌شود و دنباله حسابی است.)

پ) درست

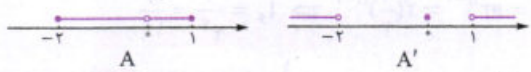
ت) نادرست ($\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\ldots, -2, -1\}$ پس متمم آن نسبت به $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ $\{0, 1, 2, \ldots\}$ می‌شود نه $\mathbb{N}$.)

۲- **الف)** $[-1,5] - (-\infty,5) = \{5\}$ که مجموعه‌ای متناهی است.

ب) $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Q}^c$ (اعداد گنگ) جدا از هم هستند، پس:

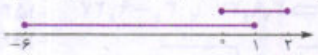
$\underbrace{(\mathbb{Q} - \mathbb{Q}^c)}_{\mathbb{Q}} \cup \underbrace{(\mathbb{Q}^c - \mathbb{Q})}_{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$

پ)

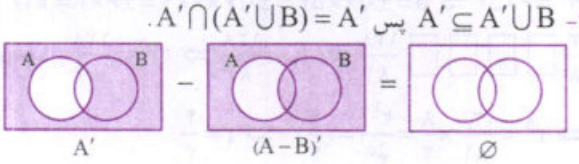


ت) متناهی

۳- $[-6,4) \cap (-\infty,1] = [-6,1] \Rightarrow [-6,1] - [0,2] = [-6,0)$



۴- $A' \subseteq A' \cup B$ پس $A' \cap (A' \cup B) = A'$.



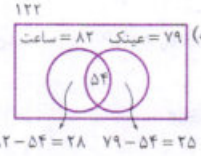
پس متمم مجموعهٔ به دست آمده برابر U می‌شود.

۵- **الف)** $28 + 54 + 25 = 107$ (همان اجتماع)

ب) ۲۸

پ) $28 + 25 = 53$ (فقط ساعت یا فقط عینک)

ت) $122 - 107 = 15$ (بیرون دایره‌ها)



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۶-

الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=۷۵+۵۰-۳۵=۹۰$

ب) $n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

$=۷۵-۳۵=۴۰$

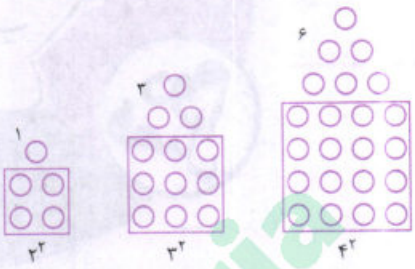
پ) $n(A'\cap B)=n(B-A)=n(B)-n(B\cap A)$

$=۵۰-۳۵=۱۵$

ت) $n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)$

$=۱۲۰-۹۰=۳۰$

۷-



الگوی مربعی ↑ الگوی مثلثی ↑

$\Rightarrow a_n=(n+۱)^۲+\frac{n(n+۱)}{۲}$

$\Rightarrow a_{۱۱}=۱۲^۲+\frac{۱۱\times۱۲}{۲}=۱۴۴+۶۶=۲۱۰$

۸- الف) $۳,۶,۹,\ldots \Rightarrow a_n=۳n$

ب) $۳,۵,۷,\ldots \Rightarrow b_n=۲n+۱$

پ) الگوی کل مربع‌ها برابر $c_n=۳n+۲n+۱=۵n+۱$ می‌شود.

پس داریم: $۵n+۱=۱۰۶ \Rightarrow ۵n=۱۰۵ \Rightarrow n=۲۱$

$\Rightarrow b_{۲۱}=۲(۲۱)+۱=۴۳$

۹- هر جمله مجموع دو جملهٔ قبلی است؛ یعنی:

$$\left.\begin{array}{l} n=۳ \Rightarrow F_۳=F_۲+F_۱=۱+۱=۲ \\ n=۴ \Rightarrow F_۴=F_۳+F_۲=۲+۱=۳ \\ n=۵ \Rightarrow F_۵=F_۴+F_۳=۳+۲=۵ \\ n=۶ \Rightarrow F_۶=F_۵+F_۴=۵+۳=۸ \end{array}\right\} \Rightarrow ۱,۱,۲,۳,۵,۸$$

۱۰- الگو درجه دوم و با ضابطهٔ $a_n=an^۲+bn+c$ است:

$۵ , ۱۲ , ۲۲ , ۳۵ , ۵۱,\ldots$

$+۷ \quad +۱۰ \quad +۱۳ \quad +۱۶$

$+۳ \quad +۳ \quad +۳$

$\downarrow$

$a=\frac{۳}{۲}$

$\Rightarrow a_n=\frac{۳}{۲}n^۲+bn+c$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲}+b+c=۵ \\ n=۲ \Rightarrow ۶+۲b+c=۱۲ \end{cases}$$

$\frac{۹}{۲}+b=۷ \Rightarrow b=\frac{۵}{۲} \Rightarrow c=۱$

پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت $a_n=\frac{۳}{۲}n^۲+\frac{۵}{۲}n+۱$ است.

۱۱-

$a_۵^۲-a_۴^۲=۲۰$

$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \underbrace{(a_۵-a_۴)}_{d=۴}(a_۵+a_۴)=۲۰ \Rightarrow a_۵+a_۴=۵$

$\Rightarrow (a+۴d)+(a+۳d)=۵ \Rightarrow ۲a+۷d=۵$

$\Rightarrow ۲a=۵-۷(۴)=-۲۳ \Rightarrow a=-\frac{۲۳}{۲}=-۱۱/۵$

$\Rightarrow t_n=a+(n-۱)d=-۱۱/۵+۴n-۴=۴n-۱۵/۵$

۱۲-

$\text{واسطهٔ حسابی}=\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۱۲۸}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}+۸\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۲}=۵\sqrt{۲}$

$(\text{واسطه هندسی})^۲=\sqrt{۱۲۸}\times\sqrt{۸}=\sqrt{۶۴\times۲\times۴\times۲}$

$=\sqrt{۶۴\times۱۶}=۸\times۴=۳۲ \Rightarrow \text{واسطهٔ هندسی مثبت}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$

$\Rightarrow \frac{\text{واسطهٔ حسابی}}{\text{واسطهٔ هندسی}}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۴\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۴}$

۱۳-

$n=۱ \Rightarrow \frac{۳}{۲\times۳}=\frac{۱}{۲}$

$\times\frac{۱}{۳}$

$n=۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲\times۳^۲}=\frac{۱}{۶}$ $\qquad r=\frac{۱}{۳}$

$\times\frac{۱}{۳}$

$n=۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲\times۳^۳}=\frac{۱}{۱۸}$

۱۴-

$$\begin{cases} \frac{۱}{t_۷}+\frac{۱}{t_۹}=۵ \Rightarrow \frac{۱}{ar^۶}+\frac{۱}{ar^۸}=\frac{r^۲+۱}{ar^۸}=۵ \Rightarrow r^۲+۱=۵ar^۸ \\ t_۵\times t_{۱۱}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow (ar^۴)(ar^{۱۰})=\frac{۱}{۴} \Rightarrow a^۲r^{۱۴}=\frac{۱}{۴} \\ \Rightarrow (ar^۷)^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow ar^۷=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

با جای‌گذاری در معادلهٔ اول داریم:

$$r^۲+۱=۵ar^۷\times r=\frac{۵}{۲}r \xrightarrow{\text{جست‌وجو}} \begin{cases} r=۲ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲۵۶} \\ r=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a=\frac{۱}{۶۴} \end{cases}$$

۱۵-

$\underbrace{۸۱}_{a} \xrightarrow{\times r} \bigcirc \xrightarrow{\times r} \bigcirc \xrightarrow{\times r} \bigcirc \xrightarrow{\times r} \underbrace{۶۲۵}_{ar^۴} \Rightarrow ۸۱\times r^۴=۶۲۵$

$\Rightarrow r^۴=\frac{۶۲۵}{۸۱}=(\frac{۵}{۳})^۴ \Rightarrow r=\frac{۵}{۳}$

$\Rightarrow ۸۱ \xrightarrow{\times\frac{۵}{۳}} ۱۳۵ \xrightarrow{\times\frac{۵}{۳}} ۲۲۵ \xrightarrow{\times\frac{۵}{۳}} ۳۷۵ \xrightarrow{\times\frac{۵}{۳}} ۶۲۵$

۱۶- سه عدد را به صورت $x-d,x,x+d$ می‌گیریم:

$x-d+x+x+d=۱۵ \Rightarrow ۳x=۱۵$

$\Rightarrow x=۵ \Rightarrow ۵-d,۵,۵+d$

$(۵-d)^۲+۵^۲+(۵+d)^۲=۱۰۷$

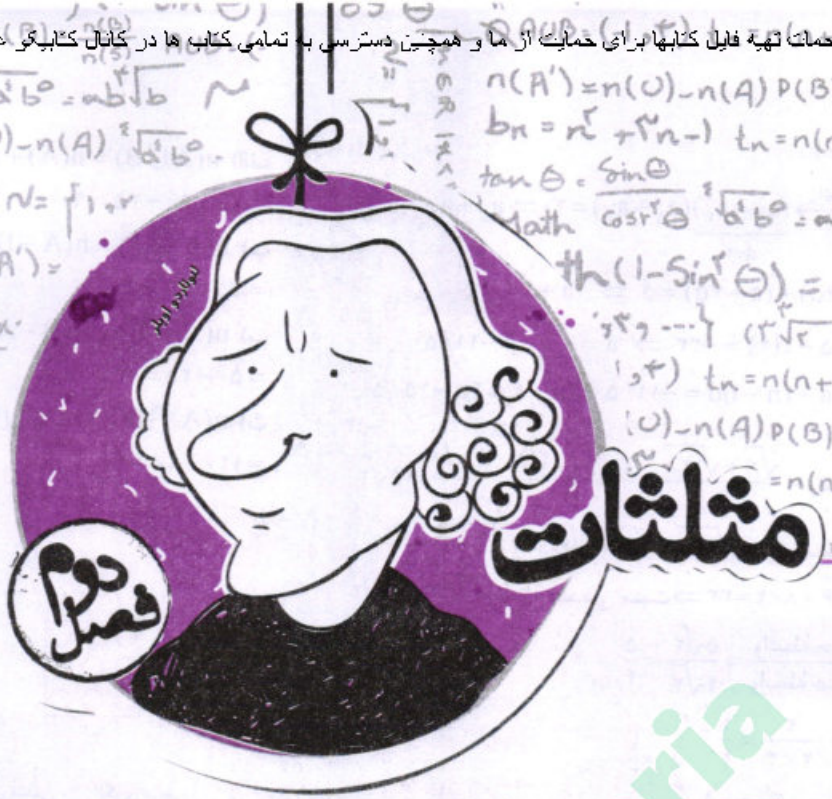
$\Rightarrow ۲۵-۱۰d+d^۲+۲۵+۲۵+۱۰d+d^۲=۱۰۷$

$\Rightarrow ۲d^۲=۳۲ \Rightarrow d^۲=۱۶ \Rightarrow d=\pm۴$

$d=۴ \Rightarrow \underbrace{۵-۴}_{۱},۵,\underbrace{۵+۴}_{۹}$

$d=-۴ \Rightarrow ۹,۵,۱$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابگو عضو شوید@kotob_konkoria

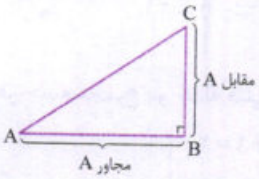


درس ۱ نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات ترکیبی از دو کلمهٔ یونانی به معنی مثلث و اندازه‌گیری است. موضوع این شاخه از ریاضیات، بررسی رابطه‌ای بین زاویه‌ها و ضلع‌های یک مثلث است. یکی از کاربردهای این علم، اندازه‌گیری فاصله به صورت غیرمستقیم (*بدون متر کردن!*) است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

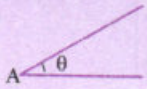
مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر بگیرید. نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زاویهٔ حادهٔ A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$\sin\hat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل به A}}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC}\qquad \cos\hat{A}=\frac{\text{ضلع مجاور به A}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{AC}$$

$$\tan\hat{A}=\frac{\text{ضلع مقابل به A}}{\text{ضلع مجاور به A}}=\frac{BC}{AB}\qquad \cot\hat{A}=\frac{1}{\tan\hat{A}}=\frac{\text{ضلع مجاور به A}}{\text{ضلع مقابل به A}}=\frac{AB}{BC}$$

نکته

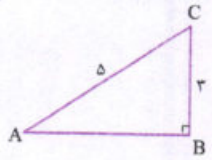


۱ نسبت کتانژانت زاویهٔ A، معکوس نسبت تانژانت زاویهٔ A است.

۲ معمولاً زاویه‌ها را با حروف یونانی α، θ و ... نمایش می‌دهیم، مثلاً در شکل مقابل می‌نویسیم $\sin\theta$ یا $\cos\theta$.

۳ نسبت های مثلثاتی برای زاویهٔ مشخص α (مثلاً $\sin 30^\circ$) ثابت بوده و ربطی به مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم‌شده ندارد.

مثال در شکل مقابل نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های A و C را به دست آورید.



پاسخ برای به دست آوردن برخی از نسبت‌ها، نیاز به طول ضلع AB داریم؛ بنابراین بهتر است ابتدا با قضیهٔ فیثاغورس آن را به دست آوریم:

$$AB^2+BC^2=AC^2 \Rightarrow AB^2+9=25 \Rightarrow AB=4$$

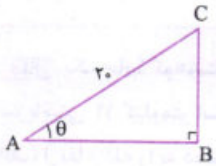
$$\sin\hat{A}=\frac{\text{مقابل به A}}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{5},\ \cos\hat{A}=\frac{\text{مجاور به A}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{5},\ \tan\hat{A}=\frac{\text{مقابل به A}}{\text{مجاور به A}}=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{4},\ \cot\hat{A}=\frac{1}{\tan\hat{A}}=\frac{\text{مجاور به A}}{\text{مقابل به A}}=\frac{4}{3}$$

$$\sin\hat{C}=\frac{\text{مقابل به C}}{\text{وتر}}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{5},\ \cos\hat{C}=\frac{\text{مجاور به C}}{\text{وتر}}=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{5},\ \tan\hat{C}=\frac{\text{مقابل به C}}{\text{مجاور به C}}=\frac{AB}{BC}=\frac{4}{3},\ \cot\hat{C}=\frac{1}{\tan C}=\frac{\text{مجاور به C}}{\text{مقابل به C}}=\frac{3}{4}$$

مورد داشتیم نوشته $\sin=\frac{3}{5}$ یا $\cos=\frac{4}{5}$.

ببین نسبت‌های مثلثاتی به خودی خود معنی ندارن. نسبت‌های مثلثاتی در کنار یه زاویه مثل A، معنی پیدا می‌کنن. به عبارت دیگه $\sin=\frac{3}{5}$ معنی نداره! سینوس کدوم زاویه $\frac{3}{5}$ می‌شه؟ تو عبارت $\sin\hat{A}$ نمی‌تونی sin و A رو جدا کنی و اون‌ها در کنار هم، معنی پیدا می‌کنن.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria



مثال طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه ۲۰ سانتی‌متر و سینوس یکی از زاویه‌های حادهٔ آن $\frac{۳}{۵}$ است. محیط مثلث را به دست آورید.

پاسخ در این فصل هر جا لازم شد، یک شکل بکشید. یک مثلث قائم‌الزاویه با وتری به طول ۲۰، رسم کرده و θ را زاویه‌ای می‌گیریم که $\sin\theta = \frac{۳}{۵}$ باشد. حالا:

$$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{BC}{۲۰} \Rightarrow BC = ۱۲$$

با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم طول ضلع AB را نیز به دست آوریم:

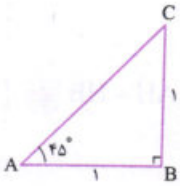
$$AB^۲ + BC^۲ = AC^۲ \Rightarrow AB^۲ + ۱۲^۲ = ۲۰^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۲۵۶ \Rightarrow AB = ۱۶$$

بنابراین محیط مثلث می‌شود:

$$\text{محیط مثلث} = AB + BC + AC = ۱۶ + ۱۲ + ۲۰ = ۴۸$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های معروف

نسبت‌های زاویهٔ ۴۵°



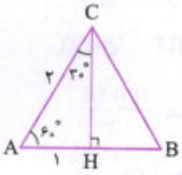
مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های قائمهٔ آن ۱ است، رسم می‌کنیم. چون مثلث متساوی‌الساقین است، $\hat{A} = \hat{C} = ۴۵^\circ$ خواهد بود. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس $AC = \sqrt{۲}$ به دست می‌آید.

حالا نسبت‌های زاویهٔ ۴۵° را به دست می‌آوریم:

$$\sin ۴۵^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \cos ۴۵^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \qquad \tan ۴۵^\circ = \frac{BC}{AB} = ۱ \qquad \cot ۴۵^\circ = \frac{۱}{\tan ۴۵^\circ} = ۱$$

نسبت‌های زاویهٔ ۴۵° به دست آمد، آن‌ها را به خوبی به خاطر بسپارید.

نسبت‌های ۳۰° و ۶۰°



مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۲ رسم می‌کنیم. همهٔ زاویه‌ها برابر ۶۰° است. از زاویه $\hat{C}$، بر خط AB، عمود می‌کنیم تا مثلث قائم‌الزاویه تشکیل شود (*چون نسبت‌ها رو تو مثلث قائم‌الزاویه تعریف کردیم نه هر مثلثی*). چون مثلث متساوی‌الاضلاع است، ارتفاع رسم‌شده، نیمساز و میانه هم هست، پس $A\hat{C}H = ۳۰^\circ$ و $AH = ۱$ خواهد بود. با استفاده از فیثاغورس نیز $CH = \sqrt{۳}$ به دست می‌آید. حالا نسبت‌های زاویه‌های ۶۰° و ۳۰° به راحتی محاسبه می‌شوند:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \cos ۶۰^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{۱}{۲} \qquad \tan ۶۰^\circ = \frac{CH}{AH} = \sqrt{۳} \qquad \cot ۶۰^\circ = \frac{AH}{CH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} = \frac{۱}{۲} \qquad \cos ۳۰^\circ = \frac{CH}{AC} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \qquad \tan ۳۰^\circ = \frac{AH}{CH} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \cot ۳۰^\circ = \frac{۱}{\tan ۳۰^\circ} = \sqrt{۳}$$

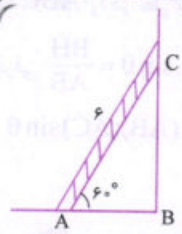
نکته

جدول مقابل را به‌خاطر بسپارید:

	۳۰°	۴۵°	۶۰°
sin	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
cos	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
tan	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$
cot	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱) $\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$ یا $\sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ$. در حالت کلی اگر جمع دو زاویه ۹۰° بشود (متمم باشند)، سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر می‌شود. مثلاً چون $۳۰^\circ + ۶۰^\circ = ۹۰^\circ$ است، $\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$ یا $\sin ۲۰^\circ = \cos ۷۰^\circ$.

۲) با توجه این‌که به $\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ است، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه، همواره نصف وتر است.



مثال نردبانی ۶ متری که با زمین زاویهٔ ۶۰° می‌سازد را به دیواری تکیه داده‌ایم.

الف) فاصلهٔ پای نردبان از دیوار (AB) چه‌قدر است؟

ب) اگر از نردبان بالا برویم، تا چه ارتفاعی از دیوار (BC) بالا رفته‌ایم؟

پاسخ الف) برای به دست آوردن AB، نسبت مثلثاتی مناسب را می‌نویسیم. AB ضلع مجاور به زاویهٔ A است؛ پس از نسبت کسینوس استفاده می‌کنیم:

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AB}{۶} \Rightarrow AB = ۳$$

ب) BC ضلع مقابل به زاویهٔ A است، پس می‌توانیم از سینوس یا تانژانت استفاده کنیم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BC}{۶} \Rightarrow BC = ۶\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

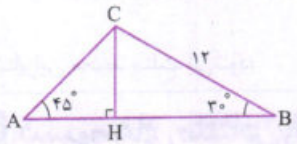
مثال یک جادهٔ کوهستانی شبیه شکل زیر است. زاویهٔ جادهٔ سربالایی و سرپایینی با سطح زمین به ترتیب 45° و 30° و طول جادهٔ سرپایینی ۱۲ کیلومتر است.

الف) ارتفاع قله را به دست آورید.

ب) طول جادهٔ سربالایی را به دست آورید.

پ) طول تونل احداث‌شده بین دو نقطهٔ B و A چه‌قدر است؟

پاسخ ابتدا یک مثلث به صورت زیر رسم می‌کنیم. برای این‌که مثلث قائم‌الزاویه درست کنیم، از C بر AB عمود می‌کنیم. از مثلث BHC شروع می‌کنیم. چون یک ضلع و یک زاویهٔ آن داده شده است:



الف $\sin 30^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{12} \Rightarrow CH = 6$ (ارتفاع قله)

ب $\sin 45^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = \frac{12}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 12\frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$ طول جادهٔ سربالایی

پ $AB = AH + HB$، پس طول AH و BH را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{BHC} : \cos 30^\circ = \frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{12} \Rightarrow BH = 12\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \\ \overset{\Delta}{AHC} : \tan 45^\circ = \frac{CH}{AH} \Rightarrow 1 = \frac{6}{AH} \Rightarrow AH = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow AB = 6 + 6\sqrt{3}$$

مثال حاصل $A = 2\sin 30^\circ + \frac{\tan 45^\circ}{2} + \cos^2 45^\circ$ را به دست آورید.

پاسخ $2\sin 30^\circ$ یعنی ابتدا $\sin 30^\circ$ را به دست آورده و در ۲ ضرب می‌کنیم، پس: $2\sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

$\frac{\tan 45^\circ}{2}$ یعنی ابتدا $\tan 45^\circ$ را نوشته و حاصل را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، یعنی: $\frac{\tan 45^\circ}{2} = \frac{1}{2}$.

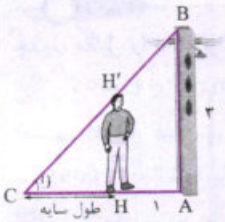
$\cos^2 45^\circ$ یعنی $(\cos 45^\circ)^2$، یعنی حاصل $\cos 45^\circ$ را به توان ۲ می‌رسانیم، یعنی: $\cos^2 45^\circ = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$، بنابراین:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

توجه دارید که توان دوم کجا گذاشته می‌شود. در حالت کلی: $\cos^2\theta = (\cos\theta)^2$.

مثال شخصی با قد ۱/۸ سانتی‌متر در فاصلهٔ امتری از یک تیر چراغ برق به ارتفاع ۳ متر ایستاده است. طول سایهٔ این شخص چه‌قدر است؟

پاسخ وضعیت اولیه شخص به صورت مقابل است:



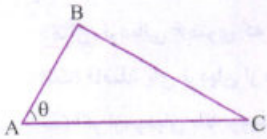
$$\tan\theta = \frac{HH'}{CH} = \frac{1/8}{CH}$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{1 + CH}$$

$$\frac{1/8}{CH} = \frac{3}{1 + CH} \Rightarrow 1/8 + 1/8CH = 3CH \Rightarrow 1/8 = 1/2CH \Rightarrow CH = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

مساحت مثلث با استفاده از سینوس

مثلث ABC را در نظر بگیرید. می‌دانیم $S_{ABC} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{BH \times AC}{2}$.



از طرفی $\sin\theta = \frac{BH}{AB}$، پس $BH = AB\sin\theta$. با جای‌گذاری در رابطهٔ بالا داریم:

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\text{(حاصل‌ضرب دو ضلع)} \times \text{(سینوس زاویهٔ بین دو ضلع)} = \frac{1}{2}(AB)(AC)\sin\theta$$

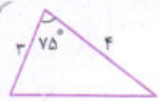
$$S_{ABC} = \frac{(AB\sin\theta)(AC)}{2} = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\theta$$

نکته

این رابطه وقتی زاویهٔ θ منفرجه باشد هم کار می‌کند، چون جلوتر نشان می‌دهیم دو زاویهٔ مکمل، سینوس‌های برابر دارند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

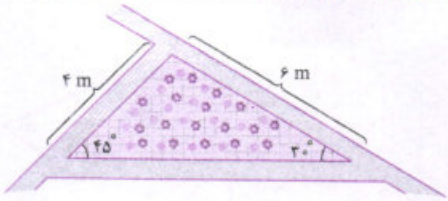
مثال: با استفاده از ماشین‌حساب $\sin 75^\circ = 0/96$ به دست می‌آید. مساحت مثلث مقابل را بیابید.



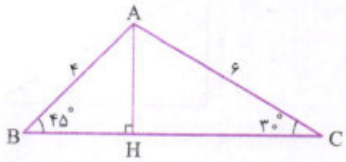
$$S=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times \sin 75^\circ = 6\times 0/96 = 5/76$$

پاسخ:

مثال: محوطهٔ گلکاری‌شده‌ای به شکل مثلث، بین چند پیاده‌رو ساخته شده است. مساحت محوطه را به دست آورید. ($\sqrt{6}$ را تقریباً ۲/۵ بگیرید.)



پاسخ: شکل زیر را رسم می‌کنیم. اگر BH و HC را به دست آوریم، طول ضلع BC به دست می‌آید. سپس می‌توانیم از رابطهٔ مساحت استفاده کنیم:



$$\cos 45^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{BH}{4} \Rightarrow BH = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HC}{6} \Rightarrow HC = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

پس: $BC = BH + HC = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$. حالا:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\times BC\times \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\times 4\times(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}) = 4+3\sqrt{6} \simeq 4+3(2/5) = 11/5$$ متر مربع

تذکر: $\hat{A} = 105^\circ$ بنابراین $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC)\sin 105^\circ$. اگر $\sin 105^\circ$ در مسئله داده شده بود، می‌توانستیم از این راه نیز مساحت مثلث را به دست آوریم.

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱: یک شکل که معمولاً دارای زوایای معروف است به شما می‌دهند و طول پاره‌خط‌ها را می‌خواهند. نسبت مثلثاتی مناسب را بنویسید و آن‌ها را به دست آورید.

حالاتوحل‌کن: سؤال‌های ۱ و ۲ و ۱۰ تا ۲۵ و ۳۴

تیپ۲: نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف را به خاطر داشته باشید. یک عبارت برحسب آن‌ها داده می‌شود و شما باید حاصل آن را به دست آورید.

حالاتوحل‌کن: سؤال‌های ۳ تا ۹

تیپ۳: مساحت مثلث یا شکلی که چندتا مثلث در آن ایجاد می‌شود، خواسته می‌شود که باید از فرمول مساحت مثلث (که $\sin\theta$ دارد) استفاده کنید.

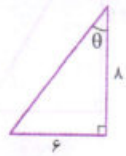
حالاتوحل‌کن: سؤال‌های ۲۶ تا ۳۳

سؤال‌های امتحانی

(مشابه تمرین کتاب درسی)

در هر شکل، جای خالی را تکمیل کنید.

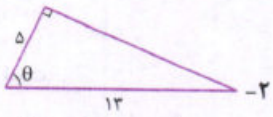
۱-



$\sin\theta = \cdots\cdots \quad \cos\theta = \cdots\cdots$

$\tan\theta = \cdots\cdots \quad \cot\theta = \cdots\cdots$

۲-



$\sin\theta = \cdots\cdots \quad \cos\theta = \cdots\cdots$

$\tan\theta = \cdots\cdots \quad \cot\theta = \cdots\cdots$

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۳- $\sin 20^\circ = \cos 70^\circ$

۴- $-\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4}$

۵- $(\tan 45^\circ)\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۶- $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

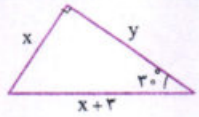
۷- $\tan 30^\circ \cot 30^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

۸- $1 - 2\sin^4 30^\circ + \frac{\cos^2 30^\circ}{2}$

۹- $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

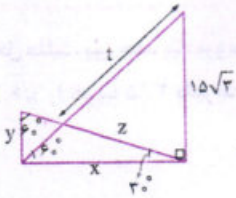
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

○ در هر شکل t، z، y و x را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

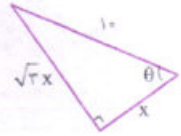


-۱۱

-۱۰

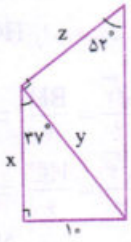


-۱۳



-۱۲

-۱۴



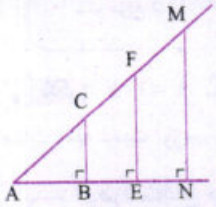
-۱۵

$\sin 37^\circ \simeq 0/6$

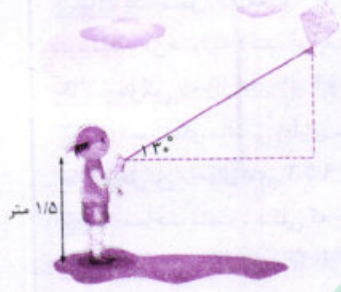
$\cos 37^\circ \simeq 0/8$

$\tan 52^\circ \simeq 1/28$

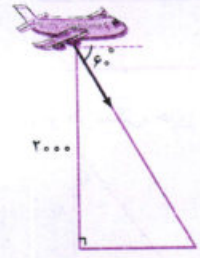
۱۶- در شکل مقابل نشان دهید $\frac{BC}{AB} = \frac{FE}{AE} = \frac{MN}{AN}$. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



۱۷- فردی مطابق شکل بادبادکی را به هوا فرستاده است. اگر طول نخ بادبادک ۱۰۰ متر باشد، ارتفاع بادبادک از زمین، چه‌قدر است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



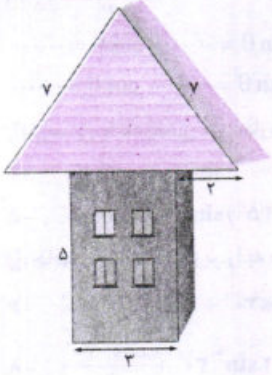
۱۸- هواپیمایی در ارتفاع ۲۰۰۰ متری در حال پرواز است. این هواپیما با زاویهٔ °۶۰ نسبت به سطح افق، شروع به فرود می‌کند. این هواپیما تا رسیدن به سطح زمین چه مسیری را طی می‌کند؟ ($\sqrt{3} = 1/7$ بگیرید.) *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



۱۹- خانه‌ای به صورت مقابل ساخته شده است.

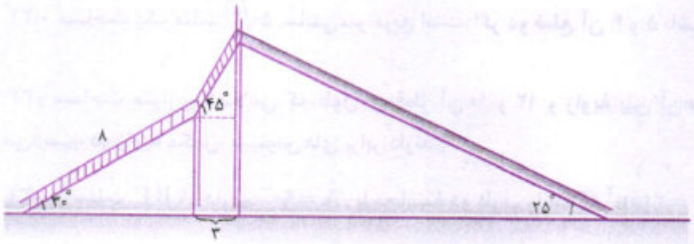
الف) زاویه‌ای که شیروانی با سطح افق می‌سازد، چه‌قدر است؟

ب) نوک شیروانی چه ارتفاعی از سطح زمین دارد؟

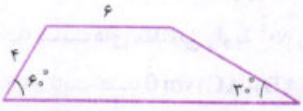


بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۲۰- برای رسیدن به بالای یک سرسره، باید از دو پلکان به شکل مقابل عبور کرد. طول و ارتفاع سرسره چه‌قدر است؟ $(\sin ۲۵^\circ = ۰/۴۲)$

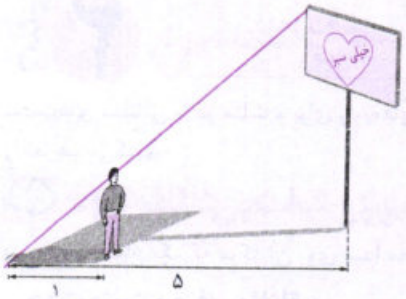


۲۱- محیط و مساحت ذوزنقهٔ مقابل را به دست آورید.



۲۲- سایهٔ یک تابلوی تبلیغاتی در ساعتی از روز ۵ متر است. فردی با قد ۱۶۰ cm در مقابل این تابلو در همان ساعت از روز قرار می‌گیرد. اگر طول سایهٔ این فرد ۱ متر باشد، ارتفاع تابلوی تبلیغاتی چه‌قدر است؟

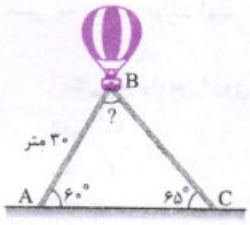
(مشابه تمرین کتاب درسی)



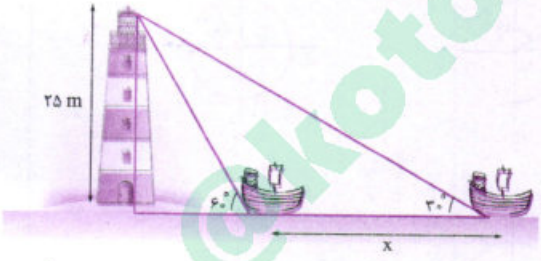
۲۳- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{B} = ۹۰^\circ)$، اگر $\cos A = \frac{۲}{۳}$ و $b = ۶$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ A را مشخص کنید. (b ضلع روبه‌روی زاویهٔ B است.)

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۲۴- یک بالن اطلاع‌رسانی توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است. طول طناب دوم را به دست آورید. $(\sin ۶۵^\circ = ۰/۸۵)$



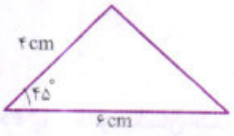
۲۵- قایقی با چنان فاصله‌ای نسبت به فانوس دریایی ایستاده است که با زاویهٔ ۶۰° نوک فانوس را مشاهده می‌کند. این قایق مقداری از فانوس دور می‌شود به طوری که در نقطهٔ جدید، نوک فانوس با زاویهٔ ۳۰° دیده شود. اگر ارتفاع فانوس ۲۵ متر باشد، این قایق حدوداً چند متر به عقب حرکت کرده است؟ $(\sqrt{۳} = ۱/۷)$



(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

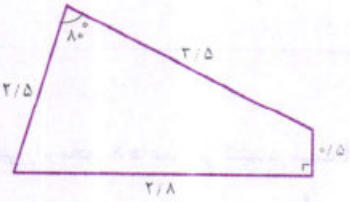
مساحت هر شکل را به دست آورید.

۲۶-



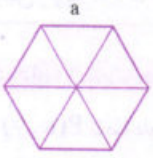
۲۷-

۲۸-



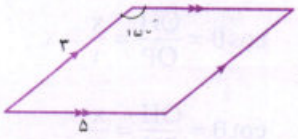
$\sin ۸۰^\circ = ۰/۹۸$

۲۹- شش‌ضلعی منتظم به ضلع a



۳۰-

۳۱-



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۳۲- مساحت یک مثلث $5\sqrt{2}$ سانتی‌متر مربع است. اگر دو ضلع آن ۴ و ۵ باشد، کوچک‌ترین زاویهٔ بین دو ضلع را به دست آورید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

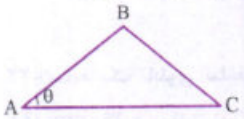
۳۳- مساحت متوازی‌الاضلاعی که طول دو قطر آن ۱۰ و ۱۲ و زاویهٔ بین آن‌ها 60° است را به دست آورید. (راهنمایی: در درس بعدی نشان می‌دهیم، دو زاویهٔ مکمل، سینوس‌های برابر دارند.)

۳۴- در مثلث ABC داریم: $\hat{A}=90^\circ$. با محاسبهٔ دو طرف رابطهٔ $\frac{\cos^2 B+\sin^2 C}{1-\sin^2 C}=2\tan^2 C$ نشان دهید تساوی برقرار است.

۳۵- الف) سه مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویهٔ 30° رسم کنید و ثابت کنید $\sin 30^\circ$ در هر سه مثلث برابر است.

ب) نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ 70° را با استفاده از نقاله و خط‌کش به دست آورید و با اعداد به دست آمده از ماشین‌حساب مقایسه کنید.

۳۶- ثابت کنید $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{1}{2}(AB)(AC)\sin\theta$

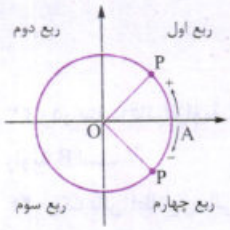


درس ۲ دایرهٔ مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی را در مثلث و برای زاویه‌های حاده معرفی کردیم. برای این‌که بتوانیم، نسبت‌ها را برای هر زاویه‌ای معرفی کنیم، دایرهٔ مثلثاتی را تعریف می‌کنیم.

دایرهٔ مثلثاتی و نمایش زاویه روی آن

دایره‌ای به شعاع یک که مرکز آن روی مبدأ مختصات است را **دایرهٔ مثلثاتی** می‌گوییم.



جهت مثبت و منفی مثلثاتی

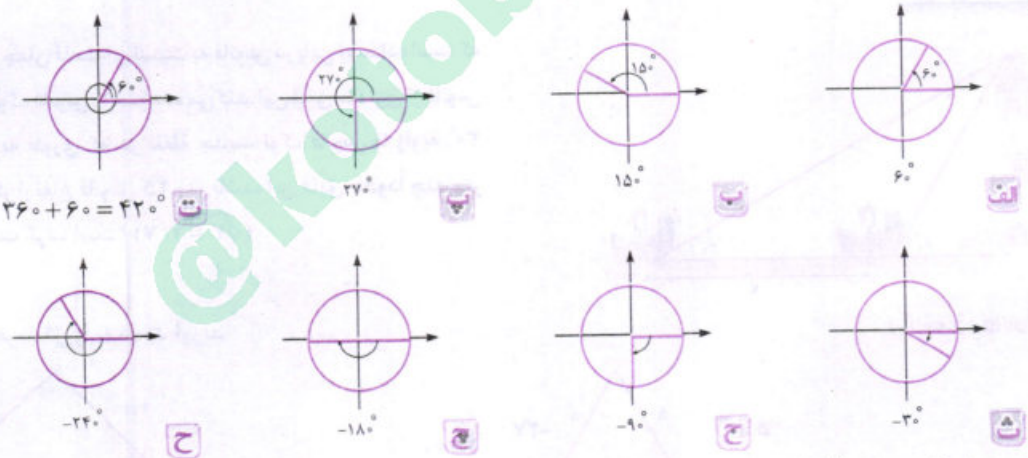
ضلع OA برای زاویه ثابت است. اگر نقطهٔ P در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (از A) شروع به حرکت کند، زاویهٔ مثبت AOP به دست می‌آید. اگر نقطهٔ P در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویهٔ منفی به دست خواهد آمد.

مثال هر زاویه را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید.

الف) 60° ب) 150° پ) 270° ت) 420°

ث) -30° ج) -90° چ) -180° ح) -240°

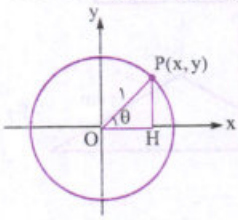
پاسخ



تذکر بعد از یک چرخش 360°، دوباره روی زاویهٔ صفر قرار می‌گیریم، بنابراین نمایش زاویه‌های 0° با 360° روی دایره یکسان است یا نمایش زاویهٔ 60° با $420^\circ=60^\circ+360^\circ$ تفاوتی نمی‌کند.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ

فرض کنید $P(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی روی دایرهٔ مثلثاتی بوده و زاویهٔ تشکیل‌شده را θ می‌نامیم. از نقطهٔ P خطی را بر محور x ها عمود می‌کنیم. در مثلث OPH نسبت‌های مثلثاتی را می‌نویسیم:



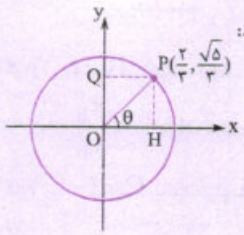
$$\sin\theta=\frac{PH}{OP}=\frac{y}{1}=y \qquad \cos\theta=\frac{OH}{OP}=\frac{x}{1}=x$$

$$\tan\theta=\frac{PH}{OH}=\frac{y}{x} \qquad \cot\theta=\frac{OH}{PH}=\frac{x}{y}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته

اگر θ در نواحی دیگر دستگاه مختصات هم قرار گیرد، همین تعریف را برای آن‌ها در نظر می‌گیریم؛ یعنی اگر نقطهٔ $P(x,y)$ زاویهٔ θ را به وجود آورد، $\sin\theta$ همان عرض نقطهٔ P، $\cos\theta$ همان طول نقطهٔ P، $\tan\theta$ نسبت عرض به طول نقطهٔ P و $\cot\theta$ عکس نسبت تانژانت خواهد بود. مثلاً اگر نقطهٔ $P(\frac{۲}{۳},\frac{\sqrt{۵}}{۳})$ که روی دایره قرار دارد، زاویهٔ θ را به وجود آورد:



$\sin\theta = \text{عرض نقطهٔ } P = y = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$ $\qquad$ $\cos\theta = \text{طول نقطهٔ } P = \frac{۲}{۳}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{۵}}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{\sqrt{۵}}{۲}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{۲}{\sqrt{۵}}$

محور کسینوس‌ها

در مثال بالا نقطهٔ H، همان x نقطهٔ P یعنی $\frac{۲}{۳}$ یا $\cos\theta$ است؛ به همین دلیل محور x ها را محور کسینوس‌ها نیز می‌نامند. در واقع اگر نقطهٔ P را روی محور x ها تصویر کنیم، نقطهٔ به دست آمده همان $\cos\theta$ خواهد بود $(H=\cos\theta)$.

محور سینوس‌ها

نقطهٔ Q نیز همان y نقطهٔ P یعنی $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ یا $\sin\theta$ است، به همین دلیل محور y ها را محور سینوس‌ها نیز می‌نامند؛ به عبارت دیگر اگر نقطهٔ P را روی محور y ها تصویر کنیم، نقطهٔ به دست آمده همان $\sin\theta$ خواهد بود $(Q=\sin\theta)$.

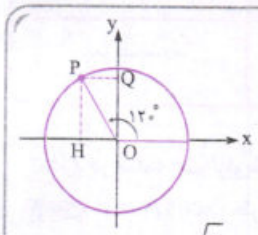
نکته

۱ اگر θ در سایر ربع‌ها قرار گیرد، ممکن است نسبت‌ها منفی هم باشند، چون طول و عرض نقاط، ممکن است منفی شوند.

۲ چون شعاع دایره ۱ است، برای هر زاویهٔ θ، داریم $-۱\le\sin\theta\le۱$ و $-۱\le\cos\theta\le۱$ اما $\tan\theta$ و $\cot\theta$ هر عدد حقیقی می‌توانند باشند.

۳ $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

مثال می‌دانیم نقطهٔ $P(\frac{-۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار داشته و زاویهٔ ایجادشده ۱۲۰° است. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۱۲۰° را به دست آورید.



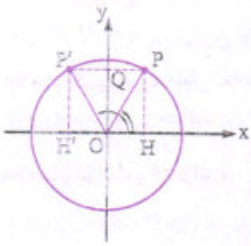
پاسخ

$\sin ۱۲۰^\circ = y = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\cos ۱۲۰^\circ = x = \frac{-۱}{۲}$

$\tan ۱۲۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -\sqrt{۳}$

$\cot ۱۲۰^\circ = \frac{x}{y} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$



توجه دارید که $H=\cos ۱۲۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$ و $Q=\sin ۱۲۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ می‌باشد. سؤال مهمی در این‌جا وجود دارد. آیا بدون داشتن مختصات نقطهٔ P می‌توانستید نسبت‌های زاویهٔ ۱۲۰° را به دست آورید؟

زاویهٔ ۶۰° و ۱۲۰° را در دایرهٔ مثلثاتی رسم می‌کنیم. تصویر هر دو نقطهٔ P و P' روی محور سینوس‌ها (محور y ها) یکسان است، یعنی $\sin ۱۲۰^\circ=\sin ۶۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$. اما دو نقطهٔ H و H' قرینهٔ یکدیگرند. H همان $\cos ۶۰^\circ$ یعنی $\frac{۱}{۲}$ است، پس $H'=\frac{-۱}{۲}$ و لذا $\cos ۱۲۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$ خواهد بود. به عبارت دیگر نسبت‌های زاویهٔ ۱۲۰° از روی نسبت‌های زاویهٔ ۶۰° به راحتی به دست می‌آید.

نکته

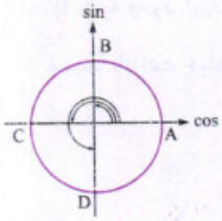
۱ اگر دو زاویه مکمل باشند، تصویر نقطهٔ P روی محور y ها یکسان شده و لذا دو زاویه، سینوس‌های برابر ولی کسینوس‌های قرینه دارند. مثلاً $\sin ۱۳۰^\circ=\sin ۵۰^\circ$ ولی $\cos ۱۳۰^\circ=-\cos ۵۰^\circ$.

۲ دو زاویهٔ مکمل، تانژانت و کتانژانت‌های قرینه دارند. مثلاً $\tan ۱۳۵^\circ=-\tan ۴۵^\circ=-۱$ و $\cot ۱۳۵^\circ=-\cot ۴۵^\circ=-۱$.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۰، ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ درجه



۱) اگر $A=(1,0)$ باشد، زاویهٔ 0° به دست می‌آید، پس:

$$\sin 0^\circ = y_A = 0 \,,\ \cos 0^\circ = x_A = 1 \,,\ \tan 0^\circ = \frac{y_A}{x_A} = 0 \,,\ \cot 0^\circ = \frac{x_A}{y_A} = \frac{1}{0} \text{ تعریف‌نشده}$$

۲) اگر $B=(0,1)$ باشد، زاویهٔ 90° به دست می‌آید، پس:

$$\sin 90^\circ = y_B = 1 \,,\ \cos 90^\circ = x_B = 0 \,,\ \tan 90^\circ = \frac{y_B}{x_B} = \frac{1}{0} \text{ تعریف‌نشده} \,,\ \cot 90^\circ = \frac{x_B}{y_B} = 0$$

۳) اگر $C=(-1,0)$ باشد، زاویهٔ 180° به دست می‌آید، پس:

$$\sin 180^\circ = y_C = 0 \,,\ \cos 180^\circ = x_C = -1 \,,\ \tan 180^\circ = \frac{y_C}{x_C} = 0 \,,\ \cot 180^\circ = \frac{x_C}{y_C} \text{ تعریف‌نشده}$$

۴) اگر $D=(0,-1)$ باشد، زاویهٔ 270° به دست می‌آید، پس:

$$\sin 270^\circ = y_D = -1 \,,\ \cos 270^\circ = x_D = 0 \,,\ \tan 270^\circ = \frac{y_D}{x_D} = \text{تعریف‌نشده} \,,\ \cot 270^\circ = \frac{x_D}{y_D} = 0$$

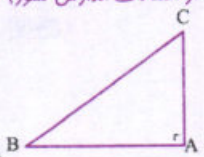
نکته

سینوس در نقاط A و C (صفر و 180°) و کسینوس در نقاط B و D (90°، 270°) برابر با صفر می‌شوند. *(سعی کن یاد بگیری و هر موقع خواستی به دست بیار، نه این‌که حفظ کنی!)*

پس جمع‌بندی این شد که:

θ	0°	90°	180°	270°	(همان صفر درجه) 360°
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	$\frac{0}{1}=0$	$\frac{1}{0}=$ تعریف‌نشده	0	$\frac{-1}{0}=$ تعریف‌نشده	0
$\cot\theta$	$\frac{1}{0}=$ تعریف‌نشده	0	$\frac{-1}{0}=$ تعریف‌نشده	0	تعریف‌نشده

مثال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با زاویهٔ $(A=90^\circ)$، $\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}=?$ *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*



پاسخ $\cos\hat{A}=0$ از طرفی B و C متمم هستند، پس $\cos\hat{C}=\sin\hat{B}$ بنابراین داریم:

$$\cos^2\hat{A}+\cos^2\hat{B}+\cos^2\hat{C}=0+\cos^2\hat{B}+\sin^2\hat{B}=1$$

علامت نسبت‌ها در ربع‌های مختلف

علامت سینوس: اگر مختصات نقطه $P(x,y)$ باشد، $\sin\theta=y$، عرض نقاط (y)، در ربع اول و دوم مثبت است و در ربع سوم و چهارم منفی است، پس اگر θ زاویه‌ای در ربع اول یا دوم باشد، $\sin\theta$ عددی مثبت و اگر θ در ربع سوم یا چهارم باشد، $\sin\theta$ عددی منفی است.

علامت کسینوس: طول نقاط (x) در ربع اول و چهارم مثبت و در ربع دوم و سوم منفی است، پس $\cos\theta$ در ربع اول و چهارم مثبت و در ربع دوم و سوم منفی خواهد بود

علامت تانژانت و کتانژانت: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ است، پس از ضرب علامت‌های $\sin\theta$ و $\cos\theta$، علامت $\tan\theta$ به دست می‌آید. $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$ است، بنابراین علامت $\cot\theta$ با علامت $\tan\theta$ فرقی نمی‌کند.

	ربع اول $x,y>0$	ربع دوم $x<0$ و $y>0$	ربع سوم $x,y<0$	ربع چهارم $x>0$ و $y<0$
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−
	↓ همه مثبت	↓ فقط سینوس مثبت	↓ تانژانت و کتانژانت مثبت	↓ فقط کسینوس مثبت

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال علامت نسبت‌های مثلثاتی، زاویهٔ 1395° را مشخص کنید.

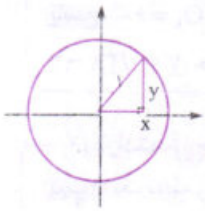
پاسخ هر 360° که چرخش کنیم، برمی‌گردیم سر جای اول. با تقسیم ۱۳۹۵ بر ۳۶۰ داریم: $1395 = \underbrace{3(360)}_{\text{۳ دور کامل}} + 315$

۳ دور کامل را کنار می‌گذاریم و 315° از صفر طی می‌کنیم، پس در ربع چهارم قرار می‌گیریم، پس اگر $\theta = 1395^\circ$ باشد، $\cos\theta > 0$ و سایر نسبت‌ها منفی هستند.

مثال θ زاویه‌ای است که $\sin\theta\tan\theta > 0$ و $\cot\theta < 0$. θ در کدام ربع قرار دارد؟

پاسخ $\sin\theta\tan\theta > 0$ یعنی $\sin\theta$ و $\tan\theta$ هم‌علامت هستند، بنابراین θ می‌تواند در ربع اول یا چهارم باشد. $\cot\theta < 0$ است، پس θ در ربع دوم یا چهارم است. برای این‌که هر دو شرط برقرار گردد، θ باید در ربع چهارم باشد.

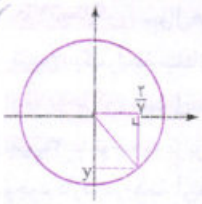
به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی از روی یک نسبت



اگر یکی از نسبت‌ها داده شده باشد، می‌توان سایر نسبت‌ها را از روی آن به دست آورد. با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم: $x^2 + y^2 = 1$. از طرفی $x = \cos\theta$ و $y = \sin\theta$ است.

حالا با داشتن یکی از نسبت‌های سینوس یا کسینوس و قراردادن در این رابطه و توجه به علامت نسبت‌ها، می‌توان سایر نسبت‌ها را به دست آورد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال اگر $\cos\theta = \frac{2}{7}$ و θ در ربع چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ و مختصات نقطهٔ P روی دایره را به دست آورید.



پاسخ

$$\cos\theta = x = \frac{2}{7} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{4}{49} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{45}{49} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{45}{49}} = \pm\frac{3\sqrt{5}}{7}$$

چون θ در ربع چهارم قرار دارد، مقدار منفی برای y قابل قبول است، پس $\sin\theta = y = \frac{-3\sqrt{5}}{7}$. حالا $P(x,y) = P(\frac{2}{7}, \frac{-3\sqrt{5}}{7})$ به دست می‌آید.

از طرفی:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-3\sqrt{5}}{7}}{\frac{2}{7}} = -\frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ و } \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{-3\sqrt{5}}{7}} = -\frac{2}{3\sqrt{5}}$$

مثال اگر $\tan\theta = \frac{3}{4}$ و θ در ربع سوم باشد، سایر نسبت‌ها را به دست آورید.

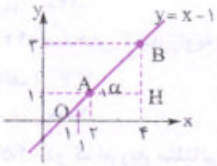
پاسخ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{3}$، اما برای سایر نسبت‌ها:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{y}{x} \Rightarrow 3x = 4y \Rightarrow x = \frac{4}{3}y$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (\frac{4}{3}y)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

چون θ در ربع سوم است، جواب $y < 0$ قابل قبول است، پس $y = \sin\theta = -\frac{3}{5}$ و $\cos\theta = x = \frac{4}{3}(\frac{-3}{5}) = \frac{-4}{5}$. مختصات نقطهٔ $P(x,y) = (\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5})$، به دست می‌آید.

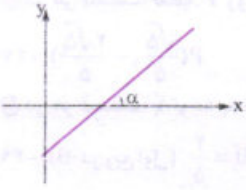
ارتباط شیب خط و تانژانت



نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ را روی خط $y = x - 1$ در نظر بگیرید. شیب این خط برابر ۱ است، چون $m_{AB} = \frac{3-1}{4-2}$.

$$\text{شیب خط} = m = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}}$$

$BH = 3 - 1$ و $AH = 4 - 2$ است. هم‌چنین $\tan\alpha = \frac{BH}{AH}$؛ به عبارت دیگر $\tan\alpha$ با شیب خط AB برابر است. طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{O}_1 = \alpha$، پس $\alpha = 45^\circ \Rightarrow 1 = \text{شیب خط} = \tan\alpha$. در حالت کلی داریم:



اگر زاویهٔ بین یک خط و جهت مثبت محور xها برابر α باشد، شیب خط برابر با $\tan\alpha$ خواهد بود. اگر α زاویهٔ منفرجه باشد، شیب خط یا همان $\tan\alpha$ منفی خواهد بود.

$$\text{شیب خط} = m = \tan\alpha$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

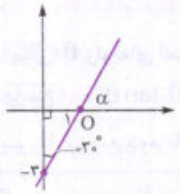
مثال خط $3y-\sqrt{3}x=1$ محور xها را با کدام زاویه قطع می‌کند؟

پاسخ ابتدا معادلهٔ خط را استاندارد می‌کنیم تا شیب خط به دست آید:

$$3y-\sqrt{3}x=1 \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{3}$$

شیب خط برابر $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است، پس $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$ و در نتیجه $\alpha=30^\circ$ خواهد بود.

مثال معادلهٔ خط مقابل را بنویسید.



پاسخ $\hat{O}_1=60^\circ$، پس $\alpha=60^\circ$ به دست می‌آید. $\tan\alpha=\sqrt{3}$ = شیب خط و عرض از مبدأ آن -3 است، بنابراین معادلهٔ خط $y=\sqrt{3}x-3$ خواهد بود.

در امتحان چه خبر؟

تیپ۱ یک نقطه روی دایرهٔ مثلثاتی داده می‌شود. از روی مختصات آن (x_P, y_P) سینوس و کسینوس و سایر نسبت‌ها به دست می‌آید. (یادتان هست که $x_P=\cos\theta$ و $y_P=\sin\theta$)

حالا تو حل کن سؤال‌های ۴۷ تا ۵۴

تیپ۲ یک رابطهٔ مثلثاتی داده می‌شود و علامت θ خواسته می‌شود. با توجه به علامت نسبت‌ها در ربع‌های مختلف علامت θ به دست می‌آید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۳۷ تا ۴۶

تیپ۳ با توجه به برابری شیب خط و $\tan\alpha$ معادلهٔ خط از شما خواسته می‌شود یا این‌که $\tan\alpha$ داده شده و مجهولی در معادلهٔ خط وجود دارد. در همهٔ آن‌ها کافی است $m=\tan\alpha$ قرار دهید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۶۷ تا ۷۷ و ۸۱

تیپ۴ با توجه به محورهای سینوس و کسینوس مقایسهٔ نسبت‌ها از شما خواسته می‌شود.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۵۵ تا ۶۶ و ۷۸ و ۸۲ و ۸۳

سؤال‌های امتحانی

در جای خالی عبارت‌های مناسب قرار دهید.

۳۷- اگر θ زاویه‌ای در ربع ..... و ..... باشد، $\cos\theta$ مثبت است.

۳۸- $\cos 90^\circ=\cdots\cdots$، $\sin 270^\circ=\cdots\cdots$ و $\tan 180^\circ=\cdots\cdots$

۳۹- اگر $(-\frac{1}{7},\frac{\sqrt{48}}{7})$ نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\sin\theta=\cdots\cdots$ و $\cos\theta=\cdots\cdots$.

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

۴۰- $0\le\sin^2\theta\le 1$

۴۱- اگر $90^\circ<\theta<180^\circ$ آن‌گاه $\sin\theta<0$ و $\cos\theta>0$

۴۲- اگر $P(x,y)$ نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، $x^2+y^2=0$.

۴۳- زاویه‌های داده‌شده را روی دایرهٔ مثلثاتی رسم کنید.

الف) 225° ب) 770° پ) -30°

ت) -120° ث) -300° ج) -90°

۴۴- مشخص کنید زاویهٔ θ در کدام ربع قرار دارد و سپس علامت نسبت‌های مثلثاتی را برای آن زاویه بیابید.

الف) 127° ب) 313° پ) -240° ت) -62°

ث) 2000° ج) -730° چ) 540° ح) -270°

۴۵- در کدام ربع مثلثاتی $\sin\theta>0$ و $\tan\theta<0$ خواهد بود؟

۴۶- در کدام ربع مثلثاتی $\sin\theta\cot\theta>0$ ولی $\tan\theta<0$ است؟

در هر قسمت، نقطهٔ P روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ به دست آمده را مشخص کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۴۷- $P(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5})$

۴۸- $P(-\frac{24}{25},\frac{7}{25})$

در هر قسمت، با توجه به نسبت داده‌شده و این‌که θ در کدام ربع قرار دارد، سایر نسبت‌ها را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۴۹- $\cos\theta=\frac{4}{5}$ (θ در ربع اول)

۵۰- $\cos\theta=-0/6$ (θ در ربع دوم)

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۵۱- $\sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ (θ در ربع دوم)

۵۲- $\sin\theta = -\frac{5}{13}$ (θ در ربع چهارم)

۵۳- $\tan\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (θ در ربع دوم)

۵۴- $\cot\theta = \frac{24}{7}$ (θ در ربع اول)

● زیر کلمهٔ درست داخل هر پرانتز خط بکشید. (مانند نمونه)

نمونه: اگر زاویهٔ θ از صفر تا 90° زیاد شود، $(\underline{y},x)$ نقطه، افزایش یافته و لذا $(\cos\theta,\underline{\sin\theta})$ زیاد می‌شود.

۵۵- اگر زاویهٔ θ از صفر تا 180° زیاد شود، (y,x) نقطه، کاهش یافته و لذا $(\cos\theta,\sin\theta)$ کم می‌شود.

۵۶- اگر زاویهٔ θ از 90° تا 270° زیاد شود، (y,x) نقطه، کاهش یافته و لذا $(\cos\theta,\sin\theta)$ کم می‌شود.

۵۷- اگر زاویهٔ θ از 180° تا 360° زیاد شود، (y,x) نقطه، افزایش یافته و لذا $(\cos\theta,\sin\theta)$ زیاد می‌شود.

۵۸- اگر زاویهٔ θ از 270° تا 360° زیاد شود، y نقطه، (افزایش، کاهش) یافته و لذا $(\cos\theta,\sin\theta)$ زیاد می‌شود.

● علامت مناسب قرار دهید.

۵۹- $\cos 40^\circ \ \square \ \cos 20^\circ$

۶۰- $\sin 150^\circ \ \square \ \sin 120^\circ$

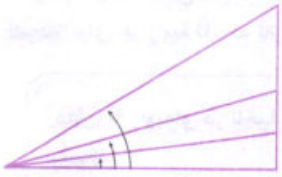
۶۱- $\cos 180^\circ \ \square \ \cos 120^\circ$

۶۲- $\cos 310^\circ \ \square \ \cos 260^\circ$

۶۳- $\sin 270^\circ \ \square \ \sin 240^\circ$

۶۴- $\cos 240^\circ \ \square \ \sin 120^\circ$

۶۵- $\cos(-20)^\circ \ \square \ \sin 240^\circ$



۶۶- با توجه به شکل مقابل، مشخص کنید چرا هر چه زاویه از 0° تا 90° افزایش یابد، $\tan\theta$ افزایش یافته ولی $\cot\theta$ کاهش می‌یابد؟ $\tan 20^\circ$ بزرگ‌تر است یا $\tan 70^\circ$؟ $\cot 20^\circ$ بزرگ‌تر است یا $\cot 70^\circ$؟ یک زاویهٔ α معرفی کنید که $\tan\alpha > \cot\alpha$ و یک زاویهٔ β معرفی کنید که $\tan\beta < \cot\beta$. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

● هر کدام از خطوط زیر با جهت مثبت محور x ها، چه زاویه‌ای می‌سازند؟ *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۶۷- $y - x = 3$

۶۸- $y + x = 5$

۶۹- $\sqrt{3}y - x = 4$

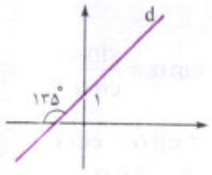
۷۰- $\sqrt{3}y + x = 3$

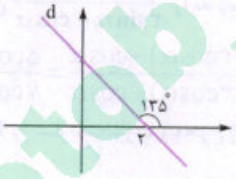
۷۱- $\sqrt{2}y - \sqrt{6}x = 1$

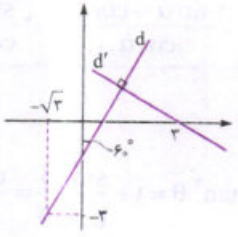
۷۲- $\sqrt{2}y + \sqrt{6}x = 3$

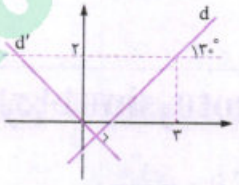
۷۳- معادلهٔ خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x ها، زاویهٔ 60° ساخته و از نقطهٔ $(2,\sqrt{3})$ عبور کند.

● معادلهٔ هر یک از خط‌های زیر را بنویسید.

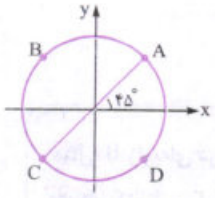
۷۴-


۷۵-


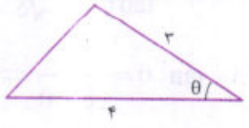
۷۶-


۷۷-


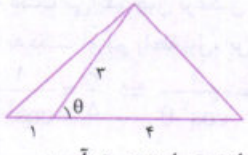
۷۸- با توجه به شکل مقابل، اگر نقطهٔ P روی کمان $\widehat{ABC}$ یا $\widehat{ADC}$ باشد، نسبت‌های $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را با هم مقایسه کنید.



● مساحت شکل‌های زیر را به دست آورید.

۷۹-


$(\cos\theta = \frac{5}{13})$

۸۰-


$(\sin\theta = \frac{3}{4})$

۸۱- خط $ax - (2a+1)y = 4 - 5x$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ 60° می‌سازد. a را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۸۲- اگر $60 < x < 150$، حدود $\sin x$ را بیابید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۸۳- $-60^\circ \le \theta \le 60^\circ$ و $\cos\theta = \frac{m+1}{3}$ است. حدود m را به دست آورید.

۸۴- در مثلث ABC رابطهٔ $\cos(\hat{A} - \hat{B}) + \sin(\frac{\hat{B}}{2} + \hat{C}) = 2$ برقرار است. نوع مثلث را مشخص کنید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

درس ۳ روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

روابط مقدماتی مثلثات

۱ در درس دوم با معرفی دایرهٔ مثلثاتی به رابطهٔ $x^2+y^2=1$ رسیدیم. از طرفی $y=\sin\theta$ و $x=\cos\theta$، بنابراین معروف‌ترین رابطهٔ مثلثات به صورت مقابل به دست می‌آید:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

نکته

این رابطه، ارتباط بین $\sin\theta$ و $\cos\theta$ را برقرار می‌کند. با داشتن یکی از آن‌ها، می‌توانید دیگری را به دست آورید. البته با حل معادله، دو جواب برای دیگری به دست می‌آید. با توجه به این‌که θ در کدام ربع قرار دارد، یکی را انتخاب می‌کنید.

نتیجه

$$1-\cos^2\theta=\sin^2\theta \quad \text{و} \quad 1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$$

۲ در دایرهٔ مثلثاتی تعریف کردیم: $\tan\theta=\frac{y}{x}$. با جای‌گذاری به جای x ، y داریم:

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{و} \quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

کتانژانت هم که عکس نسبت تانژانت است، پس:

نتیجه برای هر زاویهٔ θ، که تانژانت و کتانژانت تعریف شوند، داریم:

$$(\tan\theta)(\cot\theta)=1$$

مثال θ زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم مثلثاتی است که $\cos\theta=-\frac{5}{13}$. سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

پاسخ

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \Rightarrow \sin^2\theta+(-\frac{5}{13})^2=1 \Rightarrow \sin^2\theta=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\pm\sqrt{\frac{144}{169}}=\pm\frac{12}{13} \xrightarrow[\sin\theta>0]{\text{در ربع دوم}} \sin\theta=\frac{12}{13} \Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5} \Rightarrow \cot\theta=-\frac{5}{12}$$

مثال اگر $\tan\alpha=3$ باشد، حاصل $\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+\cos\alpha}$ را به دست آورید.

پاسخ **روش اول**

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3 \Rightarrow \sin\alpha=3\cos\alpha \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم } 3\cos\alpha]{\text{به‌جای } \sin\alpha} \frac{2(3\cos\alpha)-\cos\alpha}{2(3\cos\alpha)+\cos\alpha}=\frac{5\cos\alpha}{7\cos\alpha}=\frac{5}{7}$$

روش دوم برای این‌که نسبت $\tan\alpha$ را بسازیم، صورت و مخرج را بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم، پس:

$$\frac{\frac{2\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{2\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-1}{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+1}=\frac{2\tan\alpha-1}{2\tan\alpha+1}=\frac{2(3)-1}{2(3)+1}=\frac{5}{7}$$

ارتباط $\cos\theta$ و $\tan\theta$ و ارتباط $\sin\theta$ و $\cot\theta$

$$1+\tan^2\theta=1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+\cot^2\theta=1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow 1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

مثال θ زاویه‌ای در ربع دوم بوده و $\tan\theta=\frac{-\sqrt{5}}{5}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

پاسخ کتانژانت که خیلی ساده به دست می‌آید، چون برعکس تانژانت است، پس:

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{5}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=-\sqrt{5}$$

حالا باید از روی تانژانت، کسینوس را به دست آوریم. رابطهٔ اول، این کار را برای ما انجام می‌دهد:

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1+(\frac{-\sqrt{5}}{5})^2=\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1+\frac{5}{25}=\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow \frac{6}{5}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\xrightarrow{\text{دو طرف را معکوس می‌کنیم}} \frac{5}{6}=\cos^2\theta \Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{\frac{5}{6}} \xrightarrow[\cos\theta<0]{\text{در ربع دوم}} \cos\theta=-\sqrt{\frac{5}{6}}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

حالا:

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{-\sqrt{5}}{5}=\frac{\sin\theta}{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}}} \Rightarrow \sin\theta=(-\frac{\sqrt{5}}{5})\times(\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{6}})=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال اگر $\cos\theta = \frac{1}{3}$ باشد، حاصل $(1-\sin^2\theta)(2+\tan^2\theta)$ را به دست آورید.

پاسخ می‌توانیم از روی $\cos\theta$، نسبت‌های $\sin\theta$ و $\tan\theta$ را به دست آورده و جای‌گذاری کنیم، اما بهتر است ابتدا عبارت داده‌شده را ساده کرده و برحسب $\cos\theta$ بنویسیم تا دیگر نیازی به محاسبه نباشد. از رابطهٔ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ نتیجه می‌شود $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

(قُپ اولین پرانتز درست شد). اگر در پرانتز دوم $1+\tan^2\theta$ داشتیم، به جای آن $\frac{1}{\cos^2\theta}$ می‌نوشتیم، پس $1+1=2$ می‌نویسیم:

$$\underbrace{(1-\sin^2\theta)}(2+\tan^2\theta)=(\cos^2\theta)(1+1+\tan^2\theta)=(\cos^2\theta)(1+\frac{1}{\cos^2\theta})=\cos^2\theta+1=(\frac{1}{3})^2+1=\frac{10}{9}$$

اتحادهای مثلثاتی

بار دیگر به رابطهٔ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ برمی‌گردیم که برای هر زاویهٔ دلخواه θ، رابطه برقرار است. به تساوی‌هایی که برای هر زاویهٔ θ (که نسبت‌های مثلثاتی در آن تعریف شده باشند) برقرار باشد، **یک اتحاد مثلثاتی** می‌گوییم.

توجه برای اثبات درستی اتحادهای مثلثاتی، معمولاً از یک طرف تساوی *(طرف شلوغ‌تر)* شروع کرده و با توجه به روابط مقدماتی، به طرف دیگر می‌رسیم.

مثال درستی تساوی $(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1)(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1)=1$ را نشان دهید.

پاسخ روش اول

$$\text{سمت چپ}=(\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha})(\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha})=\frac{\cancel{\sin^2\alpha}}{\cancel{\cos^2\alpha}}\times\frac{\cancel{\cos^2\alpha}}{\cancel{\sin^2\alpha}}=1$$

روش دوم

$$\text{سمت چپ}=(1+\tan^2\alpha-1)(1+\cot^2\alpha-1)=(\tan^2\alpha)(\cot^2\alpha)=(\tan\alpha\cot\alpha)^2=1$$

مثال درستی تساوی $\cos^2\theta(2+\tan^2\theta)=2-\sin^2\theta$ را نشان دهید.

پاسخ

$$\text{سمت چپ}=2\cos^2\theta+\cos^2\theta\tan^2\theta=2\cos^2\theta+\cancel{\cos^2\theta}\times\frac{\sin^2\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}=\underbrace{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{\text{(سمت راست فقط sin داریم، پس به جای } \cos^2\theta \text{ می‌ذاریم } 1-\sin^2\theta)}=2(1-\sin^2\theta)+\sin^2\theta$$

$$=2-2\sin^2\theta+\sin^2\theta=2-\sin^2\theta$$

مثال درستی رابطهٔ $\frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}-1}+\frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}+1}=\frac{2}{\tan^2\theta}$ را نشان دهید.

پاسخ

$$\text{سمت چپ}=\frac{\cos\theta}{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}}+\frac{\cos\theta}{\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta}}=\frac{\cos^2\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\cos^2\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta(1+\cos\theta)+\cos^2\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\cos^3\theta+\cos^2\theta-\cos^3\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=2\cot^2\theta=\frac{2}{\tan^2\theta}$$

مثال درستی تساوی‌های زیر را نشان دهید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

الف) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$

ب) $\sin\alpha.\cos\alpha(2+\tan\alpha+\cot\alpha)=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$

پاسخ

الف) سمت راست: $\frac{\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(\sin\theta)}=\frac{\overbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}^{1}+2\cos\theta+1}{(1+\cos\theta)(\sin\theta)}=\frac{\overbrace{2+2\cos\theta}^{2\cancel{(1+\cos\theta)}}}{\cancel{(1+\cos\theta)}(\sin\theta)}=\frac{2}{\sin\theta}$

ب) سمت راست: $2\sin\alpha\cos\alpha+(\sin\alpha\cos\alpha)(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})+(\sin\alpha\cos\alpha)(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha})$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

در امتحان چه خبر؟

تیپ۱ یک نسبت مثلثاتی (مثلاً $\sin\theta$) داده شده و سایر نسبت‌ها را از شما می‌خواهند. باید با استفاده از اتحادها و ارتباط نسبت‌ها با یکدیگر از نسبت معلوم به سایر نسبت‌ها برسید.
حواستان به علامت آن نسبت در ربعی که θ در آن قرار دارد، باشد.
حالا تو حل کن سؤال‌های ۹۱ تا ۹۴

تیپ۲ اثبات یک اتحاد مثلثاتی است. از طرف شلوغ شروع کنید و با مخرج‌مشترک، تجزیه، اتحاد و ... سعی کنید به طرف دیگر برسید.
حالا تو حل کن سؤال‌های ۹۵ تا ۱۱۵

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۸۵- $\sin^2\theta = (1-\cdots\cdots)(1+\cdots\cdots)$

۸۶- $(\tan\theta+\cot\theta)^2 = \tan^2\theta+\cot^2\theta+\cdots\cdots$

۸۷- $(\sin\theta-\cos\theta)^2 = \cdots\cdots-2\sin\theta\cos\theta$

درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (θ زاویه‌ای است که عبارت‌ها تعریف‌شده هستند.)

۸۸- $\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$

۸۹- $\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\cos^2\theta$

۹۰- $\tan\theta\cot\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta$

۹۱- اگر $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ و θ در ربع اول باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

۹۲- اگر $\theta=225^\circ$ و $\cos\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید. آیا می‌توانستید همین نتایج را با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی هم به دست آورید؟

۹۳- اگر $\tan\theta=\dfrac{1}{4}$ و θ در ربع سوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید.

۹۴- اگر $\cot\theta=-\sqrt{2}$ و θ در ربع چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید.

اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی - برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۹۵- $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$

۹۶- $\cos^4\theta-\sin^4\theta=2\cos^2\theta-1$

۹۷- $(\sin\theta+\cos\theta-1)(\sin\theta+\cos\theta+1)=2\sin\theta\cos\theta$

۹۸- $\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin^2\theta}$

۹۹- $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

۱۰۰- $\dfrac{1+\cot x}{1+\tan x}=\cot x$

۱۰۱- $1-\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\cos x$

۱۰۲- $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\dfrac{4\tan\alpha}{\cos\alpha}$

۱۰۳- $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=(\tan\alpha+1)(\tan\alpha-1)$

۱۰۴- (رابطهٔ مهم) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

۱۰۵- (رابطهٔ مهم) $\sin^6\theta+\cos^6\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

۱۰۶- $\dfrac{1}{\cos^2\theta}-\dfrac{1}{\sin^2\theta}=\dfrac{2\cos^2\theta-1}{\sin^4\theta-\sin^2\theta}$

۱۰۷- $\dfrac{1}{\cos^4\theta}-\dfrac{1}{\cot^4\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{1}{\cot^2\theta}$

۱۰۸- $\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\dfrac{2}{2\cos^2\theta-1}$

۱۰۹- $1-\tan^4\alpha=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{\cos^4\alpha}$

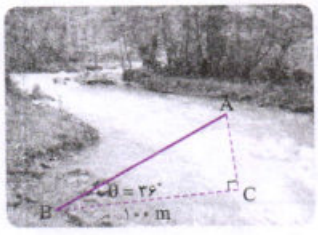
۱۱۰- $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+\dfrac{1-2\sin^2\theta}{\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)}=\dfrac{2\tan\theta}{\tan\theta-1}$

۱۱۱- اگر $\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، حاصل $\sin x\cos x$ را به دست آورید.

۱۱۲- اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد، حاصل $A=|\sin\theta|+|\cos\theta|+|1-\sin\theta|-|1-\cos\theta|$ را به دست آورید.

۱۱۳- اگر $\tan\alpha=2$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{(1+\cos\alpha)(\tan\alpha-\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$ را به دست آورید.

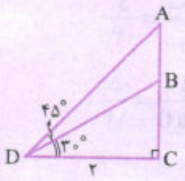
۱۱۴- اگر $\tan\theta=-2$ باشد، حاصل عبارت $A=\dfrac{3\sin^2\theta+2\cos^2\theta}{5\sin^2\theta-4\cos^2\theta}$ را بیابید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*



۱۱۵- شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازهٔ ۱۰۰ متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطهٔ B برسد. اگر زاویهٔ دید این شخص (از نقطهٔ B به نقطهٔ A) 36° باشد و $\sin 36^\circ = 0/6$، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل دوم، منتخب سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل دوم	رشته: تجربی و ریاضی	مدت امتحان: ۶۰ دقیقه	Kheilisabz.om	نمره
۱	جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) اگر نقطهٔ $(-\frac{۱}{۷}, \frac{۴\sqrt{۳}}{۷})$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\sin\theta =$ ..... ب) اگر $\cos^۲\theta\tan\theta > ۰$ و $\sin\theta < ۰$ باشد، θ در ربع ..... است. پ) اگر $\sin\theta\cos\theta = \frac{۱}{۳}$ باشد، $(\sin\theta+\cos\theta)^۲ =$ ..... ت) زاویهٔ خط $y = \sqrt{۳}x + b$ با جهت مثبت محور xها برابر ..... است.				۱
۲	در شکل مقابل طول AB را بیابید.  				۱/۵
۳	مثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر ۱۰ داریم که در آن کسینوس یک زاویهٔ حاده ۰/۸ است. مساحت مثلث را به دست آورید.				۱/۵
۴	می‌دانیم نقطهٔ $P(\frac{۱}{\sqrt{۷}}, \sqrt{\frac{۶}{۷}})$ روی دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ به دست‌آمده را مشخص کنید.				۱/۵
۵	حداقل و حداکثر عبارت $۲ - ۳\sin^۲ x$ را به دست آورید.				۰/۵
۶	اگر $۳۰^\circ < \alpha < ۱۲۰^\circ$ و $\sin\alpha = \frac{۱-۳m}{۴}$ باشد، حدود تغییرات m را بیابید.				۱
۷	اگر x زاویه‌ای در ناحیهٔ دوم باشد و $\cos x = \frac{-۳}{۵}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی را بیابید.				۱
۸	معادلهٔ خطی بنویسید که محور عرض‌ها را در ۲ قطع کند و با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۱۳۵° بسازد.				۱
۹	مقدار عددی عبارت زیر را بیابید. $\frac{\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x} + \frac{\cot^۲ x}{۱+\cot^۲ x}$				۱
	جمع نمرات				۱۰

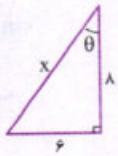
@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ سؤال‌های امتحانی

در همهٔ شکل‌ها، ابتدا با قضیهٔ فیثاغورس، طول ضلع مجهول را به دست می‌آوریم. (چون x طول ضلع است، فقط جواب مثبت قبول است.)

۱- $۶^۲+۸^۲=x^۲ \Rightarrow ۱۰۰=x^۲ \Rightarrow x=۱۰$



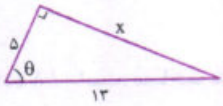
$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۶}{۱۰}$, $\cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۸}{۱۰}$

$\tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۶}{۸}$, $\cot\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}=\frac{۸}{۶}$

۲- $x^۲+۵^۲=۱۳^۲ \Rightarrow x^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \Rightarrow x=۱۲$

$\sin\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}=\frac{۱۲}{۱۳}$, $\cos\theta=\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}=\frac{۵}{۱۳}$

$\tan\theta=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{۱۲}{۵}$, $\cot\theta=\frac{۱}{\tan\theta}=\frac{۵}{۱۲}$



۳- درست است؛ چون ۲۰° و ۷۰° متمم‌اند.

۴- نادرست است؛ $-\sin^۲ ۳۰^\circ=-(\frac{۱}{۲})^۲=-\frac{۱}{۴}$

۵- درست است، $\tan ۴۵^\circ=۱$؛ پس درست است. (هر دو طرف برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.)

۶- $\sin ۶۰^\circ \cos ۳۰^\circ+\sin ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ$

$=(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲})+(\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$

۷- $\tan ۳۰^\circ \cot ۳۰^\circ+\sin^۲ ۳۰^\circ+\cos^۲ ۳۰^\circ$

$=\underbrace{(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\sqrt{۳})}_{۱}+\underbrace{(\frac{۱}{۲})^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}_{\frac{۱}{۴}+\frac{۳}{۴}}=۱+۱=۲$

۸- $۱-۲\sin^۴ ۳۰^\circ+\frac{\cos^۲ ۳۰^\circ}{۲}=۱-۲(\frac{۱}{۲})^۴+\frac{(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲}{۲}$

$=۱-(۲\times\frac{۱}{۱۶})+\frac{\frac{۳}{۴}}{۲}=۱-\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}=\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}$

۹- $\frac{\tan ۶۰^\circ-\tan ۳۰^\circ}{۱+\tan ۶۰^\circ \tan ۳۰^\circ}=\frac{\sqrt{۳}-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱+(\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۳})}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}{۳}}{۱+۱}$

$=\frac{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}}{۲}=\frac{۲\sqrt{۳}}{۲\times۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۰- $\sin ۴۵^\circ=\frac{x}{۸} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{x}{۸} \Rightarrow x=\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}$

$\tan ۴۵^\circ=\frac{x}{y} \Rightarrow ۱=\frac{x}{y} \Rightarrow y=x \Rightarrow y=۴\sqrt{۲}$

۱۱- $\sin ۳۰^\circ=\frac{x}{x+۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{x}{x+۳} \Rightarrow ۲x=x+۳$

$\Rightarrow x=۳$, $\cos ۳۰^\circ=\frac{y}{x+۳} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{y}{۶} \Rightarrow y=۶\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۳\sqrt{۳}$

۱۲- ابتدا زاویهٔ θ را به دست می‌آوریم:

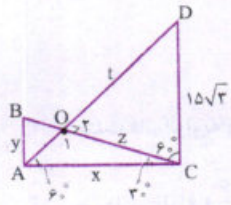
$\tan\theta=\frac{\sqrt{۳}x}{x}=\sqrt{۳} \Rightarrow \theta=۶۰^\circ \Rightarrow \cos\theta=\frac{x}{۱۰}=\frac{۱}{۲}=\frac{x}{۱۰} \Rightarrow x=۵$

۱۳- $\overset{\Delta}{ACD}: \tan ۶۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \sqrt{۳}=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{x} \Rightarrow x=۱۵$

$\overset{\Delta}{ABC}: \tan ۳۰^\circ=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{y}{۱۵} \Rightarrow y=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۳}=۵\sqrt{۳}$

$\hat{O}_۱=\hat{O}_۲=۹۰^\circ \xrightarrow{\overset{\Delta}{ODC}} \sin ۶۰^\circ=\frac{t}{۱۵\sqrt{۳}}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{t}{۱۵\sqrt{۳}} \Rightarrow t=\frac{۴۵}{۲}$



$\overset{\Delta}{ODC}: \cos ۶۰^\circ=\frac{z}{۱۵\sqrt{۳}}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{z}{۱۵\sqrt{۳}}$

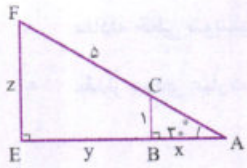
$\Rightarrow z=\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۲}$

۱۴- $\overset{\Delta}{ABC}: \sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱}{AC} \Rightarrow AC=۲$

$\Rightarrow AF=۷$

$\overset{\Delta}{ABC}: \tan ۳۰^\circ=\frac{۱}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۱}{x} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۳}{\sqrt{۳}}=x$

$\Rightarrow x=\sqrt{۳}$



$\overset{\Delta}{AEF}: \sin ۳۰^\circ=\frac{z}{AF}$

$\Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{z}{۷}$

$\Rightarrow z=\frac{۷}{۲}=۳/۵$

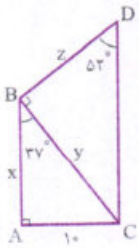
$\overset{\Delta}{AEF}: \tan ۳۰^\circ=\frac{z}{AE} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{۳/۵}{AE}$

$\Rightarrow AE=\frac{۱۰/۵}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=۳/۵\sqrt{۳}$

$AE=x+y \Rightarrow ۳/۵\sqrt{۳}=y+\sqrt{۳} \Rightarrow ۲/۵\sqrt{۳}=y$

۱۵-

$\overset{\Delta}{ABC}: \sin ۳۷^\circ=\frac{۱۰}{y} \Rightarrow ۰/۶=\frac{۱۰}{y} \Rightarrow y=\frac{۱۰}{۰/۶}=\frac{۱۰۰}{۶}=\frac{۵۰}{۳}$



$\overset{\Delta}{ABC}: \cos ۳۷^\circ=\frac{x}{y}$

$\Rightarrow ۰/۸=\frac{x}{\frac{۵۰}{۳}} \Rightarrow x=\frac{۸}{۱۰}\times\frac{۵۰}{۳}=\frac{۴۰}{۳}$

$\overset{\Delta}{BDC}: \tan ۵۳^\circ=\frac{y}{z} \Rightarrow ۱/۲۸=\frac{\frac{۵۰}{۳}}{z}$

$\Rightarrow z=\frac{\frac{۵۰}{۳}}{۱/۲۸}=\frac{\frac{۵۰}{۳}}{\frac{۱۲۸}{۱۰۰}}=\frac{۵۰۰۰}{۳۸۴}\simeq ۱۳$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

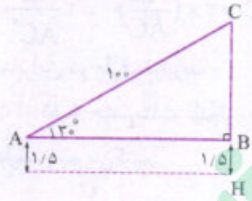
۱۶- کافی است ثابت کنیم دو مثلث ABC و AFE متشابه‌اند، بعد تناسب اضلاع را بنویسیم. خب $\hat{A}$ که مشترک است. بعد $\hat{B}=\hat{E}=90^\circ$؛ پس $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{AEF}$ (ترتیب رأس‌ها رو به صورتی که با هم مساوین بنویس تا نسبت اضلاع رو راحت بنویسی)؛ حالا:

$$\overset{\Delta}{ABC} \approx \overset{\Delta}{AEF} \Rightarrow \frac{AB}{AE}=\frac{BC}{EF} \text{ یا } \frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE}$$

شبیه همین نسبت $\frac{MN}{AN}$ هم برابر همین می‌شود (اصلاً علت این‌که $\tan\hat{A}=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ تعریف می‌کنیم همینه، چون این نسبت $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$ ثابت می‌مونه!)

۱۷- ارتفاع بادبادک $= CH = CB + BH = CB + 1/5$

پس کافی است طول CB را به دست آوریم. چون وتر را داریم و ضلع مقابل به زاویهٔ 30° را می‌خواهیم، پس:



$$\sin 30^\circ = \frac{CB}{AC} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{CB}{100} \Rightarrow CB=50$$

$\Rightarrow$ ارتفاع بادبادک $=50+1/5=51/5$

۱۸-

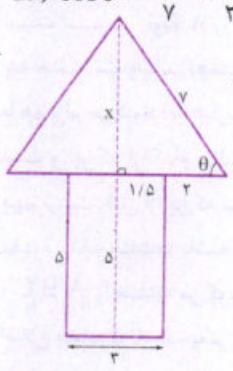
$$\cos 30^\circ = \frac{2000}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2000}{x}$$

$$\Rightarrow x=\frac{4000}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4000\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\sqrt{3}=1/7} x \simeq 2267$$

۲۲۶۷ متر را طی می‌کند تا به زمین برسد.

۱۹- الف) $\cos\theta=\frac{3/5}{7}=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=60^\circ$

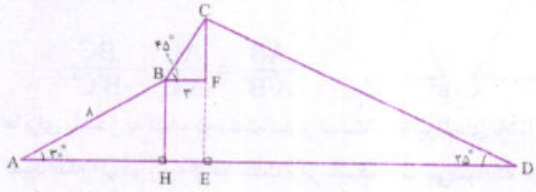


ب) $\sin\theta=\frac{x}{7} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{7}$

$$\Rightarrow x=\frac{7\sqrt{3}}{2}$$

ارتفاع $=\frac{7\sqrt{3}}{2}+5$

۲۰-



$$\overset{\Delta}{BCF}: \tan 45^\circ = \frac{CF}{BF} \Rightarrow 1=\frac{CF}{3} \Rightarrow CF=3$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin 30^\circ = \frac{BH}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{BH}{8} \Rightarrow BH=4 \Rightarrow FE=4$$

$$\overset{\Delta}{DEC}: \sin 25^\circ = \frac{CE}{CD} \Rightarrow 0/42=\frac{7}{CD}$$

$\Rightarrow CD=\frac{7}{0/42}=\frac{100}{6}$ طول سرسره

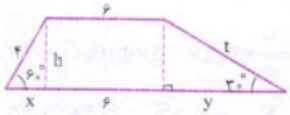
ارتفاع سرسره $= CF + FE = 4+3=7$

۲۱-

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{t} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{t} \Rightarrow t=4\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{h}{4} \Rightarrow h=2\sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{y}{t} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{y}{4\sqrt{3}} \Rightarrow y=6$$



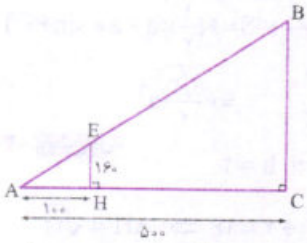
$$\cos 60^\circ = \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow x=2$$

محیط ذوزنقه $= 4+6+t+y+6+x = 24+4\sqrt{3}$

مساحت ذوزنقه $=\frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2}=\frac{(6+14)(2\sqrt{3})}{2}=20\sqrt{3}$

۲۲- همهٔ اعداد را به سانتی‌متر تبدیل می‌کنیم:

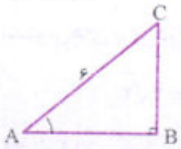


$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{AEH}: \tan A=\frac{160}{100}\\ \overset{\Delta}{ABC}: \tan A=\frac{BC}{500}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{160}{100}=\frac{BC}{500} \Rightarrow BC=800\,cm=8\,m$$

۲۳-

$$\cos A=\frac{AB}{6} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{AB}{6} \Rightarrow AB=4$$

$$4^2+BC^2=6^2 \Rightarrow BC^2=20 \Rightarrow BC=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

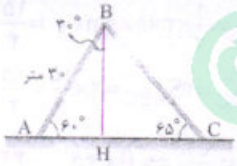


$$\Rightarrow \sin A=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{5}}{6}$$

$$\tan A=\frac{BC}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot A=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

۲۴- از B عمود رسم می‌کنیم:

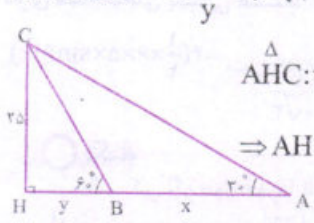


$$\sin 60^\circ=\frac{BH}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{BH}{30} \Rightarrow BH=15\sqrt{3}$$

$$\sin 65^\circ=\frac{BH}{BC} \Rightarrow \frac{85}{100}=\frac{15\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC=\frac{100\times 15\sqrt{3}}{85}=\frac{300\sqrt{3}}{17}$$

۲۵-

$$\overset{\Delta}{BHC}: \tan 60^\circ=\frac{25}{y} \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{25}{y} \Rightarrow y=\frac{25}{\sqrt{3}}$$



$$\overset{\Delta}{AHC}: \tan 30^\circ=\frac{25}{AH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{25}{AH}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{75}{\sqrt{3}}$$

$$AH=x+y \Rightarrow \frac{75}{\sqrt{3}}=\frac{25}{\sqrt{3}}+x$$

$$\Rightarrow x=\frac{50}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{50\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\sqrt{3}=1/7} x \simeq 28/3\,m$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۲۶- $S=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times \sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times 6\times \frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

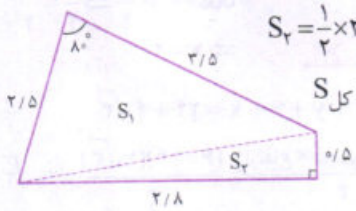
۲۷- $S=\frac{1}{2}a\times a\times \sin 60^\circ=\frac{1}{2}a^2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۲۸-

$S_1=\frac{1}{2}\times 2/5\times 3/5\times \sin 80^\circ=\frac{1}{2}\times 2/5\times 3/5\times 0/98=4/2875$

$S_2=\frac{1}{2}\times 2/8\times 0/5\times \sin 90^\circ=0/7$

$S_{کل}=S_1+S_2=4/9875\simeq 5$



۲۹- شش‌ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a درست می‌شود.

$\xrightarrow{\text{از ب}} S=6(\frac{1}{2}\times a\times a\times \sin 60^\circ)$

$=6\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۳۰- روش اول

$\sin 30^\circ=\frac{h}{4}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{h}{4}\Rightarrow h=2$

$AH^2+h^2=4^2\Rightarrow AH^2+4=16\Rightarrow AH=\sqrt{12}$

چون مثلث متساوی‌الساقین است، ارتفاع، میانه هم هست؛ پس: $AH=HC$ و لذا $AC=2\sqrt{12}$. حالا:

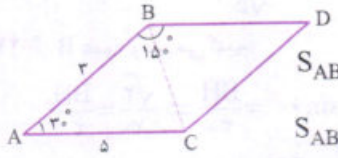
$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times \sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{12}\times \frac{1}{2}$

$=2\sqrt{12}=4\sqrt{3}$

روش دوم $\hat{B}=120^\circ$. در درس بعد نشان می‌دهیم، دو زاویهٔ مکمل، سینوس‌های برابر دارند، پس $\sin 120^\circ=\sin 60^\circ$ و لذا:

$S=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times \sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 16\times \frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$

۳۱- زوایای مجاور، در متوازی‌الاضلاع مکمل‌اند، پس: $\hat{A}=30^\circ$.

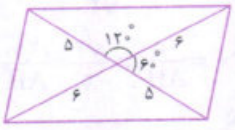


$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 3\times 5\times \sin 30^\circ=\frac{15}{4}$

$S_{ABDC}=2S_{ABC}=2\times \frac{15}{4}=\frac{15}{2}$

۳۲- $S=\frac{1}{2}\times 4\times 5\times \sin\theta=5\sqrt{2}\Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \theta=45^\circ$

۳۳- در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. دو زاویهٔ 60° و 120° مکمل‌اند، پس سینوس‌های برابر دارند؛ بنابراین هر چهار مثلث دارای مساحت‌های یکسانی هستند:



$S_{متوازی‌الاضلاع}=4(\frac{1}{2}\times 6\times 5\times \sin 60^\circ)$

$=30\sqrt{3}$

نکته

در حالت کلی اگر طول قطرها a و b بوده و زاویهٔ بین آن‌ها θ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع می‌شود:

$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

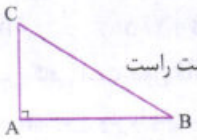
(در این‌جا می‌شد $S=\frac{1}{2}\times 12\times 10\times \sin 60^\circ=30\sqrt{3}$)

۳۴- مثلث ABC که $\hat{A}=90^\circ$ را رسم می‌کنیم:

$\cos^2 B=(\frac{AB}{BC})^2\ ,\ \sin^2 C=(\frac{AB}{BC})^2$

$$\text{سمت چپ}=\frac{(\frac{AB}{BC})^2+(\frac{AB}{BC})^2}{1-(\frac{AB}{BC})^2}=\frac{2\frac{AB^2}{BC^2}}{\frac{BC^2-AB^2}{BC^2}}$$

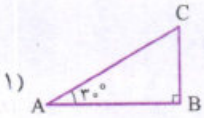
$$=\frac{2AB^2}{\underbrace{BC^2-AB^2}_{\text{فیثاغورس}}}=\frac{2AB^2}{AC^2}$$



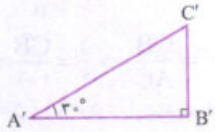
$\text{سمت راست}=2\tan^2 C=2\times(\frac{AB}{AC})^2=2\frac{AB^2}{AC^2}$

بنابراین دو طرف برابرند.

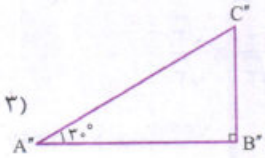
۳۵- **الف)** چند مثلث قائم‌الزاویهٔ مختلف که همهٔ آن‌ها یک زاویهٔ 30° دارند، رسم می‌کنیم:



$\sin 30^\circ=\frac{BC}{AC}$

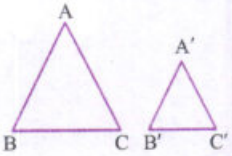


$\sin 30^\circ=\frac{B'C'}{A'C'}$



$\sin 30^\circ=\frac{B''C''}{A''C''}$

نسبت سینوس زاویهٔ A را در هر ۳ مثلث نوشته‌ایم. درست است که سه مثلث متفاوت‌اند (همنهشت نیستند)، ولی نسبت‌های نوشته‌شده با هم برابر می‌شوند؛ به عبارت دیگر $\sin 30^\circ$ همواره برابر یک عدد ثابت است و این‌که از کدام مثلث برای به دست آوردن آن استفاده کنید، مهم نیست. قبل از این‌که مطلب را اثبات کنیم، باید یک یادآوری روی مفهوم تشابه مثلث‌ها داشته باشیم. یادتان هست که دو مثلث ABC و A'B'C' را متشابه می‌گوییم هرگاه زوایا، نظیر به نظیر مساوی بوده و اضلاع متناسب باشند، یعنی:



$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$

اما برای رسیدن به تشابه دو مثلث، نیازی نیست همهٔ شرط‌های بالا را بررسی کنیم، بلکه اگر دو زاویه از دو مثلث برابر باشند، ثابت می‌شود که دو مثلث متشابه‌اند. حالا مثلث‌های ۱ و ۲ طبق حالت دو زاویه، با هم متشابه‌اند:

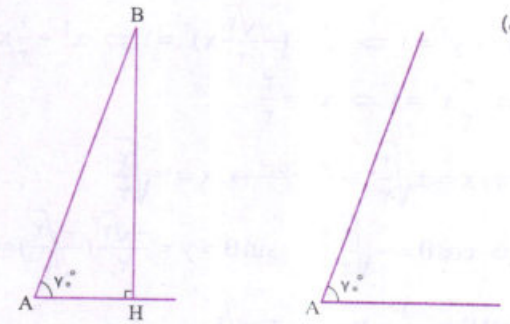
$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A'}\\ \hat{B}=\hat{B'}\end{cases}\xrightarrow{\text{زز}}\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

$$\xrightarrow{\text{نسبت اضلاع}}\frac{AB}{A'B'}=\underbrace{\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}}\Rightarrow\underbrace{\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}}$$

می‌بینید که نسبت‌ها یکسان شدند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

ب)



مرحله اول: با نقاله یک زاویهٔ ۷۰° رسم می‌کنیم.

مرحله دوم: از نقطهٔ دلخواه عمود می‌کنیم تا مثلث درست شود.

مرحله سوم: با خط‌کش، اضلاع را اندازه می‌گیریم. *(مثلاً مثل بالا می‌شه)*

مرحله چهارم: نسبت‌ها را به دست می‌آوریم:

$\sin ۷۰^\circ = \frac{۳/۲}{۳/۴} \simeq ۰/۹۴$

$\cos ۷۰^\circ = \frac{۱/۲}{۳/۴} \simeq ۰/۳۵$

$\tan ۷۰^\circ = \frac{۳/۲}{۱/۲} \simeq ۲/۶۶$

$\cot ۷۰^\circ = \frac{۱/۲}{۳/۲} \simeq ۰/۳۷۵$

با ماشین‌حساب $\sin ۷۰^\circ \simeq ۰/۹۳۹$

$\cos ۷۰^\circ \simeq ۰/۳۴۲$

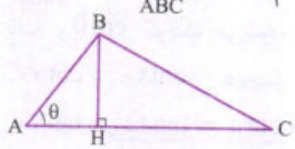
$\tan ۷۰^\circ \simeq ۲/۷۴$

$\cot ۷۰^\circ \simeq ۰/۳۶۳$

۳۶- می‌دانیم $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{۲} = \frac{BH \times AC}{۲}$

از طرفی $\sin\theta = \frac{BH}{AB}$،

پس $BH = AB\sin\theta$. با جای‌گذاری در رابطهٔ بالا داریم:



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{(AB\sin\theta)(AC)}{۲} = \frac{۱}{۲}AB \times AC \times \sin\theta$$

۳۷- اگر θ زاویه‌ای در ربع اول و چهارم باشد، $\cos\theta$ مثبت است.

۳۸- $\cos ۹۰^\circ = ۰$، $\sin ۲۷۰^\circ = -۱$ و $\tan ۱۸۰^\circ = ۰$

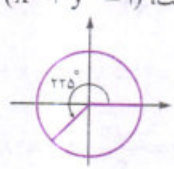
۳۹- اگر $(-\frac{۱}{۷}, \frac{\sqrt{۴۸}}{۷})$ نقطه‌ای روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، $\cos\theta = -\frac{۱}{۷}$ و $\sin\theta = \frac{\sqrt{۴۸}}{۷}$.

۴۰- درست

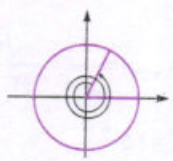
۴۱- نادرست، $(\sin\theta > ۰$ و $\cos\theta < ۰)$

۴۲- نادرست، $(x^۲ + y^۲ = ۱)$

۴۳- الف)

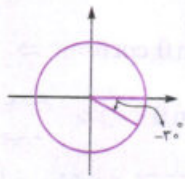


ب)

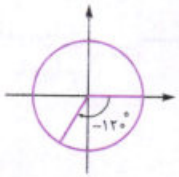


$۷۷۰^\circ = ۲(۳۶۰^\circ) + ۵۰$

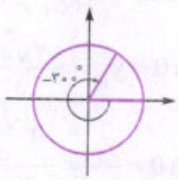
پ)



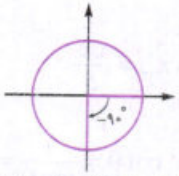
ت)



ث)



ج)



۴۴- اگر زاویه مثبت باشد، در جهت مثلثاتی (خلاف عقربه‌های ساعت) می‌چرخیم و اگر زاویه منفی بود، خب برعکس! بعد علامت نسبت‌ها در هر ربع که یادتان هست و این‌که ۳۶۰° یک دور کامل است؛ پس اگر مضارب صحیح ۳۶۰° بچرخیم، برمی‌گردیم سر جای اول؛ پس می‌توانیم از آن صرف نظر کنیم. حالا ببینید:

الف) $۹۰^\circ < ۱۲۷^\circ < ۱۸۰^\circ \Rightarrow$ ربع دوم

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin ۱۲۷^\circ > ۰ \\ \cos ۱۲۷^\circ < ۰ \\ \tan ۱۲۷^\circ < ۰ \\ \cot ۱۲۷^\circ < ۰ \end{cases} \Rightarrow$$

در ربع دوم فقط سینوس مثبت است و بقیهٔ نسبت‌ها منفی هستند.

ب) $۲۷۰^\circ < ۳۱۳^\circ < ۳۶۰^\circ \Rightarrow$ ربع چهارم $\Rightarrow$ در ربع چهارم فقط کسینوس مثبت و بقیهٔ نسبت‌ها منفی هستند.

پ) $-۲۴۰^\circ = -\underbrace{۱۸۰^\circ}_{\text{نیم دور در جهت منفی}} - ۶۰^\circ \Rightarrow$ ربع دوم

$\Rightarrow$ در ربع دوم فقط سینوس مثبت است و بقیهٔ نسبت‌ها منفی هستند.

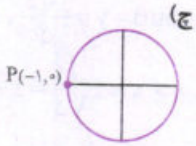
ت) $-۶۲^\circ \Rightarrow$ ربع چهارم $\Rightarrow$ فقط کسینوس مثبت و بقیه منفی هستند.

ث) $۲۰۰۰^\circ = \underbrace{۵(۳۶۰^\circ)}_{\text{با ۵ دور کامل برمی‌گردیم روی صفر}} + \underbrace{۲۰۰^\circ}_{\text{ربع سوم}} \Rightarrow$ ربع سوم

$\Rightarrow$ سینوس و کسینوس منفی و تانژانت و کتانژانت مثبت هستند.

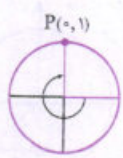
ج) $-۷۳۰^\circ = \underbrace{۲(-۳۶۰^\circ)}_{\text{(می‌ذاریم کنار)}} - ۱۰^\circ \Rightarrow$ ربع چهارم $\Rightarrow$ فقط کسینوس مثبت و بقیه منفی هستند.

چ) $۵۴۰^\circ = \underbrace{۳۶۰^\circ}_{\text{(می‌ذاریم کنار)}} + ۱۸۰^\circ \Rightarrow P(-۱, ۰)$



$$\Rightarrow \begin{cases} \sin ۱۸۰^\circ = y_p = ۰ \\ \cos ۱۸۰^\circ = x_p = -۱ \\ \tan ۱۸۰^\circ = \frac{y}{x} = ۰ \\ \Rightarrow \cot ۱۸۰^\circ = \frac{۱}{۰} \text{ تعریف نشده} \end{cases}$$

ح) $-۲۷۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin(-۲۷۰^\circ) = y_p = ۱ \\ \cos(-۲۷۰^\circ) = x_p = ۰ \\ \tan(-۲۷۰^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{۱}{۰} \text{ تعریف نشده} \\ \cot(-۲۷۰^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{۰}{۱} = ۰ \end{cases}$



۴۵- $\left.\begin{array}{l} \sin\theta > ۰ \Rightarrow \theta \text{ در ربع اول یا دوم} \\ \tan\theta < ۰ \Rightarrow \theta \text{ در ربع دوم یا چهارم} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} \theta$ در ربع دوم

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۴۶- $\sin\theta\cot\theta>0 \Rightarrow$ سینوس و کتانژانت هم‌علامت $\Rightarrow$ θ در ربع اول یا چهارم

$\tan\theta<0 \Rightarrow$ θ در ربع دوم یا چهارم

$\xrightarrow{\cap}$ θ در ربع چهارم

۴۷- $\sin\theta=y_p=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ \cos\theta=x_p=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta=\frac{y_p}{x_p}=\frac{-2\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=-2 \Rightarrow \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{-1}{2}$

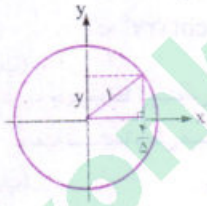
۴۸- $\sin\theta=y_p=\frac{7}{25}\ ,\ \cos\theta=x_p=\frac{-24}{25}$

$\tan\theta=\frac{y_p}{x_p}=-\frac{7}{24} \Rightarrow \cot\theta=-\frac{24}{7}$

۴۹-

$\cos\theta=x=\frac{4}{5}\ ,\ x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$

روی محور xها مشخص می‌کنیم و با مبدأ مثلث درست می‌کنیم.



$y=\pm\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{در ربع اول y مثبت}} y=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \sin\theta=y=\frac{3}{5}$

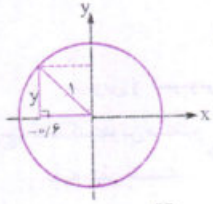
$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{3}{4} \Rightarrow \cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{4}{3}$

۵۰- $\cos\theta=x=-0/6\ ,\ x^2+y^2=1$

$\Rightarrow y^2=1-0/36=0/64$

$y=\pm0/8 \xrightarrow{\text{در ربع دوم y مثبت}} y=0/8$

$\Rightarrow \sin\theta=y=0/8$



$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{0/8}{-0/6}=-\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \cot\theta=-\frac{3}{4}$

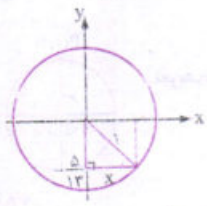
۵۱- $\sin\theta=y=\frac{2\sqrt{5}}{5}\ ,\ x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2=1-(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5} \xrightarrow[x<0]{\text{در ربع دوم}} x=\frac{-\sqrt{5}}{5}=\cos\theta$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=-2\ ,\ \cot\theta=-\frac{1}{2}$

۵۲- $\sin\theta=y=-\frac{5}{13}, x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$

$\Rightarrow x=\pm\frac{12}{13} \xrightarrow[x>0]{\text{در ربع چهارم}} x=\frac{12}{13}=\cos\theta$



$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-5}{12} \Rightarrow \cot\theta=-\frac{12}{5}$

۵۳- $\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2y=-\sqrt{2}x \Rightarrow y=\frac{-\sqrt{2}}{2}x$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+(-\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2=1 \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}x^2=1$

$\Rightarrow \frac{3}{2}x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}} \xrightarrow[x<0]{\text{در ربع دوم}} x=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow \cos\theta=-\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \sin\theta=y=\frac{-\sqrt{2}}{2}(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

۵۴- $\cot\theta=\frac{24}{7}=\frac{x}{y} \Rightarrow 24y=7x \Rightarrow y=\frac{7}{24}x$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow x^2+(\frac{7}{24}x)^2=1 \Rightarrow x^2+\frac{49}{576}x^2=1$

$\Rightarrow \frac{625}{576}x^2=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{576}{625}}=\pm\frac{24}{25}$

$\xrightarrow[x>0]{\text{در ربع اول}} x=\frac{24}{25}=\cos\theta$

$\Rightarrow \sin\theta=y=\frac{7}{24}(\frac{24}{25})=\frac{7}{25} \Rightarrow \tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=\frac{7}{24}$

۵۵- $\cos\theta.x$ ۵۶- $\sin\theta.y$

۵۷- $\cos\theta.x$ ۵۸- $\sin\theta$ افزایش

۵۹- $\cos20^\circ>\cos40^\circ$ ۶۰- $\sin120^\circ>\sin150^\circ$

۶۱- $\cos120^\circ>\cos180^\circ$ ۶۲- $\cos260^\circ<\cos310^\circ$

۶۳- $\sin240^\circ>\sin270^\circ$ ۶۴- $\underbrace{\sin120^\circ}_{(+)}>\underbrace{\cos240^\circ}_{(-)}$

۶۵- $\underbrace{\sin240^\circ}_{(-)}<\underbrace{\cos(-20^\circ)}_{(+)}$ ربع چهارم ربع سوم

۶۶- $\tan\theta$ برابر ضلع مقابل بر ضلع مجاور است. هر چه θ زیاد شود (تا 90°) ضلع مقابل افزایش یافته (صورت کسر) و ضلع مجاور، ثابت است، پس کل کسر یا $\tan\theta$ افزایش می‌یابد. چون $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$، پس اگر θ از صفر تا 90° افزایش یابد، مخرج افزایش یافته و $\cot\theta$ کوچک می‌شود، بنابراین $\tan20^\circ<\tan70^\circ$ ولی $\cot20^\circ>\cot70^\circ$. هم‌چنین $\tan45^\circ=\cot45^\circ=1$. پس $\cot70^\circ<\underbrace{\cot45^\circ}_{1}=\underbrace{\tan45^\circ}_{1}<\tan70^\circ$. در حالت کلی اگر $45^\circ<\alpha<90^\circ$ باشد، داریم $\cot\alpha<\tan\alpha$. شبیه همین اگر $0^\circ<\beta<45^\circ$ باشد، داریم $\cot\beta>\tan\beta$.

۶۷- $y-x=3 \Rightarrow y=x+3 \Rightarrow$ شیب $=$ ضریب $x=1$

$\Rightarrow \tan\alpha=1 \Rightarrow \alpha=45^\circ$

۶۸- $y+x=5 \Rightarrow y=-x+5 \Rightarrow$ شیب $=$ ضریب $x=-1$

$\Rightarrow \underbrace{\tan\alpha=-1}_{\alpha\ \text{منفرجه}} \Rightarrow \alpha=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

۶۹- $\sqrt{3}y-x=4 \Rightarrow \sqrt{3}y=x+4 \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ شیب $=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha=30^\circ$

۷۰- $\sqrt{3}y+x=3 \Rightarrow y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x+\frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ شیب $=\frac{-1}{\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \underbrace{\tan\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{3}}_{\alpha\ \text{منفرجه}} \Rightarrow \alpha=180^\circ-30^\circ=150^\circ$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۷۱- $\sqrt{2}y-\sqrt{6}x=1 \Rightarrow y=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ شیب $=\tan\alpha=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha=60^\circ$

۷۲- $\sqrt{2}y+\sqrt{6}x=3 \Rightarrow y=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}x+\frac{3}{\sqrt{2}}=-\sqrt{3}x+\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ شیب $=\tan\alpha=-\sqrt{3} \Rightarrow \alpha=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

۷۳- شیب خط $=\tan\alpha=\tan 60^\circ=\sqrt{3} \xrightarrow{\text{معادلهٔ خط}} y=\sqrt{3}x+b$

$\xrightarrow[\text{را جای‌گذاری می‌کنیم}]{\text{نقطهٔ }(2,\sqrt{3})} \sqrt{3}=2\sqrt{3}+b \Rightarrow b=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ معادلهٔ خط: $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$

۷۴- معادلهٔ خط d: $m=\tan 45^\circ=1$ (شیب، تانژانت زاویهٔ خط با جهت مثبت محور x هاست.)

$\xrightarrow[b=1]{\text{عرض از مبدا}} y=x+1$

۷۵- $\underbrace{m=\tan 135^\circ=-\tan 45^\circ}_{\text{دو زاویهٔ مکمل تانژانت‌های قرینه دارند.}}=-1$

$\Rightarrow y=-x+b \xrightarrow[(2,0)]{\text{جای‌گذاری نقطهٔ}} 0=-2+b$

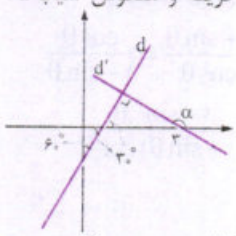
$\Rightarrow b=2 \Rightarrow$ معادلهٔ خط d: $y=-x+2$

۷۶- $m_d=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b \xrightarrow[(-\sqrt{3},-3)]{\text{جای‌گذاری نقطهٔ}} -3=\frac{\sqrt{3}}{3}(-\sqrt{3})+b$

$\Rightarrow b=-2 \Rightarrow$ معادلهٔ d: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2$

خط d' بر d عمود است، پس شیب آن قرینه و معکوس شیب d، یعنی $\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ است.



می‌توانستید شیب d' را از روی $\tan\alpha=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$ نیز به دست آورید.

$y=-\sqrt{3}x+b \xrightarrow[\text{نقطهٔ }(3,0)]{\text{جای‌گذاری}} 0=-3\sqrt{3}+b \Rightarrow b=3\sqrt{3}$

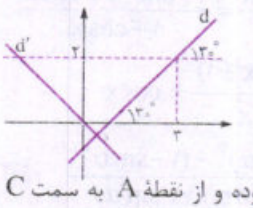
$\Rightarrow$ معادلهٔ d': $y=-\sqrt{3}x+3\sqrt{3}$

۷۷- $m_d=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b \xrightarrow[(3,2)]{\text{جای‌گذاری نقطهٔ}} 2$

$=\sqrt{3}+b \Rightarrow b=2-\sqrt{3} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+(2-\sqrt{3})$ معادلهٔ d

$m_{d'}=m_d$ قرینه و معکوس $=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$

$\xrightarrow{\text{از مبدا هم عبور می‌کند}}$ معادلهٔ d': $y=-\sqrt{3}x$



۷۸- اگر نقطهٔ P، روی کمان $\widehat{ABC}$ بوده و از نقطهٔ A به سمت C حرکت کند، همواره عرض نقطه (y) از طول نقطه (x) بیشتر است، یعنی در این کمان $\cos\theta<\sin\theta$. در کمان $\widehat{ADC}$، عکس این مطلب درست است و $\cos\theta>\sin\theta$. در نقاط A و C، نسبت‌های سینوس و کسینوس مساوی می‌شوند.

۷۹- از روی $\cos\theta$، $\sin\theta$ را به دست می‌آوریم تا بتوانیم از رابطهٔ مساحت استفاده کنیم. با توجه به دایرهٔ مثلثاتی:

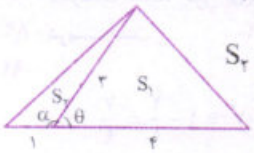
$\cos\theta=\frac{5}{13}=x \Rightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow \frac{25}{169}+y^2=1 \Rightarrow y^2=\frac{144}{169} \Rightarrow y=\pm\frac{12}{13}$

چون θ حاده است، پس $y=\frac{12}{13}=\sin\theta$ است. حالا:

$S=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{12}{13}=\frac{72}{13}$

۸۰-



$S_1=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 12\times\frac{3}{4}=\frac{9}{2}$

$S_2=\frac{1}{2}\times 3\times 1\times\underbrace{\sin\alpha}_{\theta\text{ و }\alpha\text{ مکمل‌اند، پس سینوس‌های برابر دارند.}}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$

$\Rightarrow S_{\text{کل}}=S_1+S_2=\frac{9}{2}+\frac{9}{8}=\frac{45}{8}$

۸۱- شیب خط برابر $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ می‌شود؛ پس باید شیب خط را به دست آورده و مساوی $\sqrt{3}$ قرار دهیم. معادلهٔ خط را مرتب می‌کنیم.

$ax-(2a+1)y=4-5x \Rightarrow \underbrace{ax+5x}_{(a+5)x}-4=(2a+1)y$

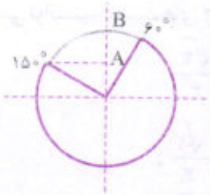
$\xrightarrow{\div(2a+1)} \overset{\text{شیب خط}}{\frac{a+5}{2a+1}}x-\frac{4}{2a+1}=y$

پس: $\frac{a+5}{2a+1}=\sqrt{3} \Rightarrow a+5=2a\sqrt{3}+\sqrt{3}$

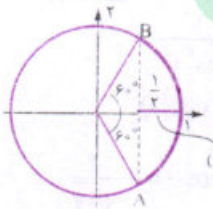
$\Rightarrow \underbrace{a-2a\sqrt{3}}_{(1-2\sqrt{3})a}=\sqrt{3}-5 \Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}-5}{1-2\sqrt{3}}$

(از قصد این جوری دادم؛ همش نباید زند باشه که)

۸۲- اگر زاویهٔ x از 60° تا 150° تغییر کند، $\sin x$ از A تا B (یعنی از $\frac{1}{2}$ تا ۱ تغییر می‌کند)، پس $\frac{1}{2}<\sin x\le 1$. دقت دارید که $\sin x=\frac{1}{2}$ نمی‌تواند باشد ولی $\sin x=1$ می‌تواند باشد (به ازای $x=90^\circ$).



۸۳- ممکن است بنویسید $\underbrace{\cos(-60^\circ)}_{\frac{1}{2}}\le\cos\theta\le\underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}}$، بعد نتیجه بگیرید $\cos\theta=\frac{1}{2}$! اما این کار درست نیست! چرا؟ چون باید ببینیم اگر θ از -60° تا 60° (کمان $\widehat{AB}$) تغییر کند، $\cos\theta$ از کجا تا کجا تغییر می‌کند.



$\cos\theta=x_p$ است *(معلومه x_p از $\frac{1}{2}$ یا ۱ تغییر می‌کنه)*. پس با توجه به دایره معلوم می‌شود $\frac{1}{2}\le\cos\theta\le 1$ تغییر می‌کند. حالا:

$\frac{1}{2}\le\frac{m+1}{3}\le 1 \xrightarrow{\times 3} \frac{3}{2}\le m+1\le 3 \xrightarrow{-1} \frac{1}{2}\le m\le 2$

۸۴- خب می‌دانیم سینوس و کسینوس هر زاویه‌ای کوچک‌تر یا مساوی یک است. حالا چه‌جوری ممکن است جمع آن‌ها برابر ۲ شده باشد؟ بله باید $\cos(\hat{A}-\hat{B})=1$ و $\sin(\frac{\hat{B}}{2}+\hat{C})=1$ باشد.

پس $\hat{A}-\hat{B}=0$ و $\frac{\hat{B}}{2}+\hat{C}=90^\circ$ *(حواست هست دیگه A، B و C بین صفر تا ۱۸۰ هستن)*.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

از طرفی در هر مثلث $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ می‌شود. پس با جای‌گذاری $\hat{A}=\hat{B}$ در این و حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 2\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \\ \times(-1)\ \dfrac{\hat{B}}{2}+\hat{C}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2}\hat{B}=90^\circ \Rightarrow \hat{B}=60^\circ$$

پس مثلث متساوی‌الاضلاع است. $\Rightarrow \hat{A}=60^\circ \Rightarrow \hat{C}=60^\circ$

۸۵- $\sin^2\theta=(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$

۸۶- $(\tan\theta+\cot\theta)^2=\tan^2\theta+\cot^2\theta+2$

۸۷- $(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

۸۸- نادرست است، چون $\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{\cos^2\theta}=|\cos\theta|$

۸۹- درست است. ۹۰- درست است. (هر دو طرف برابر ۱ هستند.)

۹۱-

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-(\frac{\sqrt{2}}{3})^2=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

$\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{\sqrt{7}}{3} \xrightarrow[\cos\theta>0]{\text{در ربع اول}} \cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

۹۲-

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

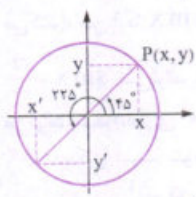
$\Rightarrow \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-(\frac{-\sqrt{2}}{2})^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\xrightarrow[\sin\theta<0]{\text{در ربع سوم}} \sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1 \Rightarrow \cot\theta=1$

با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی و از روی نسبت‌های زاویه 45° هم می‌توانستیم نسبت‌های زاویهٔ 225° را به دست آورید:

$x=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$



$x'=\cos 225^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

به دلیل همنهشتی دو مثلث $y'=\sin 225^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۹۳- رابطهٔ بین $\tan\theta$ و $\cos\theta$ را می‌نویسیم:

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta} \Rightarrow 1+\frac{1}{16}=\frac{1}{\cos^2\theta}$

$\Rightarrow \frac{17}{16}=\frac{1}{\cos^2\theta} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{16}{17}=\cos^2\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}} \xrightarrow[\cos\theta<0]{\text{در ربع سوم}} \cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \frac{1}{4}=\frac{\sin\theta}{-\frac{4}{\sqrt{17}}} \Rightarrow \sin\theta=\frac{-4}{\sqrt{17}}\times\frac{1}{4}=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=4$

۹۴-

$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow 1+2=\frac{1}{\sin^2\theta} \Rightarrow \sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\xrightarrow[\sin\theta<0]{\text{در ربع چهارم}} \sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\Rightarrow -\sqrt{2}=\frac{\cos\theta}{\frac{-\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$

۹۵-

سمت چپ $=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$+\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2$ با استفاده از اتحاد مربع دو جمله

۹۶-

سمت چپ $=\underbrace{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{\text{با اتحاد مزدوج}}$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1$

۹۷-

$(\sin\theta+\cos\theta-1)(\sin\theta+\cos\theta+1)$

$=\underbrace{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cancel{\sin\theta}+\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta}_{1}$

$+\cancel{\cos\theta}-\cancel{\sin\theta}-\cancel{\cos\theta}-1$

$=2\sin\theta\cos\theta+1-1=2\sin\theta\cos\theta$

۹۸-

$\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\frac{2}{1-\cos^2\theta}=\frac{2}{\sin^2\theta}$

۹۹-

روش اول: $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

$\Rightarrow (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)=\cos\theta\cos\theta$

$\xrightarrow{\text{برعکس طرفین وسطین}} \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

روش دوم: $\underbrace{\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1-\sin\theta}{1-\sin\theta}}_{\text{صورت و مخرج را در } 1-\sin\theta \text{ ضرب می‌کنیم تا به طرف دوم نزدیک شویم.}}=\frac{1-\sin^2\theta}{(1-\sin\theta)\cos\theta}$

$=\frac{\cos^2\theta}{(1-\sin\theta)(\cos\theta)}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

۱۰۰-

$\frac{1+\cot x}{1+\tan x}=\frac{1+\frac{\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}$

$=\frac{(\cos x)\cancel{(\sin x+\cos x)}}{(\sin x)\cancel{(\sin x+\cos x)}}=\cot x$

۱۰۱-

$1-\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}=\frac{1+\cos x-\sin^2 x}{1+\cos x}=\frac{1-\sin^2 x+\cos x}{1+\cos x}$

$=\frac{\cos^2 x+\cos x}{1+\cos x}=\frac{\cos x\cancel{(\cos x+1)}}{\cancel{1+\cos x}}=\cos x$

۱۰۲-

$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{(1+\sin\alpha)^2-(1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}$

$=\frac{1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha-(1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha)}{1-\sin^2\alpha}$

$=\frac{4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{4\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{1}{\cos\alpha}=4\tan\alpha\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{4\tan\alpha}{\cos\alpha}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۰۳-

$$\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{1}}{\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$=\tan^2\alpha-1=(\tan\alpha-1)(\tan\alpha+1)$$

۱۰۴- یادآوری می‌کنیم که $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$، پس $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$. روی سمت چپ فکر کنید.

$$\underbrace{\sin^4\theta}_{a^2}+\underbrace{\cos^4\theta}_{b^2}=(\underbrace{\sin^2\theta}_{a}+\underbrace{\cos^2\theta}_{b})^2-\underbrace{2\sin^2\theta\cos^2\theta}_{2ab}$$

$$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

۱۰۵- سمت چپ شما را یاد کدام اتحاد می‌اندازد؟ درست است، چاق و لاغر.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta)^3+(\cos^2\theta)^3$$

$$=\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}\underbrace{(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)}_{\text{از قسمت د}}$$

$$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$$

۱۰۶- در صورت سمت راست فقط $\cos\theta$ می‌بینیم.

$$\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{1}{\sin^2\theta}=\frac{\overbrace{\sin^2\theta-\cos^2\theta}^{\cos\theta}}{\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}_{\sin\theta}}$$

مخرج سمت راست فقط $\sin\theta$ می‌بینیم.

$$=\frac{1-\cos^2\theta-\cos^2\theta}{(1-\sin^2\theta)(\sin^2\theta)}=\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta-\sin^4\theta}$$

$$=\frac{-(2\cos^2\theta-1)}{-(\sin^4\theta-\sin^2\theta)}=\frac{2\cos^2\theta-1}{\sin^4\theta-\sin^2\theta}$$

۱۰۷-

$$\frac{1}{\cos^4\theta}-\frac{1}{\cot^4\theta}=\frac{1}{\cos^4\theta}-\frac{1}{\frac{\cos^4\theta}{\sin^4\theta}}$$

$$=\frac{1}{\cos^4\theta}-\frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}=\frac{1-\sin^4\theta}{\cos^4\theta}$$

$$=\frac{(1-\sin^2\theta)(1+\sin^2\theta)}{\cos^4\theta}=\frac{\cos^2\theta(1+\sin^2\theta)}{\cos^4\theta}$$

$$=\frac{1+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cot^2\theta}$$

۱۰۸-

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}+\frac{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}}{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}}$$

$$=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2}{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$=\frac{2}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)}=\frac{2}{2\cos^2\theta-1}$$

۱۰۹-

$$1-\tan^4\alpha=1-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\overbrace{(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}^{1}}{\cos^4\alpha}$$

به اون‌ور تساوی نگاه کن.

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)}{\cos^4\alpha}$$

$$=\frac{2\cos^2\alpha-1}{\cos^4\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}=\frac{2}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\cos^4\alpha}$$

۱۱۰- قبل از مخرج‌مشترک‌گیری، کسر دوم را ساده می‌کنیم:

$$\frac{1-2\sin^2\theta}{\cos^2\theta(1-\tan^2\theta)}=\frac{1-2\sin^2\theta}{\cos^2\theta(1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta})}$$

$$=\frac{1-2\sin^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{1-2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{1-2\sin^2\theta}{1-2\sin^2\theta}=1$$

(اگه تمرین‌های قبلی رو حل کرده باشی، صورت و مخرج هم آشنا می‌زنن.)

$$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}+1=\frac{\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta}{\underbrace{\sin\theta-\cos\theta}}=\frac{\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\frac{2\tan\theta}{\tan\theta-1}$$

(حالا به سمت راست نگاه کنید.
چه‌جوری میشه $\tan\theta$ تولید کرد؟ همه‌رو تقسیم به $\cos\theta$ کنیم.)

۱۱۱- دو طرف را به توان دو می‌رسانیم تا عبارتی که می‌خواهیم ایجاد شود:

$$(\sin x+\cos x)^2=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\Rightarrow\underbrace{\sin^2x+\cos^2x}_{1}+2\sin x\cos x=\frac{2}{4}$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{-1}{4}$$

۱۱۲- اگر θ زاویه‌ای در ربع دوم باشد، $\sin\theta>0$ ولی $\cos\theta<0$ است. از طرفی $-1\le\sin\theta\le1$ و $-1\le\cos\theta\le1$، بنابراین همواره $1-\sin\theta\ge0$ و $1-\cos\theta\ge0$ می‌باشند، پس:

$$A=\sin\theta-\cos\theta+(1-\sin\theta)-(1-\cos\theta)$$
$$=\sin\theta-\cos\theta+1-\sin\theta-1+\cos\theta=0$$

۱۱۳- می‌توانیم از روی $\tan\alpha$، نسبت‌های دیگر را به دست آورده و جای‌گذاری کنیم ولی بهتر است عبارت داده‌شده را ساده کرده و برحسب $\tan\alpha$ بنویسیم:

$$A=\frac{(1+\cos\alpha)(\tan\alpha-\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}=\frac{(1+\cos\alpha)(\tan\alpha-\sin\alpha)}{1-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{\cancel{(1+\cos\alpha)}(\tan\alpha-\sin\alpha)}{(1-\cos\alpha)\cancel{(1+\cos\alpha)}}=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=\frac{\sin\alpha\cancel{(1-\cos\alpha)}}{\cos\alpha\cancel{(1-\cos\alpha)}}=\tan\alpha\Rightarrow A=2$$

۱۱۴- همهٔ عبارت‌ها را بر $\cos^2\theta$ تقسیم می‌کنیم تا $\tan$ به وجود آید:

$$A=\frac{3\tan^2\theta+2}{5\tan^2\theta-4}=\frac{3(-2)^2+2}{5(-2)^2-4}=\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$$

۱۱۵- ابتدا باید از روی $\sin 36^\circ$ مقدار $\tan 36^\circ$ را به دست آوریم:

$$\cos^2 36^\circ=1-\sin^2 36^\circ=1-0/36=0/64$$

$$\cos 36^\circ=\sqrt{0/64}=0/8$$

$$\tan 36^\circ=\frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}=\frac{0/6}{0/8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

$$\tan 36^\circ=\frac{\text{عرض رودخانه}}{100}\Rightarrow\text{عرض رودخانه}=\frac{3}{4}\times100=75\ \text{متر}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ آزمون جمع بندی فصل دوم

۱- الف) $\sin\theta$ همان عرض نقطه است، پس $\sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

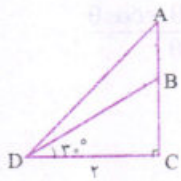
ب) $\underbrace{\cos^2\theta}_{(+)}\tan\theta>0$، پس $\tan\theta>0$ (θ در ربع اول و سوم) و $\sin\theta<0$، پس θ در ربع سوم است.

پ) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1}+2\sin\theta\cos\theta$

$=1+2(\frac{1}{3})=\frac{5}{3}$

ت) $\tan\theta=\sqrt{3}$ پس زاویهٔ خط با جهت مثبت محور xها برابر 60° است.

۲-



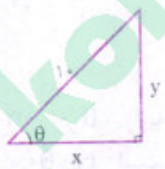
$\tan 30^\circ=\frac{BC}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{BC}{2}$

$\Rightarrow BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\tan 45^\circ=\frac{AC}{2}\Rightarrow 1=\frac{AC}{2}\Rightarrow AC=2$

$\Rightarrow AB=AC-BC=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

۳-



$\cos\theta=0/8\Rightarrow\frac{x}{10}=0/8\Rightarrow x=8$

$8^2+y^2=10^2\Rightarrow y^2=36\Rightarrow y=6$

مساحت مثلث $=\frac{6\times 8}{2}=24$

۴-

$\Rightarrow\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{\frac{6}{7}}}{\sqrt{\frac{1}{7}}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{\frac{1}{\sqrt{7}}}=\sqrt{6}\Rightarrow\cot\theta=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$x_P=\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{7}}\ ,\ y_P=\sin\theta=\sqrt{\frac{6}{7}}$

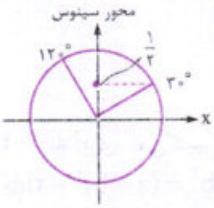
۵- $-1\le\sin x\le 1$ اما $\sin^2 x$ نمی‌تواند منفی باشد، پس $0\le\sin^2 x\le 1$

$\xrightarrow{\times 3}0\le 3\sin^2 x\le 3\xrightarrow{\times(-1)}0\ge -3\sin^2 x\ge -3$

$\xrightarrow{+2}2\ge 2-3\sin^2 x\ge -1$

پس کم‌ترین مقدار برابر ۱- و بیشترین مقدار برابر ۲ است.

۶- اگر α از 30° تا 120° تغییر کند، $\sin\alpha$ از $\frac{1}{2}$ تا ۱ تغییر می‌کند، یعنی $\frac{1}{2}<\sin\alpha\le 1$.



$\Rightarrow\frac{1}{2}<\frac{1-3m}{4}\le 1$

$\xrightarrow{\times 4}2<1-3m\le 4$

$\xrightarrow{-1}1<-3m\le 3$

$\xrightarrow{\div(-3)}-\frac{1}{3}>m\ge -1$

۷-

$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\sin^2 x+(-\frac{3}{5})^2=1$

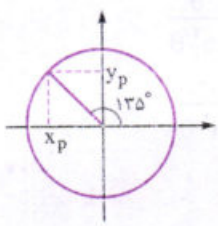
$\Rightarrow\sin^2 x=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

$\Rightarrow\sin x=\pm\frac{4}{5}\xrightarrow[\text{سینوس مثبت}]{\text{در ربع دوم}}\sin x=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$

$\Rightarrow\cot x=\frac{1}{\tan x}=-\frac{3}{4}$

۸-



$\tan 135^\circ=\frac{y_P}{x_P}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$

$\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}=2}y=-x+2$

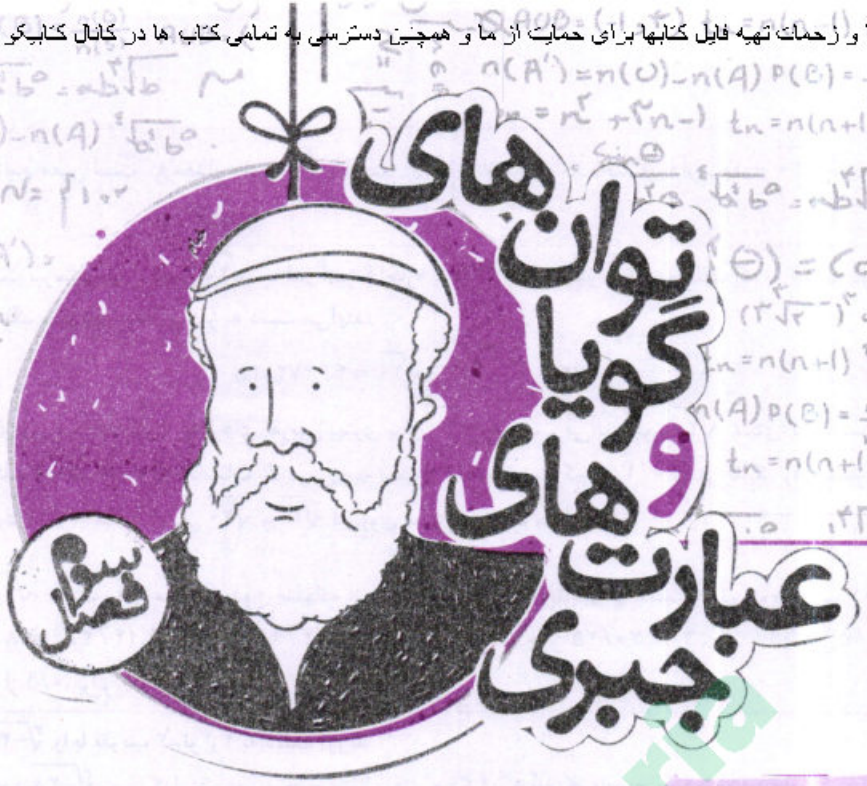
۹-

$\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{\tan^2 x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos^2 x(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x})=\sin^2 x$

$\frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{\cot^2 x}{\frac{1}{\sin^2 x}}=\sin^2 x(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})=\cos^2 x$

$\Rightarrow\sin^2 x+\cos^2 x=1$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکر عضو شوید@kotob_konkoria



درس ۱ ریشه و توان

ریشه‌های دوم و سوم یک عدد

ریشهٔ دوم

اعداد ۲ و ۲− را ریشه‌های دوم عدد ۴ می‌نامیم، چون $۴ = ۲^۲$ و $۴ = (-۲)^۲$. اعداد ۳ و ۳− نیز ریشه‌های دوم عدد ۹ هستند. اعداد منفی ریشهٔ دوم ندارند، چون توان دوم هیچ عددی، منفی نخواهد بود.

پس: عدد b را ریشهٔ دوم عدد a می‌گوییم هرگاه $b^۲ = a$.

اگر $a > ۰$ باشد، $\sqrt{a}$ برابر ریشهٔ دوم مثبت a، تعریف می‌شود. مثلاً $\sqrt{۴} = ۲$ و $\sqrt{۹} = ۳$. (*پس اشتباه نکنی بنویسی* $\sqrt{۴} = \pm ۲$). با این نمادگذاری ریشه‌های دوم عدد ۱۶ می‌شود $\sqrt{۱۶} = ۴$ و $-\sqrt{۱۶} = -۴$.

پس در حالت کلی: ریشه‌های دوم عدد نامنفی a برابر است با $\pm\sqrt{a}$. هر عدد مثبت دوتا ریشهٔ دوم دارد که قرینهٔ یکدیگرند.

نکته

اگر $\sqrt{a} = b$ باشد، a و b هیچ‌کدام منفی نیستند و $b^۲ = a$.

ریشهٔ سوم

عدد ۲ را ریشهٔ سوم عدد ۸ می‌نامیم و می‌نویسیم $\sqrt[۳]{۸} = ۲$ چون $۸ = ۲^۳$. هم‌چنین $\sqrt[۳]{-۸} = -۲$.

همهٔ اعداد مثبت و منفی، ریشهٔ سوم داشته و هر عدد، فقط یک ریشهٔ سوم دارد $\sqrt[۳]{a} = b \Leftrightarrow b^۳ = a$

نکته

همواره $\sqrt[۳]{-a} = -\sqrt[۳]{a}$، یعنی منفی از ریشهٔ سوم بیرون می‌آید.

تذکر نماد $\Leftrightarrow$ به صورت «معادل است با» خوانده می‌شود و مفهوم آن این است که از هر طرف، طرف دیگر را می‌توان نتیجه گرفت.

مثال با استفاده از هر عبارت، یک تساوی توانی بنویسید.

الف) $\sqrt{۳۶} = ۶$ ب) $\sqrt[۳]{-۶۴} = -۴$

پاسخ الف) $\sqrt{۳۶} = ۶ \Leftrightarrow ۶^۲ = ۳۶$ ب) $\sqrt[۳]{-۶۴} = -۴ \Leftrightarrow (-۴)^۳ = -۶۴$

محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های دوم و سوم

اعداد $۱^۲$، $۲^۲$، $۳^۲$، $۴^۲$، $۵^۲$ و ... را **مربع کامل** و اعداد $۱^۳$، $۲^۳$، $۳^۳$، $۴^۳$، $۵^۳$ و ... را **مکعب کامل** می‌نامیم. برای محاسبهٔ تقریبی ریشهٔ دوم یا سوم عدد a، باید ببینیم عدد a بین کدام دو مربع کامل متوالی یا کدام دو مکعب کامل متوالی قرار می‌گیرد. مثلاً می‌خواهیم ببینیم عددهای $\sqrt{۲۰}$ و $\sqrt[۳]{۲۰}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند. داریم:

$$۸ < ۲۰ < ۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{۸} < \sqrt[۳]{۲۰} < \sqrt[۳]{۲۷} \Rightarrow ۲ < \sqrt[۳]{۲۰} < ۳$$

$$۱۶ < ۲۰ < ۲۵ \Rightarrow \sqrt{۱۶} < \sqrt{۲۰} < \sqrt{۲۵} \Rightarrow ۴ < \sqrt{۲۰} < ۵$$

$\sqrt{۲۰}$ بین دو عدد ۴ و ۵ (*چهار و فرده‌ای هستش*) قرار دارد. به اصطلاح می‌گوییم $\sqrt{۲۰}$ با تقریب کم‌تر از ۱، برابر ۴ است.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

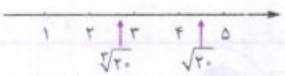
نکته

تقریب کم‌تر از ۱، به این معنی است که مقدار دقیق $\sqrt{20}$ با عدد ۴، کم‌تر از یک واحد اختلاف دارد. مقدار $\sqrt[3]{20}$ با تقریب کم‌تر از ۱، برابر ۲ است.

تقریب‌های بهتر: ممکن است بپرسید مقدار دقیق $\sqrt{20}$ چه‌قدر است؟ اجازه بدهید از سه ماشین‌حساب مختلف که به ترتیب دو، چهار و شش رقم اعشار را نشان می‌دهند، کمک بگیریم؛ عددهای زیر به دست می‌آیند:

$\sqrt{20} = 4/47$ $\qquad$ $\sqrt{20} = 4/4721$ $\qquad$ $\sqrt{20} = 4/472135$

اگر از ماشین‌حساب‌های قوی‌تری استفاده کنیم، مقدارهای تقریبی بهتری برای $\sqrt{20}$ به دست می‌آید. چون $\sqrt{20}$ عددی گنگ است، بسط اعشاری آن تا بی‌نهایت و بدون تناوب ادامه خواهد داشت. با محاسبات بالا درمی‌یابیم مقدار $\sqrt{20}$ با تقریب کم‌تر از ۰/۱ (یعنی تا یک رقم اعشار) می‌شود ۴/۴ و با تقریب کم‌تر از ۰/۰۱ می‌شود ۴/۴۷. مکان تقریبی $\sqrt{20}$ و $\sqrt[3]{20}$ نیز روی محور به صورت مقابل است:



تذکر مقدار تقریبی $\sqrt{20}$ تا یک رقم اعشار را بدون استفاده از ماشین‌حساب هم می‌توانیم به دست آوریم. توجه کنید $(4/1)^2 = 16/81$، $(4/2)^2 = 17/64$، $(4/3)^2 = 18/49$، $(4/4)^2 = 19/36$ و $(4/5)^2 = 20/25$. چون $19/36 < 20 < 20/25$، پس $4/4 < \sqrt{20} < 4/5$ و لذا $\sqrt{20}$ با تقریب کم‌تر از ۰/۱، برابر ۴/۴ خواهد بود.

مثال مقدار عدد $\sqrt[3]{-38}$ را با تقریب کم‌تر از ۱ به دست آورید.

پاسخ باید ببینیم عدد $\sqrt[3]{-38}$، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد. *(دیگه رقم‌های بعد ممیز مهم نیستن)*

می‌توانیم ابتدا منفی را بیرون بیاوریم، پس $\sqrt[3]{-38} = -\sqrt[3]{38}$. حالا: $\underbrace{3^3}_{27} < 38 < \underbrace{4^3}_{64} \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{38} < 4 \Rightarrow -3 > -\sqrt[3]{38} > -4$

بنابراین $\sqrt[3]{-38}$، یا همان $-\sqrt[3]{38}$، با تقریب کم‌تر از ۱، برابر ۴- است. *(عدد کوچک‌تر رو می‌گیریم)*

تعریف ریشهٔ چهارم و پنجم

ریشهٔ چهارم عدد نامنفی a: عدد b را ریشهٔ چهارم عدد a گوییم هرگاه $b^4 = a$.

مثلاً اعداد ۲ و ۲-، ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ هستند، چون $2^4 = 16$ و $(-2)^4 = 16$. مشابه بحث قبلی در مورد ریشهٔ دوم، $\sqrt[4]{16}$ را برابر ریشهٔ چهارم مثبت تعریف کرده و می‌نویسیم $\sqrt[4]{16} = 2$. عدد ۴ را فرجهٔ رادیکال می‌نامیم.

ریشهٔ پنجم عدد a: عدد b را ریشهٔ پنجم عدد a گوییم هرگاه $b^5 = a$.

مثلاً $\sqrt[5]{32} = 2$ چون $2^5 = 32$. شبیه ریشهٔ سوم، همهٔ اعداد مثبت و منفی، فقط یک عدد به عنوان ریشهٔ پنجم خود دارند.

ریشهٔ پنجم a را با $\sqrt[5]{a}$ نمایش می‌دهیم، پس $\sqrt[5]{a} = b \Leftrightarrow b^5 = a$.

مثال حاصل $\sqrt[4]{625}$، $\sqrt[5]{-32}$ و $\sqrt[5]{2^{10}}$ را به دست آورید.

پاسخ $\sqrt[4]{625} = 5$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, $\sqrt[5]{2^{10}} = 2^2$ (چون $(2^2)^5$ می‌شود 2^{10})

مقایسهٔ بین ریشه‌ها

بین ریشه‌های مختلف اعداد، دو نوع مقایسه ممکن است صورت گیرد:

۱- مقایسهٔ ریشه‌های دوم (یا سوم یا ...) اعداد مختلف

اگر عددی کوچک‌تر از عدد دیگری باشد، ریشهٔ دوم (یا سوم یا ...) آن عدد هم کم‌تر از ریشهٔ دوم (یا سوم یا ...) عدد دیگر است. به زبان ریاضی:

$$0 < a < b < c \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} < \sqrt{b} < \sqrt{c} \\ \sqrt[4]{a} < \sqrt[4]{b} < \sqrt[4]{c} \end{cases} \qquad a < b < c \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b} < \sqrt[3]{c} \\ \sqrt[5]{a} < \sqrt[5]{b} < \sqrt[5]{c} \end{cases}$$

مثلاً $\sqrt{5} < \sqrt{23} < \sqrt{24}$ یا $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{20} < \sqrt[3]{27}$ یا $\sqrt[3]{-10} < \sqrt[3]{-1} < \sqrt[3]{-20}$.

۲- مقایسهٔ بین ریشه‌های مختلف یک عدد

این‌جا می‌خواهیم ریشه‌های یک عدد را با خودش یا با هم مقایسه کنیم. بسته به این‌که عدد a در کدام قسمت از محور قرار داشته باشد، حالت‌های مختلفی به وجود می‌آید. در کل می‌توانیم محور را به چهار قسمت تقسیم کنیم. سعی کنید مثال‌های مختلف بزنید تا ببینید در هر قسمت چه اتفاقی می‌افتد:

$a < -1$	$-1 < a < 0$	$0 < a < 1$	$1 < a$
$\cdots > \sqrt[5]{a} > \sqrt[3]{a} > a$	$\cdots < \sqrt[5]{a} < \sqrt[3]{a} < a$	$\cdots > \sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > a$	$\cdots < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a$
(دیگر ریشهٔ زوج نداریم.)	(دیگر ریشهٔ زوج نداریم.)	(اگر $0 < a < 1$ باشد، هر چه ریشهٔ بزرگ‌تر بگیریم، حاصل بزرگ‌تر می‌شود.) مثلاً $\cdots > \sqrt[3]{0/1} > \sqrt{0/1} > 0/1$	(اگر $1 < a$ باشد، هر چه ریشهٔ بزرگ‌تر بگیریم، حاصل کوچک‌تر می‌شود.) مثلاً $\cdots < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} < 2$

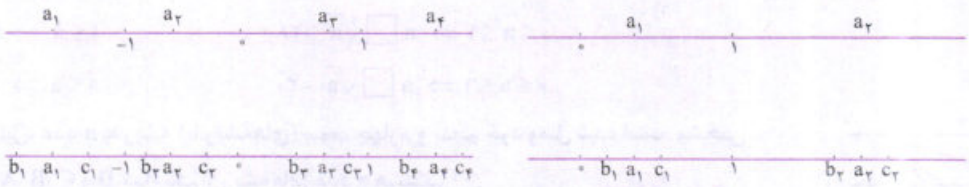
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته

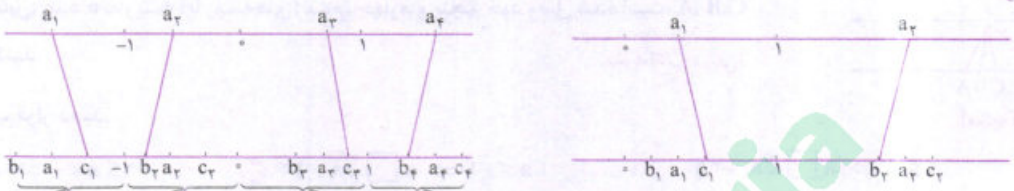
فرد $n : a = \sqrt[n]{a} \Rightarrow \underbrace{a = 0, 1, -1}_{\text{(ریشهٔ فرد این سه عدد خودش میشه)}}$

زوج $n : a = \sqrt[n]{a} \Rightarrow a = 0, 1$

مثال هر یک از اعداد مشخص‌شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص‌شده روی محور پایین وصل کنید. (در نمودار سمت راست، محور پایین متناظر با فرجهٔ زوج (مثلاً فرجهٔ ۲) آن عدد و در نمودار سمت چپ، محور پایین، متناظر با فرجهٔ فرد (مثلاً فرجهٔ ۳) آن عدد است.)



پاسخ



$(a_1 < -1 \to \sqrt[3]{a_1} > a)(-1 < a_2 < 0 \to \sqrt[3]{a_2} < a_2)(0 < a_3 < 1 \to \sqrt[3]{a_3} > a_3)(1 < a_4 \to \sqrt[3]{a_4} < a_4)$

در نمودار سمت راست، اگر عدد بین صفر و یک (مثل a_1) باشد، فرجهٔ زوج آن بزرگ‌تر از خودش می‌شود، پس a_1 به c_1 متصل می‌شود، اما اگر عدد بزرگ‌تر از ۱ باشد (مثل a_2)، فرجهٔ زوج آن کوچک‌تر از خودش می‌شود، پس a_2 به b_2 متصل می‌شود. نمودار سمت چپ نیز به صورت مشابه به دست می‌آید.

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ ریشهٔ دوم یا سوم عددی از شما خواسته می‌شود. باید ببینید کدام عدد به توان ۲ یا ۳ برابر با عدد زیر رادیکال می‌شود.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱ تا ۱۰ و ۲۱ تا ۲۶

تیپ۲ ریشهٔ خاص فلان عدد بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرد.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۱ تا ۲۰

تیپ۳ مقایسهٔ بین ریشه‌ها: اگر مقایسهٔ ریشه‌های دو عدد خواسته‌شده باشد، از محور مقایسه استفاده کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۲۷ تا ۴۳

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با استفاده از عبارت‌ها و اعداد مناسب تکمیل کنید.

۱- $\sqrt[3]{0/001} =$ .....

۲- اعداد ..... ریشهٔ زوج ندارند ولی همهٔ اعداد ریشهٔ ..... دارند.

۳- اعداد مثبت ..... ریشهٔ زوج دارند که ..... یکدیگرند.

۴- $\sqrt[4]{ab}$ عبارتی تعریف‌شده و ناصفر است. در این صورت a و b هر دو ..... یا هر دو ..... هستند.

۵- $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ عبارتی تعریف‌نشده است. در این صورت کسر $\frac{a}{b}$ ..... است، یعنی a و b دارای ..... غیریکسانی هستند.

۶- $\sqrt[4]{\frac{ab^2}{c^4}}$ عبارتی تعریف‌شده و ناصفر است. پس علامت a ..... بوده و علامت‌های b و c ..... می‌تواند باشد.

با استفاده از هر عبارت، یک تساوی توانی بنویسید. (مشابه کتاب درسی)

۷- $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ ۸- $\sqrt[3]{216} = 6$ ۹- $\sqrt[4]{10^{-4}} = 0/1$ ۱۰- $\sqrt[5]{a} = b$

هر کدام از عددهای داده‌شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۱- $\square < \sqrt{13} < \square$ ۱۲- $\square < \sqrt{73} < \square$ ۱۳- $\square < \sqrt[3]{23} < \square$ ۱۴- $\square < \sqrt[3]{100} < \square$

۱۵- $\square < -\sqrt{17} < \square$ ۱۶- $\square < \sqrt[3]{-24} < \square$ ۱۷- $\square < \sqrt[4]{43} < \square$ ۱۸- $\square < \sqrt[5]{94} < \square$

۱۹- $\square < \sqrt[5]{-350} < \square$ ۲۰- $\square < -\sqrt[4]{300} < \square$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۲۱- $\sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۶۹}} =$ ۲۲- $\sqrt[۳]{۰/۱۲۵} =$ ۲۳- $\sqrt[۳]{۱۰^{-۶}} =$

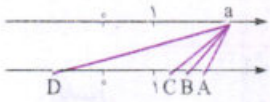
۲۴- $\sqrt[۴]{۸۱} =$ ۲۵- $\sqrt[۴]{۱۰^{-۴}} =$ ۲۶- $\sqrt[۵]{۱۰۲۴} =$

علامت مناسب قرار دهید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

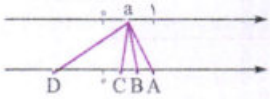
۲۷- $۱ \le a \Rightarrow a \square \sqrt[۴]{a}$ ۲۸- $۰ \le a \le ۱ \Rightarrow a \square \sqrt[۴]{a}$

۲۹- $۱ \le a \Rightarrow a \square \sqrt{a}$ ۳۰- $۰ \le a \le ۱ \Rightarrow a \square \sqrt{a}$

۳۱- در شکل مقابل، عدد a به ریشه (یا ریشه‌های) سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر کدام از A، B، C و D کدام‌یک از ریشه‌های عدد a هستند. *(مشابه کتاب درسی)*



۳۲- در شکل مقابل، عدد a به ریشه (یا ریشه‌های) سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. A، B، C و D را مشخص کنید. *(مشابه کتاب درسی)*



(مشابه کتاب درسی)

علامت مناسب قرار دهید.

۳۳- $-۱ \le a < ۰ \Rightarrow a \square \sqrt[۳]{a}$ ۳۴- $a \le -۱ \Rightarrow a \square \sqrt[۳]{a}$ ۳۵- $۱ \le a \Rightarrow a \square \sqrt[۵]{a}$

۳۶- $۰ \le a \le ۱ \Rightarrow a \square \sqrt[۵]{a}$ ۳۷- $۱ \le a \Rightarrow a \square \sqrt[۳]{a}$ ۳۸- $۰ \le a \le ۱ \Rightarrow a \square \sqrt[۳]{a}$

۳۹- در هر یک از حالات زیر a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای هر یک مثالی بزنید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

الف) $\sqrt[۳]{a} > a$ $a > ۰$ ب) $\sqrt[۳]{a} > a$ $a < ۰$ پ) $\sqrt[۳]{a} = a$ $a \ge ۰$

ت) $\sqrt[۳]{a} = a$ $a < ۰$ ث) $\sqrt[۳]{a} < a$ $a > ۰$ ج) $\sqrt[۳]{a} < a$ $a < ۰$

۴۰- در جای خالی علامت مناسب قرار دهید. *(مشابه کتاب درسی)*

$\sqrt[۳]{۱۰۲} \square \sqrt[۳]{۲۰۱}$ $\sqrt{۱۰۲} \square \sqrt{۲۰۱}$

$\sqrt[۳]{۰/۲} \square \sqrt[۳]{۰/۱}$ $\sqrt{۰/۲} \square \sqrt{۰/۱}$

$\sqrt[۳]{-۸۷} \square \sqrt[۳]{-۳۴}$ $\sqrt[۳]{-۰/۲} \square \sqrt[۳]{-۰/۱}$

۴۱- سه مکعب توپر تو در اختیار داریم. حجم مکعب بیرونی، برابر ۱۲۵ و حجم مکعب درونی ۶۴ است. طول ضلع مکعب میانی در چه بازه‌ای قرار دارد؟ *(مشابه کتاب درسی)*

۴۲- جای خالی را تکمیل کنید.

الف) $۱۷^۵ \square ۲۰^۵$ ب) $(۰/۱)^۵ \square (۰/۱)^۷$ پ) $(-۰/۲)^۵ \square (-۰/۲)^۷$ ت) $(-۷)^۵ \square (-۷)^۷$

۴۳- اگر $۰ < a < ۱$ باشد، عبارت $|a - \sqrt[۳]{a}| + |\sqrt[۳]{a} - \sqrt{a}| + |\sqrt{a} - a|$ را ساده کنید.

درس ۲ ریشه‌ی nام

تعریف $n \ge ۲$ عددی طبیعی است. b را ریشهٔ nام عدد a می‌نامیم هرگاه $b^n = a$.
مثلاً اعداد ۲ و ۲- ریشه‌های ۶ام عدد ۶۴ هستند، چون $۶۴ = ۲^۶$ و $۶۴ = (-۲)^۶$.

نکته

۱ اگر n زوج و a منفی باشد، ریشهٔ nام عدد a وجود ندارد اما اگر n فرد باشد، ریشهٔ nام هر عدد a (مثبت و منفی) وجود دارد.

۲ در حالتی که n زوج و $a > ۰$ باشد، $\sqrt[n]{a}$ را ریشهٔ nام مثبت a تعریف می‌کنیم. مثلاً $\sqrt[۴]{۱۶} = ۲$ نه $\sqrt[۴]{۱۶} = \pm ۲$

۳ در حالتی که n زوج و $a > ۰$ باشد، عدد a، دو ریشهٔ nام به صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ دارد اما اگر n فرد باشد، عدد a، فقط یک ریشهٔ nام به صورت $\sqrt[n]{a}$ دارد. مثلاً ریشه‌های چهارم عدد ۱۶ به‌صورت $\pm\sqrt[۴]{۱۶}$ یا ± ۲ هستند.

۴ در صورتی که n فرد باشد، $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$. *(منفی از فرجهٔ فرد بیرون می‌آید)*

۵ وقتی n زوج بوده و در محاسبات $\sqrt[n]{a}$ نوشته شود، فرض بر این است که عبارت، تعریف‌شده بوده است؛ پس می‌فهمیم $a \ge ۰$ بوده است.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

قواعد ریشه‌گیری

قانون	توضیح	مثال
برای n زوج، $\sqrt[n]{x^n}=\|x\|$.	اگر n زوج باشد، x با قدرمطلق از زیر رادیکال بیرون می‌آید.	۱) $\sqrt[4]{(-2)^4}=\|-2\|=2$ ۲) $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=\|x-1\|$
برای n فرد، $\sqrt[n]{x^n}=x$.	اگر n فرد باشد، توان با فرجه ساده می‌شود.	۱) $\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$ ۲) $\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1$
$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	در ضرب و تقسیم دو عدد با فرجه‌های یکسان می‌توانیم آن‌ها را زیر یک رادیکال ببریم. اگر n زوج باشد، $a,b\geq 0$.	۱) $\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{16}=2$ ۲) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{\frac{x^2}{x}}=\sqrt[3]{x}$
اگر $a>0$ باشد، $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$.	a به توان n رسیده و زیر رادیکال می‌رود (یا برعکس).	۱) $3\sqrt{2}=\sqrt{9\times 2}=\sqrt{18}$ ۲) $-3\sqrt{2}=-\sqrt{9\times 2}=-\sqrt{18}$
$a\sqrt[n]{x}+b\sqrt[n]{x}=(a+b)\sqrt[n]{x}$	برای جمع و تفریق دو عبارت رادیکالی فقط آن‌هایی که قسمت رادیکالی آن‌ها مثل هم است (رادیکال‌های متشابه) با هم جمع یا تفریق می‌شوند.	۱) $\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}=4\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}$ ۲) $\sqrt{18}+\sqrt{2}+4=3\sqrt{2}+\sqrt{2}+4=4\sqrt{2}+4$

تذکر یادتان باشد که $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\neq\sqrt[n]{a+b}$ و $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}\neq\sqrt[n]{a-b}$. *(اگه زیر رادیکال جمع یا تفریق داشتی، نمی‌تونی رادیکال رو پخش کنی مثلاً $\sqrt{4+9}\neq 2+3$)*

مثال عبارت‌های (الف) تا (ح) را تا حد امکان ساده کنید.

پاسخ

الف) $\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$ ($\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$: ساده‌تر)

ب) $\sqrt{3^5a^2}=\sqrt{2^4\times 2a^2}=\sqrt{2^4}\times\sqrt{2}\times\sqrt{a^2}=2^2\sqrt{2}\,|a|=4\sqrt{2}\,|a|$ *(به نمونهٔ شکستن 2^5 دقت کن)*

پ) $\sqrt[3]{a^3b^6c^9}=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{b^6}\times\sqrt[3]{c^9}=ab^2c^3$

لابد می‌پرسید چرا $\sqrt[3]{c^9}=c^3$؟ چون $(c^3)^3=c^9$. توجه دارید توان‌هایی که مضرب فرجه هستند، به فرجه تقسیم شده و از زیر رادیکال آزاد می‌شوند. البته هنگامی که فرجه زوج باشد، در حالت کلی قدرمطلق لازم است، مگر این‌که از علامت‌ها خبر داشته باشیم.

ت) فرض کنید $a,b>0$ $\Rightarrow \sqrt[4]{a^4b^5}=\sqrt[4]{a^4}\times\sqrt[4]{b^4\times b}=|a||b|\sqrt[4]{b}=ab\sqrt[4]{b}$

چون $a,b>0$

ث) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^6}=|\underbrace{1-\sqrt{2}}_{\ominus}|=-(1-\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$

دقت کنید اگر $x\geq 0$ باشد، $|x|=x$ و اگر $x<0$ باشد، $|x|=-x$ یعنی برای برداشتن قدرمطلق، اول باید به علامت کل عدد داخل آن توجه کنید. مثلاً این‌جا چون $1-\sqrt{2}$ منفی است؛ پس قدرمطلق برابر قرینهٔ آن عدد می‌شود.

ج) $\sqrt[5]{\frac{64a^{10}}{b^7c}}=\frac{\sqrt[5]{2^6\times a^{10}}}{\sqrt[5]{b^5\times b^2c}}=\frac{\sqrt[5]{2^5\times 2}\times\sqrt[5]{a^{10}}}{\sqrt[5]{b^5}\times\sqrt[5]{b^2c}}=\frac{2a^2\sqrt[5]{2}}{b\sqrt[5]{b^2c}}$ *(به نمونهٔ شکستن b^7 دقت کن)*

چ) $\sqrt[6]{a}\times\sqrt[6]{b^3}\times\sqrt[6]{a^5b^3}=\sqrt[6]{a^6b^6}=|ab|=ab$

توجه دارید فرض بر این است که $\sqrt[6]{a}$ و $\sqrt[6]{b^3}$ تعریف‌شده هستند، پس a و b هر دو مثبت بوده و لذا $|ab|=ab$ خواهد بود.

ح) $-3\sqrt[3]{54}\times 2\sqrt[3]{4}=-6\sqrt[3]{54\times 4}=-6\sqrt[3]{27\times 2\times 4}=-6\times(3)(2)=-36$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال با توجه به زوج و فرد بودن فرجه و مثبت و منفی بودن a، در مورد حاصل $(\sqrt[n]{a})^n$ بحث کنید.

پاسخ اگر n فرد باشد:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \overbrace{(\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{a})\cdots(\sqrt[n]{a})}^{n\ \text{بار}} = \sqrt[n]{aa\cdots a} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

اگر n زوج باشد، $a \geq 0$ است تا $\sqrt[n]{a}$ تعریف‌شده باشد، پس باز هم:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = |a| = a$$

مثلاً $\sqrt[3]{a^3} = a$ یا $\sqrt{a^2} = a$.

تذکر چرا $\sqrt{a^2} = |a|$ اما $\sqrt{a^2} = a$ است؟ در اولی a می‌تواند مثبت یا منفی باشد، چون با رسیدن به توان دوم، مثبت شده و زیر رادیکال منفی نخواهد بود، اما در دومی، اول رادیکال روی a اثر می‌کند، پس a منفی نیست، بنابراین دیگر نیازی به قراردادن قدرمطلق نیست.

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ با استفاده از قواعد ریشه‌گیری باید یک عبارت رادیکالی را ساده کنید. حواستان به زوج و فرد بودن فرجه باشد.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۴۴ تا ۴۶ و ۵۰ تا ۶۸

تیپ۲ یک رابطه داده می‌شود و از شما خواسته می‌شود که به ازای چه مقادیری (دامنهٔ تعریف) آن رابطه درست است. دقت کنید اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند ولی همهٔ اعداد ریشهٔ فرد دارند.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۴۷ تا ۴۹

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۴۴- حاصل $\sqrt[4]{(-3)^4}$ برابر ..... ولی حاصل $(\sqrt[4]{-3})^4$ ..... است.

۴۵- $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} =$ .....

۴۶- $\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{16} = 0$ .....

۴۷- اگر n زوج بوده و $\sqrt[n]{a^2}$ تعریف‌شده باشد، a چه اعدادی می‌تواند باشد؟ اگر $\sqrt[n]{a^2}$ تعریف‌شده باشد چه‌طور؟ *(مشابه کتاب درسی)*

۴۸- فرض کنیم $a \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}, k \geq 2$ باشد. به ازای کدام مقادیر a, m, k رابطهٔ $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ برقرار است؟ *(مشابه کتاب درسی)*

۴۹- دو عدد b و a مثال بزنید که $\sqrt[4]{ab}$ تعریف‌شده باشد ولی تساوی $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{b}$ برقرار نباشد.

۵۰- با تجزیهٔ اعداد زیر رادیکال، آن‌ها را تا حد امکان از رادیکال خارج کنید. $A = \sqrt[3]{250}$, $B = \sqrt[4]{1024}$, $C = \sqrt[5]{2^2 \times 3^5 \times 5^6}$

ساده کنید. (همهٔ عبارت‌ها تعریف‌شده هستند.) *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۵۱- $\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{(-4)^4}$

۵۲- $\sqrt[4]{243}$

۵۳- $\sqrt[5]{3^5 \times a^{12} \times c^{15}}$

۵۴- $\sqrt[6]{3a^2} \times \sqrt[6]{9a^3} \times \sqrt[6]{12a}$

۵۵- $\sqrt[9]{\left(\frac{27}{a^6}\right)^3}$

۵۶- $\frac{2}{\sqrt[7]{a^2}} \times \sqrt[7]{16a^4} \times \sqrt[7]{8a^5}$

۵۷- $\sqrt[5]{\frac{32}{a^6}} \div \sqrt[5]{\frac{-4}{a}}$

۵۸- $\frac{\sqrt[5]{-2^8}}{\sqrt[5]{2^{-2}}}$

۵۹- $(16^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}} + \sqrt[3]{1+\sqrt{49}}$

حاصل را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

۶۰- $a > 0 , b > 0 \Rightarrow \sqrt[6]{a^6} + \sqrt[7]{b^7} = \cdots$

۶۱- $a > 0 , b < 0 \Rightarrow \sqrt[6]{a^6} + \sqrt[7]{b^7} = \cdots$

۶۲- $a < 0 , b > 0 \Rightarrow \sqrt[6]{a^6} + \sqrt[7]{b^7} = \cdots$

۶۳- $a < 0 , b < 0 \Rightarrow \sqrt[6]{a^6} + \sqrt[7]{b^7} = \cdots$

۶۴- می‌دانیم همواره $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < a^n < b^n$ که $n \in \mathbb{N}$. با توان‌رسانی مناسب، دو طرف را مقایسه کنید.

الف) $\sqrt{2} \square \sqrt[3]{4}$ ب) $\sqrt[5]{3} \square \sqrt[4]{2}$ پ) $\sqrt[3]{0/1} \square \sqrt[4]{0/1}$

ت) $\sqrt{\frac{1}{2}} \square \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ث) $3^{20} \square 2^{30}$ ج) $5^{-16} \square 2^{-8}$

۶۵- حاصل $A = \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5} + \sqrt[6]{(\sqrt{3}-2)^6} + \sqrt[7]{(1-\sqrt{3})^7}$ را به دست آورید.

۶۶- اگر $0 < a < 1$، حاصل $\sqrt{a^2} + \sqrt[4]{(a-1)^4} + \sqrt[6]{(1-a)^6}$ را به دست آورید.

۶۷- اعداد پشت رادیکال را، در صورت امکان، به زیر رادیکال ببرید. (مانند نمونه)

الف) $2\sqrt[6]{3}$ ب) $3\sqrt[3]{-2}$ نمونه $2\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2^3 \times 7} = \sqrt[3]{56}$

پ) $\frac{\sqrt[5]{3}}{2}$ ت) $-2\sqrt[5]{3}$ ث) $-2\sqrt[4]{3}$

۶۸- الف) با مربع کامل کردن زیر رادیکال، حاصل عبارت $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

ب) حاصل عبارت $A = \sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$ را به دست آورید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

درس ۳ توان‌های گویا

در سال گذشته توان‌های صحیح اعداد را تعریف کردیم. دانستید که $2^3 = 2\times2\times2 = 8$ و $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. اما توان گویای (کسری) یک عدد، چگونه تعریف می‌شود؟

تعریف فرض کنید $a > 0$ باشد. برای دو عدد طبیعی m و n، توان کسری a، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(n \geq 2) \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$ (مفرج توان، میره تو فرجه)

مثلاً: $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$، $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ و $7^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{7^2}$.

نکته

۱ در استفاده از توان‌های گویا، فرض می‌کنیم پایه (a) حتماً مثبت است. بنابراین اگر پایه منفی باشد، توان‌های کسری را تعریف نمی‌کنیم. مثلاً $(-2)^{\frac{1}{5}}$ را تعریف نمی‌کنیم.

۲ برای توان‌های منفی گویا هم تعریف می‌کنیم:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

مثال اعداد توان‌دار مقابل را به شکل رادیکالی و برعکس (در صورت امکان) بنویسید.

الف) $5^{\frac{1}{4}}$ ب) $2^{\frac{2}{7}}$ پ) $\sqrt[3]{-2}$ ت) $(-2)^{\frac{4}{6}}$

پاسخ

الف $5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5^1}$

ب $2^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{2^2} = \sqrt[7]{4}$

پ $\sqrt[3]{(-2)^1}$ را نمی‌توانیم به صورت $(-2)^{\frac{1}{3}}$ بنویسیم، چون پایه نباید منفی باشد.

ت $(-2)^{\frac{4}{6}}$ را تعریف نمی‌کنیم، چون پایه منفی است.

تذکر طبق مطالب درس قبلی، $\sqrt[3]{-2}$ تعریف‌شده است، اما نمی‌توانیم آن را به صورت $(-2)^{\frac{1}{3}}$ بنویسیم، چون در تعریف توان کسری فرض کردیم، پایه مثبت است. ممکن است بپرسید چه مشکلی در اثر منفی‌بودن پایه به وجود می‌آید؟ ببینید $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ است.

حالا با توجه به تساوی مقابل، به تناقض خواهیم رسید.

$$\underbrace{\sqrt[3]{(-2)^1}}_{\text{منفی}} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \underbrace{\sqrt[6]{4}}_{\text{مثبت}}$$

برای این‌که دچار این مشکلات نشویم، در استفاده از توان‌های کسری، فرض می‌کنیم پایه مثبت باشد. البته این را هم بگویم که ریاضی‌دانان برای پایه‌های منفی در سطوح بالاتر، تعریفی ارائه کرده‌اند، اما کتاب درسی شما، کاری به آن بحث‌ها ندارد.

قواعد توان‌های گویا

قواعدی که برای توان‌های صحیح برقرار است، برای توان‌های گویا هم برقرار است. اگر s و r دو عدد گویا باشند، داریم:

قانون	توضیح	مثال
$a^r \times a^s = a^{r+s}$	در ضرب اگر پایه‌ها برابر باشند، توان‌ها جمع می‌شوند.	$\sqrt{2}^3 \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^{-2} = (\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^5$
$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$	در تقسیم اگر پایه‌ها برابر باشند، توان‌ها کم می‌شوند.	$\frac{2^5}{(\sqrt{2})^3} = \frac{2^5}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{5-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7}$
$(a^r)^s$	توان r در s ضرب می‌شود.	$(\sqrt{2})^3 = (2^{\frac{1}{2}})^3 = 2^{\frac{3}{2}}$
$(ab)^r = a^r \times b^r$ $(\frac{a}{b})^r = \frac{a^r}{b^r}$	در ضرب یا تقسیم توان r برای هر دو می‌آید.	$(x^2y)^3 = (x^2)^3y^3 = x^6y^3$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$	فرجه‌ها در هم ضرب می‌شود.	$\sqrt[5]{\sqrt{2}} = \sqrt[10]{2}$
$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$	فرجه و توان هر دو را می‌توانیم در k ضرب کنیم $(k \in \mathbb{N})$.	$\underbrace{\sqrt[2]{3^1}}_{3^{\frac{1}{2}}} = \underbrace{\sqrt[4]{3^2}}_{3^{\frac{2}{4}}} = \underbrace{\sqrt[6]{3^3}}_{3^{\frac{3}{6}}}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال عدد $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}$ را با توان گویا نوشته، ساده کرده و دوباره به صورت رادیکالی بنویسید.

پاسخ روش اول

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{2^{\frac{1}{3}}} = (2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$$

روش دوم با توجه به $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$، داریم:

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{2}$$

مثال عدد $\sqrt[3]{7\sqrt{7}}$ را به صورت عبارتی با یک رادیکال بنویسید.

پاسخ روش اول

$$\sqrt[3]{7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{7\times 7^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{7^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{7^{\frac{3}{2}}} = 7^{\frac{\frac{3}{2}}{3}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

روش دوم

$$\sqrt[3]{7\sqrt{7}} = \sqrt[3]{\sqrt{7^2\times 7}} = \underbrace{\sqrt[3]{\sqrt{7^3}}}_{\text{فرجه‌ها ضرب}} = \sqrt[6]{7^3} = 7^{\frac{3}{6}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$$

مثال عدد $\sqrt[5]{-2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ را به صورت عبارتی با یک رادیکال بنویسید.

پاسخ می‌دانیم اگر فرجه فرد باشد، منفی از آن بیرون می‌آید، پس آن را بیرون می‌آوریم، یعنی خواهیم داشت: $-\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

حالا از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم:

$$\sqrt[5]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{\sqrt{2\times 2^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt[5]{2\sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[5]{2\times 2^{\frac{\frac{3}{2}}{3}}} = \sqrt[5]{2\times 2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[5]{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{\frac{3}{2}}{5}} = 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$$

($\sqrt[5]{2^{\frac{3}{2}}}$ رو می‌تونستی $(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{5}}$ هم بنویسی و بعد $2^{\frac{3}{10}}$)

پس حاصل عدد خواسته‌شده می‌شود $-\sqrt[10]{8}$.

مثال عدد $\sqrt[3]{5}$ را با فرجهٔ ۶ و فرجهٔ ۹ بنویسید.

پاسخ

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \ , \ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{3}{9}} = \sqrt[9]{5^3} = \sqrt[9]{125}$$

مثال اگر $\sqrt[6]{x} = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\sqrt{x}$ را به دست آورید.

پاسخ $\frac{2}{3} = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}$. اگر دو طرف را به توان ۳ برسانیم، می‌شود:

$$(x^{\frac{1}{6}})^3 = (\frac{2}{3})^3 \Rightarrow \underbrace{x^{\frac{3}{6}}}_{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{27} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{8}{27}$$

مثال اگر $A = \sqrt[6]{9\sqrt[4]{27}}(\frac{1}{3})^{-\frac{2}{3}}$ باشد، آن‌گاه حاصل عبارت $(\sqrt[4]{3}A)^{-\frac{8}{11}}$ کدام است؟

پاسخ ابتدا حاصل A را به دست می‌آوریم:

$$A = \sqrt[6]{3^2\times 3^{\frac{3}{4}}}(\frac{1}{3})^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[6]{3^{\frac{11}{4}}}\times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{11}{24}}\times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{11+16}{24}} = 3^{\frac{27}{24}} = 3^{\frac{9}{8}}$$

$$(\sqrt[4]{3}A)^{-\frac{8}{11}} = (3^{\frac{1}{4}}\times 3^{\frac{9}{8}})^{-\frac{8}{11}} = (3^{\frac{11}{8}})^{-\frac{8}{11}} = 3^{\frac{11}{8}\times\frac{-8}{11}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

مثال اگر $A = \sqrt[7]{5\sqrt[3]{625}}(\frac{1}{25})^{-\frac{7}{3}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt[5]{32A}$ را به دست آورید.

پاسخ

$$A = \sqrt[7]{5^1\times 5^{\frac{4}{3}}}\times 25^{\frac{7}{3}} = \sqrt[7]{5^{\frac{7}{3}}}\times (5^2)^{\frac{7}{3}} = 5^{\frac{7}{3}\times\frac{1}{7}}\times 5^{\frac{14}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{14}{3}} = 5^{\frac{15}{3}} = 5^5$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{32A} = \sqrt[5]{2^5\times 5^5} = \sqrt[5]{10^5} = 10$$

مثال عدد $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}$ را با یک رادیکال بنویسید.

پاسخ ابتدا باید فرجه‌ها را یکسان و سپس اعداد را زیر یک رادیکال ببریم. هر دو فرجه را به ۶ تبدیل می‌کنیم:

$$\sqrt[2]{2} = \sqrt[2\times 3]{2^3} = \sqrt[6]{8} \ , \ \sqrt[3]{3} = \sqrt[3\times 2]{3^2} = \sqrt[6]{9} \Rightarrow \sqrt{2}\times\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{8}\times\sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{72}$$

مثال حاصل $A = \sqrt{\sqrt{3}-1}\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}$ را به دست آورید.

پاسخ ابتدا رادیکال‌ها را هم‌فرجه می‌کنیم:

$$\sqrt{\sqrt{3}-1} = \sqrt[4]{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[4]{3+1-2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{4-2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[4]{4-2\sqrt{3}}\times\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})} = \sqrt[4]{16-12} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال فرض کنید $x > 0$. معادلهٔ $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[6]{15}$ را حل کنید.

پاسخ

$$\sqrt[3]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x.x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{\frac{3}{2}}{3}} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[6]{15} \xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{دو طرف را به توان ۲}} (x^{\frac{1}{2}})^2 = \sqrt[6]{15}^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[6]{15^2} = 15^{\frac{2}{6}} = 15^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{15} \Rightarrow x = \sqrt[3]{15}$$

مثال حاصل عبارت $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}.(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}})$ را به دست آورید. *(کنکور ریاضی ۹۳)*

پاسخ ابتدا حاصل $\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$ را به دست می‌آوریم. عبارت‌های زیر رادیکال مزدوج هم هستند، پس عبارت را مساوی A قرار داده و به توان ۲ می‌رسانیم تا ساده شود:

$$A = \underbrace{\sqrt{2-\sqrt{3}}}_{a} + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{3}}}_{b} \Rightarrow A^2 = \underbrace{2-\sqrt{3}}_{a^2} + \underbrace{2+\sqrt{3}}_{b^2} + \underbrace{2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}_{2ab} = 4+2\sqrt{4-3} = 4+2 = 6$$

پس $A = \sqrt{6}$ می‌شود. از طرفی داریم:

$$\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{4\times 2}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{6}\times\sqrt{2} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$$

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ تبدیل یک عبارت رادیکالی به توان گویا و استفاده از قواعد توان‌های گویا برای ساده کردن عبارت‌های رادیکالی، سؤال مهم این بخش است. دقت دارید که $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

حالا تو حل کن سوال‌های ۶۹ تا ۸۶ و ۸۸ و ۸۹ و ۹۹ و ۱۰۰

تیپ۲ برای مقایسهٔ دو عدد رادیکالی می‌توانیم آن‌ها را هم‌فرجه کنیم یا این‌که آن‌ها را به توان یکسان برسانیم که رادیکال‌ها از بین بروند.

حالا تو حل کن سوال ۸۷

تیپ۳ برای ضرب و تقسیم دو عدد رادیکالی، ابتدا باید آن‌ها را هم‌فرجه کنیم.

حالا تو حل کن سوال‌های ۹۰ تا ۹۳

تیپ۴ حل معادلات دارای مجهول با توان گویا: سعی می‌کنیم با توان‌رسانی مناسب، رادیکال‌ها را از بین ببریم.

حالا تو حل کن سوال‌های ۹۴ تا ۹۸

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

۶۹- $(\sqrt{2})^{-1/5}$ با پایهٔ ۲ به صورت ..... نوشته می‌شود.

۷۰- $\sqrt[3]{0/25}$ با پایهٔ ۲ به صورت ..... نوشته می‌شود.

۷۱- $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{.....}$

ابتدا عبارت‌ها را به صورت توان کسری نوشته و سپس آن‌ها را با یک رادیکال نمایش دهید. $(a > 0)$ *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۷۲- $\sqrt[5]{\sqrt{27}}$ ۷۳- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{a}}}$ ۷۴- $2\sqrt[7]{2\sqrt[5]{2}}$ ۷۵- $\sqrt{8^{-1/5}}$

۷۶- $\dfrac{\sqrt[3]{8\sqrt{32}}}{\sqrt[4]{64\sqrt{2}}}$ ۷۷- $\sqrt[3]{-3\sqrt[4]{27}}$ ۷۸- $((\sqrt[6]{81})^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}$

هر عدد را با فرجهٔ خواسته‌شده بنویسید.

۷۹- $\sqrt{6}$ را با فرجه‌های ۶ و ۱۲

۸۰- $\sqrt[3]{7}$ را با فرجه‌های ۹ و ۱۵

۸۱- $\sqrt[4]{4}$ را با فرجه‌های ۲ و ۸

۸۲- $\sqrt[6]{27}$ را با فرجهٔ ۴

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورده و به صورت رادیکالی نمایش دهید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۸۳- $\sqrt[5]{25}\times 125^{-\frac{2}{5}}$ ۸۴- $\frac{1}{\sqrt{2}}\times 4^{-\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{3}{5}}$ ۸۵- $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{3}$ ۸۶- $\sqrt{5}\times\sqrt[3]{3}\div\sqrt[4]{4}$

۸۷- با یکی‌کردن فرجه‌ها، اعداد زیر را مقایسه کنید. (مانند نمونه) نمونه $\sqrt{2}\ \square\ \sqrt[3]{3} \Rightarrow \sqrt[6]{2^3}\ \square\ \sqrt[6]{3^2} \Rightarrow \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$

الف) $\sqrt{3}\ \square\ \sqrt[4]{4}$ ب) $\sqrt{5}\ \square\ \sqrt[3]{6}$ پ) $\sqrt[5]{2}\ \square\ \sqrt[3]{3}$

۸۸- با استفاده از توان‌های کسری، احکام زیر را ثابت کنید.

الف) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ب) $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۸۹- عبارت مقابل را تا حد ممکن ساده کنید. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}-6\sqrt[3]{2}=$ (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورده و به صورت رادیکالی نمایش دهید.

۹۰- $(4-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\times(4+\sqrt{3})^{\frac{3}{6}}$

۹۱- $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\,\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$

۹۲- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\times\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}\times\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}$ (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۹۳- حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}}\sqrt{1+\sqrt{7}}$ را به دست آورید. (کنکور تجربی ۱۴۰۱)

فرض کنید $x>0$ است. معادله‌های زیر را حل کنید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۹۴- $\sqrt[6]{x\sqrt{x}}=\sqrt[3]{2}$

۹۵- $\sqrt[3]{5\sqrt{125}}=\sqrt{25^{x}}$

۹۶- $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{1}{4}}}=\sqrt[6]{2}$

۹۷- اگر داشته باشیم $\sqrt{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}}=y^{\frac{1}{3}}$، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ (برگرفته از امتحانات سراسر کشور)

۹۸- اگر $a^{2}-6a=-1$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$ را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۹۹- حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\dfrac{7^{\sqrt{3}}\times 7^{\sqrt{27}}}{49^{\sqrt{12}}}$

۱۰۰- اگر $A=\sqrt[5]{9\sqrt{3}}(12)^{-1/5}$ باشد، حاصل $(1+A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ را به دست آورید.

درس ۴ عبارت‌های جبری

یادآوری اتحادها و بررسی چند اتحاد جدید

تساوی که به ازای هر مقداری برای متغیرها، درست باشد را اتحاد می‌گوییم. بد نیست اول یک یادآوری روی اتحادهای سال گذشته داشته باشیم؛ بعد چند اتحاد جدید را با هم بررسی کنیم.

نام اتحاد	اتحاد	مثال
مربع مجموع دو جمله	$(a+b)^{2}=a^{2}+2ab+b^{2}$	$(2x+3)^{2}=4x^{2}+2(2x)(3)+9$ $=4x^{2}+12x+9$
مربع تفاضل دو جمله	$(a-b)^{2}=a^{2}-2ab+b^{2}$	$(x-3)^{2}=x^{2}-6x+9$
مزدوج	$(a-b)(a+b)=a^{2}-b^{2}$	$(2x-\frac{y}{3})(2x+\frac{y}{3})=4x^{2}-\frac{y^{2}}{9}$
یک جمله‌مشترک	$(x+a)(x+b)=x^{2}+(a+b)x+ab$	$(x-3)(x+5)=x^{2}+2x-15$
مربع مجموع سه جمله	$(a+b+c)^{2}=a^{2}+b^{2}+c^{2}+2ab+2ac+2bc$	$(a-2x+2)^{2}=a^{2}+4x^{2}+4+2(a)(-2x)$ $+2a(2)+2(-2x)(2)$ $=a^{2}+4x^{2}+4-4ax+4a-8x$
مکعب مجموع دو جمله	اتحاد مکعب: $(a+b)^{3}=a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+b^{3}$ $(\text{دومی}+\text{اولی})^{3}=(\text{اولی})^{3}+3(\text{اولی})^{2}(\text{دومی})$ $+3(\text{اولی})(\text{دومی})^{2}+(\text{دومی})^{3}$	$(x+2)^{3}=x^{3}+3x^{2}(2)+3x(2)^{2}+2^{3}$ $=x^{3}+6x^{2}+12x+8$
مکعب تفاضل دو جمله	$(a-b)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$	$(x-1)^{3}=x^{3}-3x^{2}(1)+3x(1)^{2}-1^{3}$ $=x^{3}-3x^{2}+3x-1$
مجموع (تفاضل) مکعبات (چاق و لاغر)	$(a+b)(a^{2}-ab+b^{2})=a^{3}+b^{3}$ (مربع دومی + ضرب دو تا − مربع اولی)(دومی + اولی) = مکعب دومی + مکعب اولی $(a-b)(a^{2}+ab+b^{2})=a^{3}-b^{3}$ (علامت با قسمت لاغر یکسان است.)	$(x+2)(x^{2}-2x+4)=x^{3}+8$ $(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^{2}}+\sqrt[3]{x}+1)=x-1$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال حاصل عبارت‌های (الف) تا (ج) را با استفاده از اتحاد مکعب یا چاق و لاغر به دست آورید.

الف) $(x+2y)^3 = x^3+3x^2(2y)+3x(2y)^2+(2y)^3 = x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$

ب) $(\frac{x}{2}-3)^3 = (\frac{x}{2})^3-3(\frac{x}{2})^2(3)+3(\frac{x}{2})(3)^2-3^3 = \frac{x^3}{8}-\frac{9}{4}x^2+\frac{27}{2}x-27$ (دیدی جمله‌ها یکی در میون + و − شدن)

پ) $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1^3 = x^3+1$ (علامت حاصل با لاغر یکسان و با ab در چاق فرق می‌کنه)

ت) $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3-2^3 = x^3-8$

ث) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2) = (2a)^3+(3b)^3 = 8a^3+27b^3$

ج) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) = \underbrace{(x^3+1)(x^3-1)}_{\text{اتحاد مزدوج}} = x^6-1$ (دو تا دو تا چاق و لاغر بودن بعد مزدوج شدن)

تجزیه

شبیه تجزیهٔ اعداد، اگر عبارت‌های جبری را به صورت ضرب عبارت‌ها با درجهٔ کوچک‌تر دربیاوریم، آن‌ها را تجزیه کرده‌ایم. در به دست آوردن حاصل عبارت‌ها با استفاده از اتحادها، معمولاً از سمت چپ اتحاد، به سمت راست می‌رویم اما در تجزیه، معمولاً از سمت راست به چپ حرکت می‌کنیم.

مثال حاصل عبارت‌های الف تا ج را با استفاده از اتحادها به‌دست آورید.

الف) x^2-9 ب) x^2+5x+4 پ) x^3-5x-6 ت) x^3+8

ث) $8a^3-27$ ج) x^6-1 چ) x^3+3x^2+3x+1

پاسخ

الف) $x^2-9 = x^2-3^2 = (x-3)(x+3)$ (تجزیه با اتحاد مزدوج)

ب) $x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$ (تجزیه با یه جملهٔ مشترک یادتون هست؟ دو عدد پیدا می‌کردیم که جمعشون ۵ و ضربشون ۴ باشه)

پ) $x^3-5x-6 = (x-6)(x+1)$

ت) $x^3+8 = x^3+2^3 = (x+2)(x^2-2x+4)$ (تجزیه با چاق و لاغر)

ث) $8a^3-27 = (2a)^3-3^3 = (2a-3)(4a^2+6a+9)$ (تجزیه با چاق و لاغر)

ج) $x^6-1 = \underbrace{(x^3-1)(x^3+1)}_{\text{تجزیه با مزدوج}} = \underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{\text{تجزیه با چاق و لاغر}}\underbrace{(x+1)(x^2-x+1)}_{\text{تجزیه با چاق و لاغر}}$

چ) $x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3 = (x+1)(x+1)(x+1)$ (تجزیه با اتحاد مکعب مجموع)

مثال اگر $a+b=3$ و $a^2+b^2=5$، حاصل a^3+b^3 را بیابید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

پاسخ از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$a^3+b^3 = (a+b)(\overbrace{a^2-ab+b^2}^{5}) = 3\times(5-ab) = 3\times(5-2) = 9$

دقت کنید ab را این‌جوری پیدا کردیم:

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \Rightarrow 3^2 = 5+2ab \Rightarrow ab = 2$

مثال اگر $x+\frac{1}{x}=3$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

الف) $x^2+\frac{1}{x^2}$ ب) $x^3+\frac{1}{x^3}$ پ) $\left|x-\frac{1}{x}\right|$

پاسخ

الف) $x+\frac{1}{x}=3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x+\frac{1}{x})^2=9 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+\underbrace{2(x)(\frac{1}{x})}_{2}=9 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$

ب) $x^3+\frac{1}{x^3} = (x+\frac{1}{x})(\underbrace{x^2-(x)(\frac{1}{x})+\frac{1}{x^2}}_{7}) = (3)(7-1) = 18$

از اتحاد چاق و لاغر داریم:

برای به دست آوردن $|x-\frac{1}{x}|$ داریم:

پ) $|x-\frac{1}{x}|=A \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x-\frac{1}{x})^2=A^2 \Rightarrow \underbrace{x^2+\frac{1}{x^2}}_{7}-2=A^2 \Rightarrow A^2=5 \xrightarrow{A>0} A=\sqrt{5}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال اگر $\alpha=\sqrt[4]{3\sqrt{2}-4}$ و $\beta=\sqrt[4]{3\sqrt{2}+4}$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$، کدام است؟ (کنکور ریاضی ۹۵)

پاسخ از اتحاد مزدوج داریم:

$$(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha\beta)^2=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2$$

$$=\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2=(3\sqrt{2}-4)+(3\sqrt{2}+4)+\sqrt[4]{(3\sqrt{2}+4)^2}\times\sqrt[4]{(3\sqrt{2}-4)^2}$$

$$=6\sqrt{2}+(\sqrt{3\sqrt{2}+4})(\sqrt{3\sqrt{2}-4})=6\sqrt{2}+\sqrt{(3\sqrt{2}+4)(3\sqrt{2}-4)}=6\sqrt{2}+\sqrt{18-16}=6\sqrt{2}+\sqrt{2}=7\sqrt{2}$$

دقت دارید که $\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{x}$ $(x>0)$.

تجزیه با دسته‌بندی جمله‌ها

برای تجزیهٔ برخی از عبارت‌های جبری نمی‌توانیم به صورت مستقیم از اتحادها استفاده کنیم. یکی از راه‌های تجزیهٔ این عبارت‌ها، این است که جمله‌های عبارت‌های جبری را به گونه‌ای با هم دسته‌بندی کنیم که بعد از فاکتورگیری، دارای عامل مشترک باشند. مثلاً:

۱ $x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+1)$ (فاکتور)

۲ $x^2-2x+x^2-x+1=x^2-2x+1+x^2-x=(x-1)^2+x(x-1)=(x-1)(x-1+x)=(x-1)(2x-1)$

۳ $a^3+2ab+a^2b+2b^2=a^3+a^2b+2ab+2b^2=a^2(a+b)+2b(a+b)=(a+b)(a^2+2b)$ (فاکتور)

تجزیه با شکستن جمله‌ها

برخی از عبارت‌های جبری ممکن است با دسته‌بندی اولیه نیز تجزیه نشوند. در این مواقع ممکن است با نوشتن یک جمله، به صورت جمع چند جمله، بتوانیم آن‌ها را با هم دسته‌بندی کنیم. مثلاً می‌خواهیم x^3-3x+2 را تجزیه کنیم. در مرحلهٔ اول، نمی‌توانیم دسته‌بندی کنیم اما اگر $-3x=-2x-x$ بنویسیم، داریم:

۱ $x^3-3x+2=x^3-x-2x+2=x(x^2-1)-2(x-1)=x(x-1)(x+1)-2(x-1)=(x-1)(x(x+1)-2)$ (فاکتور)

$=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)(x-1)$

۲ $2x^2+7x+3=2x^2+6x+x+3=2x(x+3)+(x+3)=(x+3)(2x+1)$

نکته

در حالت کلی برای تجزیهٔ عبارت‌های درجه‌دوم ax^2+bx+c، می‌توانیم از روش شکستن جملات کمک بگیریم. دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر b و ضرب آن‌ها برابر ac باشد. *(مثلاً تو مثال ۲، دو عدد که جمعشون ۷ و ضربشون ۶ باشه.)* حالا کافی است b را به صورت جمع این عدد نوشته و دسته‌بندی کنیم *(تو مثال ۲، دو عدد ۶ و ۱ می‌شن و بعد $7x=6x+x$)*

مثال عبارت $3x^2+x-2$ را تجزیه کنید.

پاسخ دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر ۱، ضرب آن‌ها ۶- باشد. این دو عدد ۲- و ۳+ هستند، پس $x=3x-2x$. می‌نویسیم:

$$3x^2+x-2=3x^2+3x-2x-2=3x(x+1)-2(x+1)=(x+1)(3x-2)$$

مثال عبارت $a^6-2a^3b^3-3b^6$ را تجزیه کنید.

پاسخ

$$a^6-2a^3b^3-3b^6=a^6-2a^3b^3+b^6-4b^6=(a^3-b^3)^2-4b^6$$

$$=(a^3-b^3-2b^3)(a^3-b^3+2b^3)=(a^3-3b^3)(a^3+b^3)=(a^3-3b^3)(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

مضرب‌های عبارت جبری

می‌دانیم $6=2\times3$. اعداد ۳ و ۲ را شمارندهٔ (مقسوم‌علیه) عدد ۶ و عدد ۶ را مضرب عددهای ۲ یا ۳ می‌نامیم. شبیه همین $x+3$ و $x-3$ را شمارنده‌های عبارت جبری x^2-9 و عبارت x^2-9 را مضرب هر یک از عبارت‌های $(x-3)$ یا $(x+3)$ می‌نامیم.

تعریف مضرب‌های هر عبارت جبری، از ضرب آن عبارت، در عبارت‌های جبری دیگر به دست می‌آیند.

مثال سه مضرب برای عبارت‌های $a-b$ و $\frac{x}{3}+5$ بنویسید.

پاسخ

مضرب‌های $a-b$:

$$a-b\begin{cases}\xrightarrow{\times2} 2(a-b)\\ \xrightarrow{\times a} a(a-b)\\ \xrightarrow{2xy} 2xy(a-b)\end{cases}$$

مضرب‌های $\frac{x}{3}+5$:

$$\frac{x}{3}+5\begin{cases}\xrightarrow{\times10} 10(\frac{x}{3}+5)\\ \xrightarrow{\times3} 3(\frac{x}{3}+5)=x+15\\ \xrightarrow{\times(a-b)} (a-b)(\frac{x}{3}+5)\end{cases}$$

این‌ها سه مثال بود که نوشتیم. حالا شما در هر عبارت جبری که دلتان بخواهد می‌توانستید ضرب کنید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ باید حاصل یک عبارت را با استفاده از اتحاد مناسب به دست آورید. حواستان باشد ممکن است تا انتهای مسئله نیاز به استفاده از چند اتحاد داشته باشید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۰۱ تا ۱۱۸

تیپ۲ تجزیهٔ یک عبارت از شما خواسته می‌شود. یادتان هست که برای تجزیه روش‌های زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

۱ استفاده از اتحاد مناسب ۲ دسته‌بندی جمله ۳ شکستن جمله‌ها

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۱۹ تا ۱۴۴

تیپ۳ مضرب و شمارنده: که معمولاً می‌گویند چندتا مضرب فلان عبارت جبری را بنویسید یا این‌که به صورت درست و نادرست گفته می‌شود که آیا فلان عبارت مضرب یا شمارندهٔ دیگری هست یا نه.

حالاتوحل‌کن سؤال ۱۴۵

تیپ۴ یک رابطه در مسئله داده شده و عبارتی از شما خواسته شده است. باید با استفاده از اتحاد و تجزیه عبارت‌ها را به هم ربط دهید تا حاصل به دست آید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۴۶ تا ۱۵۰

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

۱۰۱- $(x+1)^3 = x^3 + \cdots\cdots + \cdots\cdots + 1$

۱۰۲- $(2x-1)(\cdots\cdots + \cdots\cdots + \cdots\cdots) = 8x^3 - \cdots\cdots$

۱۰۳- $(a^2+1)(a^4 - \cdots\cdots + \cdots\cdots) = \cdots\cdots + \cdots\cdots$

۱۰۴- $(x-2)^3 = \cdots\cdots - 6x^2 + \cdots\cdots - 8$

حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۰۵- $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+4)$

۱۰۶- $(x+3)^2 - (x-3)^2$

۱۰۷- $(x+3)(x-1) - (x-2)(x+5)$

۱۰۸- $(x+2y-3z)^2$

۱۰۹- $(a+3)^3$

۱۱۰- $(\frac{x}{2}+2)^3 + (2-x)^3$

۱۱۱- 101^3

۱۱۲- $(2a+1)^3$

۱۱۳- $(2-\sqrt{2})^3$

۱۱۴- $(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$

۱۱۵- $(2x-\frac{1}{3})(4x^2+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x)$

۱۱۶- $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

۱۱۷- $(x-2)(x^2+2x+4) - (x+2)(x^2-2x+4)$

۱۱۸- 99^3

عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۱۹- $x^3 - 125$

۱۲۰- $a^3 + 8b^3$

۱۲۱- $27x^3 + 8y^3$

۱۲۲- $b^3 + \frac{8}{27}$

۱۲۳- $(ax)^3 - \frac{b^3}{216}$

۱۲۴- $x^6 - 64$

۱۲۵- $a^6 - b^6$

۱۲۶- $(a+b)^3 - (a-b)^3$

۱۲۷- $x^6 - 9x^3 + 8$

۱۲۸- $x^7 + x$

۱۲۹- $x^4 + x^2 - 2$

۱۳۰- $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

۱۳۱- $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

۱۳۲- $x^2 + 2x + 1 - t^2$

۱۳۳- $ac + ad + bc + bd$

۱۳۴- $x^3 + x^2 + 4x + 4$

۱۳۵- $x^4 - x^3 - x^2 + 2x - 1$

۱۳۶- $a^4 - 4a^2b^2 + a^2b - 4b^3$

۱۳۷- $6x^2 + 5x + 1$

۱۳۸- $2t^2 + 7t + 6$

۱۳۹- $6x^2 - 5x - 1$

۱۴۰- $9x^2 - 21x + 10$

۱۴۱- $a^3 - 2a^2 + 1$

۱۴۲- $21x^2 - 26xy + 8y^2$

۱۴۳- $x^3 - 7x + 6$

۱۴۴- $x^3 + 4x + 5$

۱۴۵- دو عبارت جبری بنویسید که $27a^3 - 1$ مضرب آن‌ها باشد. (به زبان دیگر، چند شمارنده از $27a^3 - 1$ را مشخص کنید.)

۱۴۶- حاصل عبارت $x^3 - 3x^2 + 3x - 8$ به ازای $x = 1 + \sqrt[3]{3}$ چه‌قدر است؟ *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۴۷- الف) اگر $a + b = 6$ و $ab = -1$ باشد، حاصل $a^3 + b^3$ را به دست آورید.

ب) اگر $a + b = 2$ باشد، حاصل $a^3 + b^3 + 6ab$ را به دست آورید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۴۸- فرض کنید $a=\sqrt[4]{\sqrt{6}-2}$ و $b=\sqrt[4]{\sqrt{6}+2}$ مقدار $(a^2+b^2+2ab)^2\ (a^2+b^2-2ab)^2$، کدام است؟ (کنکور تجربی ۱۴۰۰)

۱۴۹- اگر $x+\frac{1}{x}=3$ باشد، حاصل $x^3+\frac{1}{x^3}$ و $x^6+\frac{1}{x^6}$ را به دست آورید.

۱۵۰- اگر $a^2=b^2+1$ باشد، حاصل $\frac{b^6-a^6+1}{3a^2b^2}$ را به دست آورید.

درس ۵ عبارت‌های گویا

عبارت‌هایی مانند $\frac{2x+1}{x^2-x}$، $\frac{1}{x}$ و $\sqrt{2x+1}$ که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند را **عبارت‌های گویا** می‌نامیم.

نکته

عبارت‌هایی مانند $\sqrt{x}$ و $\sqrt[3]{x}+1$ گویا نیستند، چون چندجمله‌ای نبوده و متغیرها زیر رادیکال قرار دارند.

دامنهٔ عبارت‌های گویا

اگر مخرج یک عبارت گویا، به ازای عدد خاصی برای متغیر برابر صفر شود، عبارت گویا تعریف‌نشده است، بنابراین برای این‌که ببینیم یک عبارت گویا به ازای چه مقدارهایی تعریف‌نشده است، کافی است مخرج‌ها را برابر صفر قرار داده تا اعداد موردنظر به دست آیند.

مثال عبارت‌های گویای زیر به ازای چه مقادیری از x تعریف نمی‌شود؟

الف) $B=\frac{x^2-3x}{x(x+1)}$ ب) $C=\frac{1}{x^2}+\frac{x}{2x-5}-\frac{3x-1}{4+x}$

پاسخ

الف) $B=\frac{x^2-3x}{x(x+1)}$ $\quad x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{یا} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

عبارت B به ازای $x=0$ یا $x=-1$ تعریف نمی‌شود، اما اگر x عددی غیر از ۰ و ۱- باشد، B تعریف‌شده و حاصل آن، عددی حقیقی خواهد شد.

به زبان دیگر می‌گوییم دامنهٔ B برابر $\mathbb{R}-\{0,-1\}$ یا $x\neq 0,-1$ است.

ب) $C=\frac{1}{x^2}+\frac{x}{2x-5}-\frac{3x-1}{4+x}$ $\quad \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \\ 4+x=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$

عبارت C به ازای مقدارهای ۰، $\frac{5}{2}$ و ۴- تعریف نمی‌شود، پس می‌گوییم C تعریف می‌شود به شرطی که $x\neq 0,\frac{5}{2},-4$ باشد.

ساده‌کردن عبارت‌های گویا

برای **ساده‌کردن کسرهای گویا**، صورت و مخرج را تجزیه کرده و عبارت‌های یکسان را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم.

جمع و تفریق دو عبارت گویا: ابتدا مخرج‌ها را تجزیه کرده و عبارتی که تا حد امکان کوچک بوده (از نظر درجه و ضرب عامل‌ها) و مضرب همهٔ مخرج‌ها باشد را به عنوان مخرج‌مشترک در نظر می‌گیریم و سپس کسرها را جمع یا تفریق می‌کنیم:

مثال عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید.

الف) $A=\frac{x^3+8}{(x+2)(x^3-2x^2+4x)}$ ب) $B=\frac{x^2-x-2}{x^6-7x^3-8}$

پاسخ صورت را با چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم. در مخرج هم فاکتورگیری:

الف) $A=\frac{\cancel{(x+2)}\,\cancel{(x^2-2x+4)}}{\cancel{(x+2)}\,(x)\,\cancel{(x^2-2x+4)}}=\frac{1}{x}$

ب) $B=\frac{(x+1)(x-2)}{(x^3+1)(x^3-8)}=\frac{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x+1)}\,(x^2-x+1)\,\cancel{(x-2)}\,(x^2+2x+4)}=\frac{1}{(x^2-x+1)(x^2+2x+4)}$

(صورت و مخرج رو با یه جمله مشترک تجزیه کردیم، بعد با چاق و لاغر)

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

$$A=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x^3-1}$$

پاسخ ابتدا مخرج‌ها را تجزیه می‌کنیم. مخرج‌مشترک را به صورتی می‌گیریم که مضرب همهٔ مخرج‌ها باشد. (بین مخرج‌ها ک.م.م می‌گیریم.) مخرج‌ها $(x-1)$، $(x-1)(x+1)$ و $(x-1)(x^2+x+1)$ شدند. مخرج‌مشترک را باید جوری بگیریم که مضرب همهٔ این‌ها بوده و تا جایی که امکان دارد عامل کم‌تری ضرب کرده باشیم. خب $(x-1)$، $(x+1)$ و (x^2+x+1) را لازم داریم؛ پس ضرب این‌ها می‌شود مخرج‌مشترک:

$$A=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}-\frac{2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{\overbrace{(x+1)(x^2+x+1)+x^2+x+1-2(x+1)}^{\text{(فاکتورگیری)}}}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{(x^2+x+1)\overbrace{(x+1+1)}^{x+2}-2x-2}{(x+1)(x^3-1)}=\frac{x^3+2x^2+x^2+2x+x+2-2x-2}{(x+1)(x^3-1)}=\frac{x^3+3x^2+x}{(x+1)(x^3-1)}$$

گویاکردن مخرج کسرها

هدف از گویاکردن مخرج کسر، این است که در مخرج، عبارت‌های رادیکالی نداشته باشیم. با ضرب صورت و مخرج کسر *(برای این‌که کسر اصلی عوض نشه)* در عبارت‌های مناسب، رادیکال‌های مخرج را از بین می‌بریم.

۱ اگر مخرج به شکل $\sqrt[n]{a^k}$ $(0<k<n)$ باشد، با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt[n]{a^{n-k}}$، توان a با فرجه برابر می‌شود.

مثلاً می‌خواهیم مخرج کسر $\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$ را گویا کنیم:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\times\frac{\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^2}}=\frac{2\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{2\sqrt[5]{x^2}}{x}$$

یا برای گویاکردن مخرج $\frac{x}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}$ داریم:

$$\frac{x}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}=\frac{x}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[6]{x^5}}=\frac{x\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[6]{x^6}}=\frac{x\sqrt[6]{x^5}}{x}=\sqrt[6]{x^5}$$

تذکر چون $\sqrt{x}$ تعریف شده است، پس $x>0$ بوده و $\sqrt[6]{x^6}=|x|=x$.

۲ اگر مخرج به صورت $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ یا $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ باشد، برای گویاکردن، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

مثلاً برای گویاکردن مخرج $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ داریم *(مزدوج $\sqrt{x}-1$ میشه $\sqrt{x}+1$)*:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}}_{\text{اتحاد مزدوج}}=\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x})^2-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

یا برای گویاکردن عبارت $\frac{a}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$ داریم:

$$\frac{a}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}=\frac{a(\sqrt{a}-2\sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2-(2\sqrt{b})^2}=\frac{a(\sqrt{a}-2\sqrt{b})}{a-4b}$$

۳ اگر مخرج به صورت $\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$ یا $\sqrt[3]{a^2}\pm\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ باشد، صورت و مخرج را در قسمت چاق یا لاغر اتحاد چاق و لاغر ضرب می‌کنیم:

مثلاً برای گویاکردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}$ داریم:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}}_{\text{(دقت!)}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{(\sqrt[3]{x})^3+1}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$$

یا برای گویاکردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}\times\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{(\sqrt[3]{x})^3-2^3}=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$$

۴ اگر مخرج کسر، ترکیبی از موارد بالا باشد، نیاز است که از هر دو روش استفاده کرده یا از یک روش چند بار استفاده کنیم.

مثلاً برای گویاکردن مخرج کسر $\frac{1}{(1-\sqrt{2})(\sqrt[3]{2}-1)}$ داریم *(یه بار تو مزدوج $1-\sqrt{2}$ و یه بار تو چاق $\sqrt[3]{2}-1$)*:

$$\underbrace{\frac{1}{(1-\sqrt{2})(\sqrt[3]{2}-1)}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}_{\text{مزدوج}}\times\underbrace{\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}}_{\text{چاق‌ولاغر}}=\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}{(1-2)(2-1)}=-(1+\sqrt{2})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$$

مثال ابتدا مخرج کسرهای A را گویا کرده و سپس حاصل A را به دست آورید.

$$A=\frac{2}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{3}{x-1}$$

پاسخ

$$\frac{2}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{2(\sqrt{x}+1)}{x-1}\quad,\quad\frac{1}{\sqrt{x}+1}\times\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow A=\frac{2(\sqrt{x}+1)}{x-1}+\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{3}{x-1}=\frac{2\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-1-3}{x-1}=\frac{3\sqrt{x}-2}{x-1}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال مخرج کسرها در عبارت B را گویا کرده و سپس آن‌ها را به یک کسر تبدیل کنید. $(x>0)$

$$B=\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

پاسخ

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x}+1}\times\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\underbrace{\sqrt[4]{x^2}-1}_{\text{مزدوج}}}\times\frac{\sqrt[4]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x^2}+1}=\frac{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x^2}+1)}{x-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow B=\frac{\overbrace{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{x^2}-1}}{(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[4]{x^2}+1)+(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x}}{x-1}$$

(دقت کردی که چون $x>0$ هستش، $\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{x}$)

مثال حاصل عبارت $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{32}}{2+\sqrt{8}}+(\sqrt[8]{16}+1)^{-1}$ را به دست آورید.

پاسخ

$$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{32}}{2+\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{25\times2}-\sqrt{16\times2}}{2+\sqrt{4\times2}}=\frac{5\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-\sqrt{2}}{2(2-1)}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

اما $\sqrt[8]{16}=\sqrt[8]{2^4}=2^{\frac{4}{8}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$، پس:

$$(\sqrt{2}+1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$$

حالا داریم:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}-1=\frac{2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ دامنهٔ یک عبارت گویا را باید به دست آورید. (ریشه‌های مخرج $\neq x$ یا $D=\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$)

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۵۴ تا ۱۵۹

تیپ۲ ساده‌کردن عبارت‌های گویا که اول باید صورت و مخرج را تجزیه کرده و بعد ساده کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۵۴ تا ۱۵۹

تیپ۳ گویاکردن مخرج کسر است. از این موضوع حتماً سؤال خواهد آمد. (دقت کنید که مخرج چه تیپی است و چگونه باید گویا شود.)

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۶۰ تا ۱۶۸ و ۱۷۷ تا ۱۷۹

تیپ۴ جمع و تفریق چند عبارت دارای رادیکال، معمولاً بهتر است که مخرج کسرها را گویا کرده و بعد آن‌ها را با هم جمع و تفریق کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۶۹ تا ۱۷۶ و ۱۸۰ تا ۱۸۵

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۱۵۱- به ازای دو عدد ..... عبارت گویای $\frac{x^2-1}{x^2-1}$ تعریف‌نشده است.

۱۵۲- مزدوج عبارت $\sqrt{x+1}-2$ به صورت ..... است.

۱۵۳- ..... $=\frac{a}{\sqrt{a}}$ مثلاً ..... $=\frac{2}{\sqrt{2}}$

عبارت‌های گویای زیر را ساده کنید. (در سوال‌های ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۷ و ۱۵۸ دامنه را نیز مشخص کنید.) (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۵۴- $\frac{(x^3+1)(x^3-1)}{(x^2-1)}$

۱۵۵- $\frac{x^4+8x}{x^3+5x^2+6x}$

۱۵۶- $(\frac{a^3+b^3}{a+b}-\frac{a^3-b^3}{a-b})\div 4ab$

۱۵۷- $\frac{3x}{x-1}+\frac{2x}{4x-4}+\frac{1}{x^2-1}$

۱۵۸- $\frac{1}{x^3+1}+\frac{2}{x+1}$

۱۵۹- $\frac{a+5}{a-1}-\frac{6}{a^2+a+1}-\frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید. (همهٔ متغیرها مثبت هستند) *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۶۰- $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y}}$ ۱۶۱- $\frac{2}{\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^3}}}$ ۱۶۲- $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{xy^2z^3}}$

۱۶۳- $\frac{-2}{\sqrt[3]{7\sqrt{2}}}$ ۱۶۴- $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ۱۶۵- $\frac{1}{3\sqrt{x}+2}$

۱۶۶- $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{y-2}}$ ۱۶۷- $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{9}}$ ۱۶۸- $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{y}}$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۶۹- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ ۱۷۰- $\frac{1}{\sqrt{a}+1}-\frac{1}{\sqrt{a}-1}+\frac{2}{a^2-1}$ ۱۷۱- $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+2}$

۱۷۲- $\frac{1}{3-\sqrt{6}}-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$ ۱۷۳- $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}+\sqrt{48}$ ۱۷۴- $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}-\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

۱۷۵- کدام عبارت جبری در $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ضرب شود تا حاصل برابر a^2-b^2 گردد؟

۱۷۶- اگر $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=4$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}$ را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید. (همهٔ متغیرها مثبت هستند)

۱۷۷- $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$ ۱۷۸- $\frac{1}{\sqrt[6]{x}-1}$ ۱۷۹- $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۱۸۰- $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ ۱۸۱- $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ ۱۸۲- $\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}$

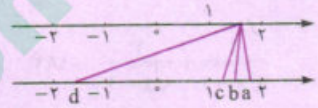
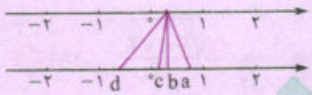
۱۸۳- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ چه‌قدر است؟ *(کنکور تجربی ۹۹ خارج)*

۱۸۴- حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}-2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}$ را به دست آورید. *(کنکور تجربی ۹۹)*

۱۸۵- حاصل عبارت $(\sqrt{7}+\sqrt{6})^{\sqrt{5}+2}(\sqrt{7}-\sqrt{6})^{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$ را به دست آورید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل سوم، منتخب سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل سوم	رشته: ریاضی و تجربی	مدت امتحان: ۶۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (ذکر دلیل لازم نیست.) الف) $\sqrt[4]{(-2)^4} = (\sqrt[4]{-2})^4$ ب) عبارت $\frac{3x-\sqrt{7}}{x^2}$، یک عبارت گویا است.				۰/۵
۲	جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب پر کنید. الف) $\sqrt[3]{-17}$ بین دو عدد صحیح متوالی ..... $< \sqrt[3]{-17} <$ ..... است. ب) a عددی مثبت است و $\sqrt[3]{a} < a$، a عددی ..... است.				۰/۵
۳	حاصل عبارت‌های زیر را در صورت وجود ساده کنید. الف) $\sqrt[7]{(-3)^7} =$ ب) $\sqrt[5]{4^{-5}} =$ پ) $\sqrt[8]{256} =$ ت) $\sqrt[12]{(-5)^2} =$				۱
۴	در هر یک از اشکال زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید هر کدام از اعداد a، b، c و d مربوط به کدام ریشه است. الف)  ب) 				۱
۵	حاصل عبارت $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5}$ را بیابید.				۱/۵
۶	فرض کنید x یک عدد مثبت باشد. معادلهٔ $\sqrt{5\sqrt{125}} = \sqrt{25^x}$ را حل کنید.				۱
۷	تجزیه کنید. الف) $2x^2+3x+1$ ب) $a^3-2ab+a^2b-2b^2$				۱/۵
۸	یکی از دو عبارت زیر را به اختیار انتخاب کرده و ساده کنید. الف) $\frac{x^6+1}{x^4+2x^2+1}$ ب) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x+3}-\frac{x+7}{x^2+2x-3}$				۱
۹	عبارات زیر را گویا کنید. الف) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$ ب) $\frac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})}$				۲
	جمع نمرات				۱۰

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- ۰/۱

۲- منفی ـ فرد

۳- دو ـ قرینه

۴- چون $\sqrt[4]{ab}$ تعریف‌شده و غیرصفر است، $ab > 0$ است. پس a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی هستند تا ضرب آن‌ها مثبت باشد.

۵- کسر $\frac{a}{b}$ منفی است، یعنی a و b دارای علامت‌های غیریکسانی هستند.

۶- b^2 و c^4 هیچ‌کدام منفی نیستند. چون $\sqrt[4]{\frac{ab^2}{c^4}}$ تعریف‌شده و ناصفر است، پس $\frac{ab^2}{c^4} > 0$ است و لذا علامت a مثبت است و علامت‌های b و c مثبت یا منفی می‌تواند باشد.

۷- $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$

۸- $6^3 = 216$

۹- $(0/1)^4 = 10^{-4}$

۱۰- $b^5 = a$

۱۱- $3^2 < 13 < 4^2 \Rightarrow 3 < \sqrt{13} < 4$

۱۲- $8^2 < 73 < 9^2 \Rightarrow 8 < \sqrt{73} < 9$

۱۳- $2^3 < 23 < 3^3 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{23} < 3$

۱۴- $4^3 < 100 < 5^3 \Rightarrow 4 < \sqrt[3]{100} < 5$

۱۵- $4^2 < 17 < 5^2 \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < 5 \Rightarrow -5 < -\sqrt{17} < -4$

۱۶- $2^3 < 24 < 3^3 \Rightarrow 2 < \sqrt[3]{24} < 3 \Rightarrow -3 < \underbrace{-\sqrt[3]{24}}_{\sqrt[3]{-24}} < -2$

۱۷- $2^4 < 43 < 3^4 \Rightarrow 2 < \sqrt[4]{43} < 3$

۱۸- $2^5 < 94 < 3^5 \Rightarrow 2 < \sqrt[5]{94} < 3$

۱۹- $3^5 < 350 < 4^5 \Rightarrow 3 < \sqrt[5]{350} < 4 \Rightarrow -4 < \overbrace{-\sqrt[5]{350}}^{\sqrt[5]{-350}} < -3$

۲۰- $4^4 < 300 < 5^4 \Rightarrow 4 < \sqrt[4]{300} < 5 \Rightarrow -5 < -\sqrt[4]{300} < -4$

۲۱- $(\frac{12}{13})^2 = \frac{144}{169}$ (چون $\sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$)

۲۲- $(0/5)^3 = 0/125$ (چون $\sqrt[3]{0/125} = 0/5$)

۲۳- $(10^{-2})^3 = 10^{-6}$ (چون $\sqrt[3]{10^{-6}} = 10^{-2}$)

۲۴- $3^4 = 81$ (چون $\sqrt[4]{81} = 3$)

۲۵- $(10^{-1})^4 = 10^{-4}$ (چون $\sqrt[4]{10^{-4}} = 10^{-1}$)

۲۶- $(2^2)^5 = 1024$ (چون $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2$)

۲۷- $1 \le a \Rightarrow a \ge \sqrt[4]{a}$

۲۸- $0 \le a \le 1 \Rightarrow a \le \sqrt[4]{a}$

۲۹- $1 \le a \Rightarrow a \ge \sqrt{a}$

۳۰- $0 \le a \le 1 \Rightarrow a \le \sqrt{a}$

۳۱- عدد a از یک بزرگ‌تر است؛ پس هر چه ریشهٔ بزرگ‌تری بگیریم، کوچک‌تر می‌شود یعنی $\sqrt[5]{a} < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a}$.
این یعنی $A = \sqrt[3]{a}$، $B = \sqrt[4]{a}$ و $C = \sqrt[5]{a}$. اما چون a مثبت است، دوتا ریشهٔ چهارم یعنی $\sqrt[4]{a}$ و $-\sqrt[4]{a}$ دارد، پس $D = -\sqrt[4]{a}$ است.

۳۲- عدد a بین صفر و یک است؛ پس $\underbrace{\sqrt[3]{a}}_{C} < \underbrace{\sqrt[4]{a}}_{B} < \underbrace{\sqrt[5]{a}}_{A}$. شبیه سؤال قبلی $D = -\sqrt[4]{a}$ می‌شود.

۳۳- $-1 \le a < 0 \Rightarrow a \ge \sqrt[3]{a}$

۳۴- $a \le -1 \Rightarrow a \le \sqrt[3]{a}$

۳۵- $1 \le a \Rightarrow a \ge \sqrt[5]{a}$

۳۶- $0 \le a \le 1 \Rightarrow a \le \sqrt[5]{a}$

۳۷- $1 \le a \Rightarrow a \ge \sqrt[3]{a}$

۳۸- $0 \le a \le 1 \Rightarrow a \le \sqrt[3]{a}$

۳۹- **الف)** $0 < a < 1$ باید تا ریشهٔ سوم بزرگ‌تر شود. مثلاً اگر $a = \frac{1}{8}$ بگیریم: $\frac{1}{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} > \frac{1}{8}$

ب) $a < -1$ باید باشد. مثلاً اگر $a = -8$ بگیریم: $-2 = \sqrt[3]{-8} > -8$

پ) $a = 0, 1$

ت) $a = -1$

ث) $a > 1$ باید باشد. مثلاً اگر $a = 8$ بگیریم: $2 = \sqrt[3]{8} < 8$

ج) $-1 < a < 0$ باید باشد. مثلاً اگر $a = -\frac{1}{8}$ بگیریم: $-\frac{1}{2} = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} < -\frac{1}{8}$

۴۰- با توجه به توضیحات دستهٔ اول پلهٔ چهارم داریم:

$\sqrt[3]{102} < \sqrt[3]{201}$ $\quad$ $\sqrt{102} < \sqrt{201}$

$\sqrt[3]{0/2} > \sqrt[3]{0/1}$ $\quad$ $\sqrt{0/2} > \sqrt{0/1}$

$\sqrt[3]{-87} < \sqrt[3]{-34}$ $\quad$ $\sqrt[3]{-0/2} < \sqrt[3]{-0/1}$

۴۱- حجم مکعب میانی به ضلع x می‌شود x^3. چون $64 < x^3 < 125$، پس $\sqrt[3]{64} < x < \sqrt[3]{125}$؛ یعنی $4 < x < 5$ می‌باشد.

۴۲- **الف)** واضح است که $17^5 < 20^5$.

ب) اگر عددی بین صفر و یک باشد، هر چه به توان بزرگ‌تری برسد، کوچک‌تر می‌شود، پس $(0/1)^5 > (0/1)^7$.

پ) با توجه به $(0/2)^5 > (0/2)^7$، نتیجه می‌گیریم $(-0/2)^5 < (-0/2)^7$.

ت) واضح است که $7^5 < 7^7$، پس $(-7)^5 > (-7)^7$.

۴۳- بار دیگر پلهٔ چهارم را ببینید. اگر $0 < a < 1$ باشد، $a < \sqrt[3]{a}$ می‌شود؛ پس $a - \sqrt[3]{a}$ منفی می‌شود. بنابراین $|\underbrace{a - \sqrt[3]{a}}_{\ominus}| = \sqrt[3]{a} - a$.
هم‌چنین $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$؛ پس داخل قدرمطلق دوم مثبت بوده و $|\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}| = \sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$ می‌شود. هم‌چنین اگر $0 < a < 1$ باشد، $a < \sqrt{a}$ می‌شود؛ پس $\sqrt{a} - a > 0$. در نتیجه $|\underbrace{\sqrt{a} - a}_{\oplus}| = \sqrt{a} - a$؛ حالا:

$$|a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}| + |\sqrt{a} - a|$$
$$= \sqrt[3]{a} - a + \sqrt[3]{a} - \sqrt{a} + \sqrt{a} - a = 2\sqrt[3]{a} - 2a$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۴۴- $|-3| = 3$ ـ تعریف‌نشده

۴۵- $|\underbrace{1-\sqrt{2}}| = \sqrt{2}-1$

۴۶- $2\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{8\times 2} = 2\times 2\sqrt[3]{2} \Rightarrow -4\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2} = 0$

۴۷- همواره $a^2 \geq 0$ است، پس a می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد، اما برای این‌که عبارت $\sqrt[n]{a^2}$ تعریف شود، باید $a \geq 0$ باشد، چون ابتدا رادیکال با فرجهٔ n روی a اثر می‌کند و بعد به توان می‌رسد.

۴۸- اگر k فرد باشد، m هر عدد صحیح و a هر عدد حقیقی می‌تواند باشد.

اگر k زوج باشد، باید $a \geq 0$ بوده تا سمت راست تساوی تعریف‌شده باشد، اما m هر عدد صحیح می‌تواند باشد. *(البته اگه m منفی باشه، a تو مفرج می‌ره و لذا صفر نمی‌تونه باشه.)*

۴۹- $\sqrt[4]{-8}$, $\sqrt[4]{-2}$ تعریف‌نشده، ولی

$a=-2\ ,\ b=-8 \Rightarrow \sqrt[4]{(-2)(-8)} = \sqrt[4]{16} = 2$

۵۰-

$A = \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{5^3\times 2} = 5\sqrt[3]{2}$, $B = \sqrt[8]{1024} = \sqrt[8]{2^{10}}$

$= \sqrt[8]{2^8\times 2^2} = 2\sqrt[8]{2^2} = 2\sqrt[8]{4}$

$C = \sqrt[5]{2^2\times 3^5\times 5^6} = 3\sqrt[5]{4\times 5^5\times 5} = 3\times 5\sqrt[5]{20} = 15\sqrt[5]{20}$

۵۱- $\sqrt[5]{-32}+\sqrt[4]{(-4)^4} = \sqrt[5]{(-2)^5}+\sqrt[4]{(-4)^4}$

$= -2+|-4| = -2+4 = 2$

۵۲- $\sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^4\times 3} = 3\sqrt[4]{3}$

۵۳- $\sqrt[5]{2^5\times a^{12}\times c^{15}} = 2c^3\sqrt[5]{a^{10}\times a^2} = 2c^3a^2\sqrt[5]{a^2}$

۵۴- $\sqrt[6]{3a^2}\times\sqrt[6]{9a^3}\times\sqrt[6]{12a} = \sqrt[6]{3^4\times 2^2a^6}$

$= |a|\sqrt[6]{324} = a\sqrt[6]{324}$

توجه کنید چون $\sqrt[6]{12a}$ تعریف‌شده است، $a \geq 0$ بوده و لذا $|a| = a$ خواهد بود.

۵۵- $\sqrt[9]{\frac{27^3}{(a^6)^3}} = \sqrt[9]{\frac{(3^3)^3}{a^{18}}} = \sqrt[9]{\frac{3^9}{a^{18}}} = \frac{\sqrt[9]{3^9}}{\sqrt[9]{a^{18}}} = \frac{3}{a^2}$

۵۶- $\frac{2}{\sqrt[7]{a^2}}\times\sqrt[7]{16a^4}\times\sqrt[7]{8a^5} = 2\sqrt[7]{\frac{16\times 8a^4a^5}{a^2}}$

$= 2\sqrt[7]{2^4\times 2^3a^7} = 2\times 2\times a = 4a$

۵۷- $\sqrt[5]{\frac{32}{a^6}}\div\sqrt[5]{\frac{-4}{a}} = \sqrt[5]{\frac{32}{a^6}\div\frac{-4}{a}} = \sqrt[5]{\frac{32}{a^6}\times\frac{a}{-4}}$

$= \sqrt[5]{\frac{-8}{a^5}} = \frac{1}{a}\sqrt[5]{-8}$

۵۸- $\frac{\sqrt[5]{-2^8}}{\sqrt[5]{2^{-2}}} = \sqrt[5]{\frac{-2^8}{2^{-2}}} = \sqrt[5]{-2^8\times 2^2} = \sqrt[5]{-2^{10}}$

$= -\sqrt[5]{2^{10}} = -2^2 = -4$

۵۹- $(16^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{4\times\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$

پس حاصل برابر ۴ می‌شود. $\sqrt[3]{1+\sqrt{49}} = \sqrt[3]{1+7} = \sqrt[3]{8} = 2$

۶۰- می‌دانیم: $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{زوج } n \\ a & \text{فرد } n \end{cases}$. هم‌چنین $|a| = \begin{cases} a & a\geq 0 \\ -a & a<0 \end{cases}$،

پس:

$\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[7]{b^7} = |\underbrace{a}_{a>0}|+b = a+b$

۶۱- $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[7]{b^7} = |a|+b = a+b$

۶۲- $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[7]{b^7} = |\underbrace{a}_{a<0}|+b = -a+b$

۶۳- $\sqrt[6]{a^6}+\sqrt[7]{b^7} = |a|+b = -a+b$

۶۴- ویژگی مطرح‌شده بیان می‌کند برای مقایسهٔ دو عدد مثبت، می‌توانید آن‌ها را به توان عدد طبیعی مناسب رسانده و حاصل آن‌ها را با هم مقایسه کنید (یا برعکس).

الف) برای مقایسهٔ $\sqrt[3]{4}$ و $\sqrt{2}$، دو عدد را به توان ۶ می‌رسانیم تا فرجه‌ها از بین بروند.

$(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8\ ,\ (\sqrt[3]{4})^6 = \sqrt[3]{4^6} = 4^2 = 16$

$\Rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$

ب) برای مقایسهٔ $\sqrt[4]{2}$ و $\sqrt[5]{3}$، دو عدد را به توان ۲۰ می‌رسانیم:

$(\sqrt[5]{3})^{20} = \sqrt[5]{3^{20}} = 3^4 = 81\ ,\ (\sqrt[4]{2})^{20} = \sqrt[4]{2^{20}} = 2^5 = 32$

$\Rightarrow \sqrt[5]{3} > \sqrt[4]{2}$

پ) برای مقایسه، دو طرف را به توان ۱۲ می‌رسانیم:

$(\sqrt[3]{0/1})^{12} = \sqrt[3]{0/1^{12}} = (0/1)^4\ ,\ (\sqrt[4]{0/1})^{12} = \sqrt[4]{(0/1)^{12}}$

$= (0/1)^3\ ,\ (0/1)^4 < (0/1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{0/1} < \sqrt[4]{0/1}$

ت) $\sqrt{\frac{1}{2}}\ \square\ \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \xleftrightarrow{\text{توان } 6} (\frac{1}{2})^3\ \square\ (\frac{1}{4})^2 = (\frac{1}{2})^4$

$\Longleftrightarrow (\frac{1}{2})^3\ \boxed{>}\ (\frac{1}{2})^4$

ث) $3^3\ \boxed{>}\ 2^3 \xleftrightarrow{\sqrt[10]{\ }} (3^3)^{10}\ \square\ (2^3)^{10} \Longleftrightarrow 3^{30}\ \square\ 2^{30}$

ج) $5^{-16}\ \square\ 2^{-8} \xleftrightarrow{\sqrt[8]{\ }} 5^{-2}\ \square\ 2^{-1} \Longleftrightarrow \frac{1}{25}\ \boxed{<}\ \frac{1}{2}$

۶۵- می‌دانیم $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$، پس:

$A = \sqrt{3}-2+|\underbrace{\sqrt{3}-2}_{\ominus}|+1-\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}-2+-(\sqrt{3}-2)+1-\sqrt{3} = 1-\sqrt{3}$

۶۶-

$\sqrt{a^2}+\sqrt[4]{(a-1)^4}+\sqrt[6]{(1-a)^6} = |\underbrace{a}_{\oplus}|+|\underbrace{a-1}_{\ominus}|+|\underbrace{1-a}_{\oplus}|$

$= a-(a-1)+1-a = 2-a$

۶۷-

الف) $2\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{2^6\times 3} = \sqrt[6]{192}$

ب) $3\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{3^3\times(-2)} = \sqrt[3]{-54}$

پ) $\frac{\sqrt[5]{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{(\frac{1}{2})^5\times 3} = \sqrt[5]{\frac{3}{32}}$

ت) $-2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{(-2)^5\times 3} = \sqrt[5]{-96}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

ث) عدد منفی را نمی‌توانید زیر رادیکال با فرجهٔ زوج ببرید، چون: $-2\sqrt[4]{3} \neq \sqrt[4]{(-2)^4 \times 3} = |-2|\sqrt[4]{3}$. البته می‌توانید فقط ضریب ۲ را زیر رادیکال برده و بنویسید: $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \times 3} = -\sqrt[4]{48}$

۶۸- الف) باید کاری کنیم که $4+2\sqrt{3}$ از زیر رادیکال بیرون بیاید، پس احتمالاً زیر رادیکال مربع کامل است. اگر کمی دقت کنید $4+2\sqrt{3} = 1+3+2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$ می‌شود؛ پس داریم:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$$
$$= |\underbrace{1+\sqrt{3}}_{\oplus}| - \sqrt{3} = 1+\sqrt{3}-\sqrt{3} = 1$$

ب) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}+\sqrt{2}| = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = |\sqrt{3}-\sqrt{2}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow A = 2\sqrt{2}$$

۶۹- $(2^{\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{4}}$

۷۰- $\sqrt[3]{0/25} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{2^{-2}} = 2^{-\frac{2}{3}}$

۷۱- $\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\times 2]{3^{1\times 2}} = \sqrt[6]{9}$

۷۲- $\sqrt[5]{\sqrt{27}} = \sqrt[5]{27^{\frac{1}{2}}} = 27^{\frac{\frac{1}{2}}{5}} = 27^{\frac{1}{10}}$

$= \sqrt[10]{27}$ (یا $\sqrt[5]{27^{\frac{1}{2}}} = (27^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = 27^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{27}$)

۷۳- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} = ((a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{a}$

۷۴- $2\sqrt[7]{2\sqrt[5]{2}} = 2\sqrt[7]{2\times 2^{\frac{1}{5}}} = 2\sqrt[7]{2^{\frac{6}{5}}} = 2\times(2^{\frac{6}{5}})^{\frac{1}{7}}$

$= 2\times 2^{\frac{6}{35}} = 2^{\frac{41}{35}} = \sqrt[35]{2^{41}}$

۷۵- $\sqrt{8^{-0/5}} = \sqrt{8^{-\frac{1}{2}}} = (8^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 8^{-\frac{1}{4}} = (2^3)^{-\frac{1}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}}$

$= \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

۷۶- $\frac{\sqrt[3]{8\sqrt{32}}}{\sqrt[4]{64\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2^3\times 2^{\frac{5}{2}}}}{\sqrt[4]{2^6\times 2^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt[3]{2^{\frac{11}{2}}}}{\sqrt[4]{2^{\frac{13}{2}}}} = \frac{(2^{\frac{11}{2}})^{\frac{1}{3}}}{(2^{\frac{13}{2}})^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{\frac{11}{6}}}{2^{\frac{13}{8}}}$

$= 2^{\frac{11}{6}-\frac{13}{8}} = 2^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{2^5} = \sqrt[24]{32}$

۷۷- $\sqrt[3]{-3\sqrt[4]{27}} = -\sqrt[3]{3\times 3^{\frac{3}{4}}} = -\sqrt[3]{3^{\frac{7}{4}}} = -(3^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$= -3^{\frac{7}{12}} = -\sqrt[12]{3^7}$

۷۸- $((\sqrt[6]{81})^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt[6]{81})^{-1} = (3^{\frac{4}{6}})^{-1} = 3^{-\frac{4}{6}}$

$= 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

۷۹- $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} 6^{\frac{1\times 3}{2\times 3}} = 6^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt[6]{216} \\ 6^{\frac{1\times 6}{2\times 6}} = 6^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{6^6} \end{cases}$

۸۰- $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \begin{cases} 7^{\frac{3}{9}} = \sqrt[9]{7^3} = \sqrt[9]{343} \\ 7^{\frac{5}{15}} = \sqrt[15]{7^5} \end{cases}$

۸۱- $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ 2^{\frac{4}{8}} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt[8]{16} \end{cases}$

۸۲- $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt[4]{9}$

۸۳- $\sqrt[5]{25}\times 125^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^2}\times(5^3)^{-\frac{2}{5}} = 5^{\frac{2}{5}}\times 5^{-\frac{6}{5}}$

$= 5^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5^4}}$

۸۴- $\frac{1}{\sqrt{2}}\times 4^{-\frac{1}{2}}\times 8^{\frac{3}{5}} = 2^{-\frac{1}{2}}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{3}{5}}$

$= 2^{-\frac{1}{2}}\times 2^{-1}\times 2^{\frac{9}{5}} = 2^{-\frac{1}{2}-1+\frac{9}{5}} = 2^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{8}$

۸۵- $\underbrace{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{3}}_{\text{ابتدا هم فرجه}} = \sqrt[6]{4^2}\times\sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{4^2\times 3^3} = \sqrt[6]{432}$

۸۶- $\underbrace{\sqrt{5}\times\sqrt[3]{3}\div\sqrt[4]{4}}_{\text{فرجه را به ۱۲ می‌رسانیم}} = \sqrt[12]{5^6}\times\sqrt[12]{3^4}\div\sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{\frac{5^6\times 3^4}{4^3}}$

۸۷-

الف) $\sqrt{3}\ \square\ \sqrt[4]{4} \xrightarrow{\text{فرجه را به ۴ می‌رسانیم}} \sqrt[4]{3^2}\ \boxed{>}\ \sqrt[4]{4}$

ب) $\sqrt{5}\ \square\ \sqrt[3]{6} \xrightarrow{\text{فرجه را به ۶ می‌رسانیم}} \sqrt[6]{5^3}\ \boxed{>}\ \sqrt[6]{6^2}$

پ) $\sqrt[5]{2}\ \square\ \sqrt[3]{3} \xrightarrow{\text{فرجه را به ۱۵ می‌رسانیم}} \sqrt[15]{2^3}\ \boxed{<}\ \sqrt[15]{3^5}$

۸۸- الف) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$

ب) $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}}\times a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$

۸۹- $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{128}-6\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{8\times 2}+\sqrt[3]{64\times 2}-6\sqrt[3]{2}$

$= 2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{2} = 0$

۹۰- $(4-\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\times(4+\sqrt{3})^{\frac{3}{6}} = (\underbrace{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})}_{\text{مزدوج}})^{\frac{1}{2}}$

$= (16-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{13}$

(دقت کردی توان‌ها مساوی بودن)

۹۱- $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\times\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(\sqrt{2}-1)^2}\times\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$

$= \sqrt[6]{2+1-2\sqrt{2}}\,\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}$

$= \sqrt[6]{9-8} = \sqrt[6]{1} = 1$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۹۲- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}} = \sqrt[8]{2^8} = 2$ (فرجه‌ها در هم ضرب شدند). برای ادامه باید رادیکال‌ها را هم‌فرجه کنیم:

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}} = \sqrt[3\times 2]{(1+\sqrt{2})^2} = \sqrt[6]{1+2+2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} \times \sqrt[6]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$$

$$= \sqrt[6]{9-8} = 1$$

پس حاصل $2 \times 1 = 2$ می‌شود.

۹۳- $\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}}}$. هم‌چنین برای هم‌فرجه‌کردن رادیکال‌ها داریم:

$$\sqrt{(1+\sqrt{7})} = \sqrt[4]{(1+\sqrt{7})^2} = \sqrt[4]{1+7+2\sqrt{7}} = \sqrt[4]{8+2\sqrt{7}}$$

پس داریم:

$$\sqrt[4]{\frac{8+2\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}} = \sqrt[4]{\frac{2(4+\sqrt{7})}{4+\sqrt{7}}} = \sqrt[4]{2}$$

۹۴-

$$\sqrt[6]{x\sqrt{x}} = \sqrt[3]{2} \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۶ می‌رسانیم}} x\sqrt{x}$$

$$= (\sqrt[3]{2})^6 = 2^{\frac{6}{3}} = 4 \Rightarrow x.x^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$\Rightarrow x^{\frac{3}{2}} = 2^2 \xrightarrow{\text{به توان } \frac{2}{3}} (x^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow x = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{16}$$

۹۵-

$$\sqrt[3]{5\sqrt{125}} = \sqrt{25^x} \Rightarrow \sqrt[3]{5\times 5^{\frac{3}{2}}} = 25^{\frac{x}{2}} = (5^2)^{\frac{x}{2}} = 5^x$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{5^{\frac{5}{2}}} = 5^x \Rightarrow 5^{\frac{5}{6}} = 5^x \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

۹۶-

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{1}{4}}} = \sqrt[6]{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{6}} \Rightarrow x^{\frac{13}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } \frac{12}{13}} (x^{\frac{13}{12}})^{\frac{12}{13}} = (2^{\frac{1}{6}})^{\frac{12}{13}} \Rightarrow x = 2^{\frac{2}{13}} = \sqrt[13]{4}$$

۹۷-

$$\sqrt{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}} = \sqrt{\sqrt[4]{x.x^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[8]{x^{\frac{4}{3}}} = x^{\frac{4}{3}\times\frac{1}{8}}$$

$$= x^{\frac{1}{6}} \Rightarrow x^{\frac{1}{6}} = y^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\text{توان ۶}} x = y^2$$

۹۸- از رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$a^2 - 6a = -1 \xrightarrow{\div a} a - 6 = -\frac{1}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{a} = 6$$

اما $\frac{a+1}{\sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ پس باید $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ را پیدا کنیم. این عبارت را برابر A می‌گیریم:

$$\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = A \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{a + \frac{1}{a}}_{6} + 2 = A^2$$

$$\Rightarrow A^2 = 8 \xrightarrow{A>0} A = \sqrt{8}$$

۹۹- قواعد توان حتی برای توان‌های گنگ هم برقرار است، یعنی داریم:

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad , \quad \sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{7^{\sqrt{3}} \times 7^{3\sqrt{3}}}{(7^2)^{2\sqrt{3}}} = \frac{7^{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}}{7^{4\sqrt{3}}} = \frac{7^{4\sqrt{3}}}{7^{4\sqrt{3}}} = 1$$

۱۰۰-

$$A = \sqrt[5]{3^2 \times 3^{\frac{1}{2}}(3\times 2^2)^{-1/5}} = \sqrt[5]{3^{\frac{5}{2}}} \times 3^{-1/5} \times 2^{-3}$$

$$= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{-1/5} \times 2^{-3} = 3^{-1} \times 2^{-3} = \frac{1}{3\times 8} = \frac{1}{24}$$

$$\Rightarrow (1+A^{-1})^{\frac{1}{2}} = (1+24)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

۱۰۱- $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

۱۰۲- $(2x-1)(4x^2+2x+1) = 8x^3 - 1$

۱۰۳- $(a^2+1)(a^4-a^2+1) = a^6 + 1$

۱۰۴- $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

۱۰۵- $\overbrace{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}^{\text{مزدوج}}(x^2+4) = \overbrace{(x^2-2)(x^2+4)}^{\text{یک جمله مشترک}}$

$$= x^4 + 2x^2 - 8$$

۱۰۶-

$$(x+3)^2 - (x-3)^2 = (x^2+6x+9) - (x^2-6x+9) = 12x$$

۱۰۷- $\underbrace{(x+3)(x-1)}_{\text{یک جمله مشترک}} - \underbrace{(x-2)(x+5)}_{\text{یک جمله مشترک}}$

$$= (x^2+2x-3) - (x^2+3x-10) = -x + 7$$

۱۰۸-

$$(x+2y-3z)^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 6xz - 12yz$$

۱۰۹- $(a+3)^3 = a^3 + 3a^2(3) + 3a(3)^2 + 3^3$

$$= a^3 + 9a^2 + 27a + 27$$

۱۱۰-

$$(\frac{x}{2}+2)^3 + (2-x)^3 = (\frac{x}{2})^3 + 3(\frac{x}{2})^2(2) + 3(\frac{x}{2})2^2$$

$$+ 2^3 + 2^3 - 3(2)^2(x) + 3(2)x^2 - x^3$$

$$= \frac{x^3}{8} + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 8 + 8 - 12x + 6x^2 - x^3$$

$$= -\frac{7}{8}x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 6x + 16$$

۱۱۱-

$$101^3 = (100+1)^3 = 100^3 + 3(100)^2 + 3(100) + 1 = 1030301$$

۱۱۲-

$$(2a+1)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 + 3(2a) + 1$$

$$= 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$$

۱۱۳-

$$(2-\sqrt{2})^3 = 2^3 - 3(2)^2\sqrt{2} + 3(2)\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^3$$

$$= 8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2} = 20 - 14\sqrt{2}$$

۱۱۴-

$$(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1) = \underbrace{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}_{\text{چاق و لاغر}}$$

$$= (x^2)^3 - 1 = x^6 - 1$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۱۵- $(2x-\frac{1}{3})(4x^2+\frac{1}{9}+\frac{2}{3}x)=(2x-\frac{1}{3})(4x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9})$

$=(2x)^3-(\frac{1}{3})^3=8x^3-\frac{1}{27}$

۱۱۶- $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)=(2a)^3+(3b)^3$

$=8a^3+27b^3$

۱۱۷- $(x-2)(x^2+2x+4)-(x+2)(x^2-2x+4)$

$=x^3-8-(x^3+8)=-16$

۱۱۸- $99^3=(100-1)^3=100^3-3(100)^2+3(100)-1=970299$

۱۱۹- $x^3-125=x^3-5^3=(x-5)(x^2+5x+25)$

۱۲۰- $a^3+8b^3=a^3+(2b)^3=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

۱۲۱- $27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

۱۲۲- $b^3+\frac{8}{27}=b^3+(\frac{2}{3})^3=(b+\frac{2}{3})(b^2-\frac{2}{3}b+\frac{4}{9})$

۱۲۳- $(ax)^3-\frac{b^3}{216}=(ax)^3-(\frac{b}{6})^3=(ax-\frac{b}{6})(a^2x^2+\frac{axb}{6}+\frac{b^2}{36})$

۱۲۴- $x^6-64=x^6-2^6$

چاق و لاغر

$=\underbrace{(x^3-2^3)(x^3+2^3)}_{\text{مزدوج}}=(x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)$

۱۲۵- $a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)(a+b)(a^2-ab+b^2)$

۱۲۶- $(a+b)^3-(a-b)^3=[(a+b)-(a-b)][(a+b)^2$

$+(a+b)(a-b)+(a-b)^2]$

$=2b(a^2+b^2+2ab+a^2-b^2+a^2+b^2-2ab)$

$=2b(3a^2+b^2)$

۱۲۷- $x^6\underset{\text{جمع}}{-9}x^3\underset{\text{ضرب}}{+8}=\underbrace{(x^3-1)(x^3-8)}_{\text{یک جملهٔ مشترک}}$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$

۱۲۸- $x^7+x=x(x^6+1)=x((x^2)^3+1)$

$=x(x^2+1)(x^4-x^2+1)$

۱۲۹- $x^4+x^2-2=(x^2-1)(x^2+2)=(x-1)(x+1)(x^2+2)$

۱۳۰- $a^3+6a^2+12a+8=(a+2)^3$

۱۳۱- $x^6-3x^4+3x^2-1=(x^2-1)^3=[(x-1)(x+1)]^3$

۱۳۲- $x^2+2x+1-t^2=(x+1)^2-t^2=(x+1+t)(x+1-t)$

۱۳۳- $\underline{ac}+\underline{ad}+\underline{bc}+\underline{bd}=a(c+d)+b(c+d)=(c+d)(a+b)$

۱۳۴- $\underline{x^3}+\underline{x^2}+\underline{4x}+\underline{4}=x^2(x+1)+4(x+1)$

$=(x+1)(x^2+4)$

۱۳۵- $x^4-x^3-x^2+2x-1=x^4-x^3-(x^2-2x+1)$

$=x^3(x-1)-(x-1)^2=(x-1)(x^3-(x-1))$

$=(x-1)(x^3-x+1)$

۱۳۶- $a^4-4a^2b^2+a^2b-4b^3=a^2(a^2-4b^2)+b(a^2-4b^2)$

$=(a^2-4b^2)(a^2+b)=(a-2b)(a+2b)(a^2+b)$

۱۳۷- $6x^2+5x+1\xrightarrow[\text{و ضرب آن‌ها ۶ باشد.}]{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۵}}2,3$

$\Rightarrow 6x^2+\underline{5x}+1=6x^2+\underline{3x+2x}+1$

$=3x(2x+1)+(2x+1)=(2x+1)(3x+1)$

۱۳۸- $2t^2+7t+6\xrightarrow[\text{و ضرب آن‌ها ۱۲ باشد.}]{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۷}}3,4$

$\Rightarrow 2t^2+7t+6=2t^2+4t+3t+6$

$=2t(t+2)+3(t+2)=(t+2)(2t+3)$

۱۳۹- $6x^2-5x-1\xrightarrow[\text{و ضرب آن‌ها ۶- باشد.}]{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۵-}}-6,1$

$\Rightarrow 6x^2-5x-1=6x^2-6x+x-1$

$=6x(x-1)+(x-1)=(x-1)(6x+1)$

۱۴۰- $9x^2-21x+10\xrightarrow[\text{و ضرب آن‌ها ۹۰ باشد.}]{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۲۱-}}-6,-15$

$\Rightarrow 9x^2-21x+10=9x^2-15x-6x+10$

$=3x(3x-5)-2(3x-5)=(3x-5)(3x-2)$

۱۴۱- $a^3-2a^2+1=a^3-a^2-a^2+1$

$=a^2(a-1)-(a-1)(a+1)$

$=(a-1)(a^2-a-1)$

۱۴۲- $21x^2-26xy+8y^2=\underline{21x^2}-\underline{14xy}-\underline{12xy}+\underline{8y^2}$

$=7x(3x-2y)-4y(3x-2y)=(3x-2y)(7x-4y)$

۱۴۳- $x^3-7x+6=x^3-7x+7-1$

$=x^3-1-7(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)-7(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x+1-7)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x+3)$

۱۴۴- $x^3+4x+5=x^3+1+4x+4=(x+1)(x^2-x+1)+4(x+1)$

$=(x+1)(x^2-x+1+4)=(x+1)(x^2-x+5)$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۴۵- عبارتی که گفته را با چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$27a^3-1=(3a)^3-1^3=(3a-1)(9a^2+3a+1)$$

پس عبارتی که گفته (یعنی $27a^3-1$) هم مضرب $3a-1$ است و هم مضرب $9a^2+3a+1$.

۱۴۶- اگر x را به صورت مستقیم جایگزین کنیم خیلی طولانی می‌شود، پس سعی می‌کنیم شکل عبارت داده‌شده را تغییر دهیم و بعد x را قرار دهیم:

$$x^3-3x^2+3x-1-7=(x-1)^3-7$$

$$\xrightarrow{x=1+\sqrt[3]{3}}(1+\sqrt[3]{3}-1)^3-7=3-7=-4$$

۱۴۷- الف)

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\Rightarrow 6^2=a^2+b^2+2(-1)$$

$$\Rightarrow a^2+b^2=38$$

$$a^3+b^3=(a+b)(\underbrace{a^2-ab+b^2}_{38})=6(38-(-1))=6\times 39=234$$

ب)

$$a^3+b^3+6ab=\underbrace{(a+b)}_{2}(a^2-ab+b^2)+6ab$$

$$=2a^2+4ab+2b^2=2(a^2+2ab+b^2)$$

$$=2(a+b)^2=2\times 2^2=8$$

۱۴۸- عبارت‌های داخل پرانتز، مربع کامل هستند:

$$(a^2+b^2-2ab)^2(a^2+b^2+2ab)^2=((a-b)^2)^2((a+b)^2)^2$$

$$=(a-b)^4(a+b)^4=(a^2-b^2)^4=(a^4+b^4-2a^2b^2)^2$$

a و b را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$=(\sqrt{6}-2+\sqrt{6}+2-2\sqrt{6-4})^2=(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})^2$$

$$=\overbrace{24+8}^{32}-8\sqrt{12}=32-16\sqrt{3}=16(2-\sqrt{3})$$

۱۴۹-

$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

$$\Rightarrow 3^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})(\overbrace{x^2-1+\frac{1}{x^2}}^{7})=3(6)=18$$

$$(x^2+\frac{1}{x^2})^2=x^4+2+\frac{1}{x^4}\Rightarrow 7^2=x^4+2+\frac{1}{x^4}$$

$$\Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=47$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=(x^2+\frac{1}{x^2})(\underbrace{x^4-1+\frac{1}{x^4}}_{47})=7(46)=322$$

۱۵۰- توجه کنید که $a^2=b^2+1$، پس $-1=b^2-a^2$. حالا:

چاق‌ولاغر

$$\frac{b^6-a^6+1}{3a^2b^2}=\frac{(b^2-a^2)(b^4+a^2b^2+a^4)+1}{3a^2b^2}$$

$$=\frac{(-1)(b^4+a^2b^2+a^4)+1}{3a^2b^2}=A$$

سعی می‌کنیم ارتباطی بین رابطهٔ $b^2-a^2=-1$ با عبارت به دست آمده برقرار کنیم:

$$b^2-a^2=-1\xrightarrow{\text{توان دوم}}b^4-2a^2b^2+a^4=1$$

$$\Rightarrow b^4+a^4=1+2a^2b^2\Rightarrow b^4+a^2b^2+a^4$$

$$=1+2a^2b^2+a^2b^2=1+3a^2b^2$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در A}}A=\frac{(-1)(1+3a^2b^2)+1}{3a^2b^2}$$

$$=\frac{-1-3a^2b^2+1}{3a^2b^2}=-\frac{3}{3}=-1$$

۱۵۱- $x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$

۱۵۲- $\sqrt{x+1}+2$

۱۵۳- $\sqrt{2}-\sqrt{a}$

۱۵۴- $D: x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

پس دامنه $x\neq\pm 1$ می‌شود.

$$\frac{(x^3+1)(x^3-1)}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

۱۵۵-

$$\frac{x^4+8x}{x^3+5x^2+6x}=\frac{x(x^3+8)}{x(x^2+5x+6)}$$

$$=\frac{x(x+2)(x^2-2x+4)}{x(x+3)(x+2)}=\frac{x^2-2x+4}{x+3}$$

دقت دارید که دامنه، $x\neq 0,-3,-2$ است.

۱۵۶-

$$[\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)}-\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)}]\div 4ab$$

$$=[a^2-ab+b^2-(a^2+ab+b^2)]\div 4ab$$

$$=-2ab\div 4ab=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

۱۵۷-

$$\frac{3x}{x-1}+\frac{2x}{4(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{3x(4)(x+1)+2x(x+1)+4}{4(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{12x^2+12x+2x^2+2x+4}{4(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{14x^2+14x+4}{4(x-1)(x+1)}=\frac{7x^2+7x+2}{2(x-1)(x+1)}$$

دقت دارید که $x\neq\pm 1$ است.

۱۵۸- $x^3+1=0\Rightarrow x^3=-1\Rightarrow x=-1$

$x+1=0\Rightarrow x=-1$

پس دامنه $x\neq -1$ می‌شود.

$$\frac{1}{\underbrace{x^3+1}_{(x+1)(x^2-x+1)}}+\frac{2}{x+1}=\frac{1+2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{2x^2-2x+3}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۵۹-
$$\frac{a+5}{a-1}-\frac{6}{a^2+a+1}-\frac{6(a^2+2)}{\underbrace{a^3-1}_{(a-1)(a^2+a+1)}}$$
$$=\frac{\overbrace{(a+5)(a^2+a+1)}^{a^3+6a^2+6a+5}-6(a-1)-6(a^2+2)}{(a-1)(a^2+a+1)}=\frac{a^3-1}{a^3-1}=1$$

۱۶۰-
$$\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{xy}}{3y}$$

۱۶۱-
$$\frac{2}{\sqrt[5]{\sqrt[4]{x^3}}}=\frac{2}{\sqrt[20]{x^3}}\times\frac{\sqrt[20]{x^{17}}}{\sqrt[20]{x^{17}}}=\frac{2\sqrt[20]{x^{17}}}{\sqrt[20]{x^{20}}}=\frac{2\sqrt[20]{x^{17}}}{x}\quad(x>0)$$

(توجه داری که $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$، پس $\sqrt[5]{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[20]{a}$)

۱۶۲-
$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{xy^2z^3}}\times\frac{\sqrt[5]{x^4y^3z^2}}{\sqrt[5]{x^4y^3z^2}}=\frac{(\sqrt{x})(\sqrt[5]{x^4y^3z^2})}{\sqrt[5]{x^5y^5z^5}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x})(\sqrt[5]{x^4y^3z^2})}{xyz}$$

۱۶۳-
$$\frac{-2}{\sqrt[3]{7\sqrt{2}}}\times\frac{\sqrt[3]{(7\sqrt{2})^2}}{\sqrt[3]{(7\sqrt{2})^2}}=\frac{-2\sqrt[3]{98}}{7\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{-2\sqrt[3]{98}\times\sqrt{2}}{7\times2}$$
$$=\frac{-\sqrt[3]{98}\times\sqrt{2}}{7}$$

۱۶۴-
$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

۱۶۵-
$$\frac{1}{3\sqrt{x}+2}\times\frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}-2}=\frac{3\sqrt{x}-2}{9x-4}$$

۱۶۶-
$$\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{a}-\underbrace{\sqrt{y-2}}_{b}}\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}}{\underbrace{\sqrt{x+1}}_{a}+\underbrace{\sqrt{y-2}}_{b}}$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}}{x+1-(y-2)}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}}{x-y+3}$$

۱۶۷-
$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{9}}\times\frac{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{9x}+\sqrt[3]{81})}{(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{9x}+\sqrt[3]{81})}=\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{9x}+\sqrt[3]{81}}{x+9}$$

۱۶۸-
$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{y}}{x-\sqrt{y}}\times\frac{x+\sqrt{y}}{x+\sqrt{y}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt[4]{y})(x+\sqrt{y})}{x^2-y}$$

۱۶۹- می‌توانیم ابتدا مخرج‌ها گویا کرده و سپس مخرج‌مشترک بگیریم، اما بهتر است در این‌جا برعکس عمل کنیم:
$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\times\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}=\frac{(a+b)(\sqrt{ab})}{ab}$$

۱۷۰- می‌توانیم ابتدا مخرج‌ها را گویا کرده و بعد مخرج‌مشترک بگیریم، ولی بهتر است ابتدا بین دو کسر اول مخرج‌مشترک بگیریم (چون مزدوجن ساده می‌شن):
$$\frac{1}{\sqrt{a}+1}-\frac{1}{\sqrt{a}-1}+\frac{2}{a^2-1}=\frac{\sqrt{a}-1-(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}+\frac{2}{a^2-1}$$
$$=\frac{-2}{a-1}+\frac{2}{\underbrace{a^2-1}_{(a-1)(a+1)}}$$
$$=\frac{-2(a+1)+2}{(a-1)(a+1)}=\frac{-2a}{(a-1)(a+1)}$$

۱۷۱- بهتر است ابتدا مخرج هر کسر را گویا کنیم:
$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}=\sqrt{2}-1\\ \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}+2}\times\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{3}-2}{3-4}=2-\sqrt{3}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$$

۱۷۲-
$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{3-\sqrt{6}}\times\frac{3+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}=\frac{3+\sqrt{6}}{9-6}=\frac{3+\sqrt{6}}{3}=\frac{3}{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}=\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow 1+\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}=1$$

۱۷۳-
$$\left.\begin{array}{l}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3}=4+3-4\sqrt{3}\\ \sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=4\sqrt{3}\end{array}\right\}$$
$$\Rightarrow 7-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}=7$$

۱۷۴-
$$\left.\begin{array}{l}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}\\ \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}\end{array}\right\}$$
$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}}\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)-(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+1)[\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1-\sqrt[3]{x}-1]}{x-1}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2})}{x-1}$$

۱۷۵- عبارت جبری را A می‌نامیم، پس:
$$A(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a^2-b^2\Rightarrow A=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$
$$=\frac{(a-b)(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۷۶-
$$(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3})\times\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}$$
$$=\frac{(x+2)-(x-3)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}}=\frac{5}{4}$$

۱۷۷-
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\times3}+\sqrt[3]{3^2}}\times\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}{2-3}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

۱۷۸-
$$\frac{1}{\sqrt[6]{x}-1}\times\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}+1}=\frac{\sqrt[6]{x}+1}{\underbrace{\sqrt[3]{x}}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

چون $x>0$ است، $\sqrt[6]{x^2}=\sqrt[3]{x}$

$$=\frac{(\sqrt[6]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}$$

۱۷۹- (می‌تونستی اول تو مزدوج، بعد تو خودش ضرب کنی)
$$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{(\sqrt{2-\sqrt{2}})(2+\sqrt{2})}{4-2}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{2}$$

۱۸۰-
$$\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}^2+(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x}+x}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}+x}=\frac{1}{\sqrt{x}+x}\times\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-x}=\frac{\sqrt{x}-x}{x-x^2}$$

۱۸۱- می‌توانیم ابتدا مخرج‌ها را گویا کرده و سپس مخرج‌مشترک بگیریم، ولی چون در دو کسر اول، عبارت‌های مزدوج داریم، بهتر است بین آن‌ها مخرج‌مشترک بگیریم:
$$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{\underbrace{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}_{4-2}}}$$
$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

۱۸۲-
$$\frac{1}{\sqrt{x-1}}\times\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$
$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$
(مثل تک رادیکالی گویا می‌شه)
$$\Rightarrow\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}+\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+1}{x-1}$$

۱۸۳- ابتدا کسرها را گویا می‌کنیم:
$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}}\times\frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$$
$$=\frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3}=\frac{13\sqrt{3}-13}{13}$$
$$=\frac{13(\sqrt{3}-1)}{13}=\sqrt{3}-1$$
$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow\sqrt{3}-1+2+\sqrt{3}=1+2\sqrt{3}$$

۱۸۴- کسرها را گویا می‌کنیم:
$$\frac{\sqrt{8}+\sqrt{27}}{5-\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-\sqrt{6}}\times\frac{5+\sqrt{6}}{5+\sqrt{6}}$$
$$=\frac{10\sqrt{2}+2\sqrt{12}+15\sqrt{3}+3\sqrt{18}}{25-6}$$
$$=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{3}+15\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{19}$$
$$=\frac{19(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{19}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

از طرفی $\sqrt{3}=\sqrt[4]{3^2}=\sqrt[4]{9}$ پس داریم:
$$2(\sqrt[4]{9}-1)^{-1}=\frac{2}{\sqrt[4]{9}-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$
$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2}=\sqrt{3}+1$$

پس حاصل برابر است با: $\sqrt{2}+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)=\sqrt{2}-1$

۱۸۵- با کمی دقت متوجه می‌شویم که توان‌ها یکسان هستند، چون:
$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}\times\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}=\sqrt{5}+2$$

پس یکی از توان‌ها را نوشته و پایه‌ها را ضرب می‌کنیم:
$$[(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})]^{\sqrt{5}+2}=(7-6)^{\sqrt{5}+2}=1$$

پاسخ آزمون جمع بندی فصل سوم

۱- **الف)** نادرست است. $\sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|=2$ ولی $(\sqrt[4]{-2})^4$ تعریف‌نشده است، چون $\sqrt[4]{-2}$ تعریف‌نشده است.

ب) درست است. (x نباید زیر رادیکال باشد.)

۲- **الف)** $2<\sqrt[3]{17}<3$ پس $\sqrt[3]{-17}$ بین -3 و -2 است؛ یعنی $-3<\sqrt[3]{-17}<-2$.

ب) $a>1$ است. اگر $0<a<1$ باشد، ریشهٔ سوم a از خودش بزرگ‌تر می‌شود.

۳-

۳- **الف)**

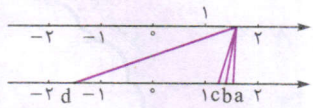
ب) $\sqrt[5]{4^{-5}}=\sqrt[5]{(\frac{1}{4})^5}=\frac{1}{4}$

پ) $\sqrt[8]{256}=\sqrt[8]{2^8}=2$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۴- الف)

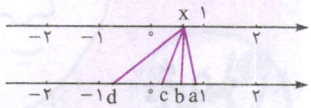
$$-\underbrace{\sqrt[4]{x}}_{d} < \underbrace{\sqrt[5]{x}}_{c} < \underbrace{\sqrt[4]{x}}_{b} < \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{a}$$



(اگر $x > 1$ باشد، هرچه ریشهٔ بزرگ‌تری بگیریم، کوچک‌تر می‌شود.)

ب)

$$\underbrace{-\sqrt[4]{x}}_{d} < \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{c} < \underbrace{\sqrt[4]{x}}_{b} < \underbrace{\sqrt[5]{x}}_{a}$$



۵- اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{\square^n} = |\square|$ و اگر n فرد باشد، $\sqrt[n]{\square^n} = \square$. پس داریم:

$$\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5}$$

$$= \sqrt{3}-2-|\underbrace{\sqrt{3}-2}_{\ominus}|-(\sqrt{3}-2)$$

$$= \sqrt{3}-2\overbrace{-(-}^{+}(\sqrt{3}-2))-\sqrt{3}+2=\sqrt{3}-2$$

۶-

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{5\sqrt{125}} = \sqrt{5\times\sqrt{5^3}} = \sqrt{\sqrt{5^2\times 5^3}} = \sqrt[4]{5^5} = 5^{\frac{5}{4}} \\ \sqrt{25^x} = \sqrt{5^{2x}} = 5^{\frac{2x}{2}} = 5^x \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 5^{\frac{5}{4}} = 5^x \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

۷- الف) $2x^2+3x+1 = 2x^2+2x+x+1 = 2x(x+1)+x+1$
$= (x+1)(2x+1)$

ب) $a^3-2ab+a^2b-2b^2 = a(a^2-2b)+b(a^2-2b)$
$= (a+b)(a^2-2b)$

۸- الف) $\dfrac{x^6+1}{x^4+2x^2+1} = \dfrac{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4-x^2+1}{x^2+1}$

ب) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+7}{(x+3)(x-1)}$

$$= \frac{(x+1)(x+3)+(x+2)(x-1)-(x+7)}{(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2+4x+3+x^2+x-2-x-7}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{2x^2+4x-6}{(x+3)(x+1)} = \frac{2(x^2+2x-3)}{(x+3)(x+1)}$$

$$= \frac{2(x+3)(x-1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{2(n-1)}{n+1}$$

۹- الف) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}\times\dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = \dfrac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{3-1}$

$$= \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2}$$

ب) $\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}\times\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}} = \dfrac{(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}}$

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt[4]{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt[4]{xy})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

معادلات و نامعادلات

فصل چهارم

درس ۱ معادلهٔ درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

درجه و مقدار عبارت‌های جبری

به عبارت‌هایی مثل $۲x+۱$، $b^۲-۴a$ و $۳x^۲-۷x+\frac{۱}{۲}$ عبارت جبری گفته و بزرگ‌ترین توانی (*ضریب نه!*) از x که در عبارت جبری وجود دارد را درجهٔ آن عبارت جبری می‌نامیم. مثلاً عبارت جبری $۱۰x+۱$ از درجهٔ اول و عبارت جبری $۵x^۲-۶x+۳$ از درجهٔ دوم است.

مقدار عبارت جبری: برای به دست آوردن مقدار عبارت جبری به ازای عدد داده‌شده، آن را به جای متغیرها، قرار می‌دهیم. مثلاً مقدار عبارت جبری $۱۰x+۱$، به ازای $x=۲$ می‌شود: $۱۰(۲)+۱=۲۱$ یا مقدار $۵x^۲-۶x+۳$ به ازای $x=-۱$ می‌شود: $۵(-۱)^۲-۶(-۱)+۳=۵\times۱+۶+۳=۱۴$.

نکته

حواستان به ترتیب عملیات باشد: اول توان، بعد ضرب و تقسیم و در پایان جمع و تفریق را انجام دهید.

جواب معادله: عددی است که با قراردادن آن به جای x، دو طرف مساوی می‌شوند.

معرفی معادلهٔ درجه دوم

معادلهٔ درجه‌دوم به صورت $ax^۲+bx+c=۰$ است که a، b و c ضریب‌های عددی معادله، هستند.

مثلاً در معادلهٔ $x^۲+۳x-۱=۰$ داریم: $a=۱$، $b=۳$ و $c=-۱$ یا در معادلهٔ $۳x^۲+۲=۰$ داریم: $a=۳$، $b=۰$ و $c=۲$. به عبارت دیگر a همان ضریب $x^۲$، b همان ضریب x و c عدد ثابت معادله است.

نکته

۱ اگر $a=۰$ باشد، معادله دیگر درجه‌دوم نیست، بنابراین در معادلهٔ درجه‌دوم، a (همون *ضریب* $x^۲$) صفر نیست $(a\neq۰)$.

۲ معادلهٔ درجه‌دوم، حداکثر دو جواب دارد، یعنی دو جواب یا یک جواب دارد یا جواب ندارد. به جواب معادله، ریشهٔ معادله هم گفته می‌شود.

یادآوری تجزیهٔ عبارت‌های درجه دوم

۱ **تجزیه با فاکتورگیری:** اگر همهٔ جمله‌های عبارت، دارای عامل مشترکی باشند، می‌توانیم از آن فاکتور بگیریم.

۲ **تجزیه با اتحاد مزدوج:** اتحاد مزدوج به صورت $a^۲-b^۲=(a-b)(a+b)$ است، بنابراین اگر عبارت‌های جبری به صورت $a^۲-b^۲$ (*تفاضل دو تا مربع*) داشتید، می‌توانید با اتحاد مزدوج، آن‌ها را تجزیه کنید.

۳ **تجزیه با اتحاد یک جملهٔ مشترک:** عبارت‌هایی که به صورت $x^۲+bx+c$ هستند، معمولاً با اتحاد یک جملهٔ مشترک، تجزیه می‌شوند. باید دو عدد پیدا کنیم که جمع آن‌ها b و ضرب آن‌ها c باشد. به علامت b و c کاملاً توجه داشته باشید و سعی کنید از ضرب کمک بگیرید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته مهم

برای تجزیه با استفاده از این روش، ضریب x^2 حتماً باید برابر یک باشد.

۴ **استفاده از اتحاد مربع (مجموع یا تفاضل):** این دو اتحاد به صورت $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ و $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ هستند. ممکن است عبارت درجه‌دوم، سمت چپ این اتحاد باشد.

روش‌های حل معادلهٔ درجه‌دوم

۱) روش تجزیه

ابتدا معادله را تجزیه کنیم، اگر ضرب دو عبارت، برابر صفر باشد، یا اولی صفر است یا دومی؛ یعنی:

$ab=0 \Rightarrow a=0$ یا $b=0$ (توجه کن a و b دو عبارت هستن.)

مثلاً می‌خواهیم معادلهٔ $x^2-16=0$ را با روش تجزیه حل کنیم:

$$x^2-16=0 \Rightarrow (x-4)(x+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ \text{یا} \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

مثال معادله‌های درجه‌دوم زیر را با روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2+4x=0$ ب) $x^2-25=0$ پ) $x^2-5x+6=0$ ت) $x^2-2x+1=0$

پاسخ

الف) $x^2+4x=0 \xrightarrow{\text{تجزیه با فاکتورگیری}} x(x+4)=0 \Rightarrow x=0$ یا $x+4=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=-4$

ب) $x^2-25=0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد مزدوج}} (x+5)(x-5)=0 \Rightarrow x+5=0$ یا $x-5=0 \Rightarrow x=-5$ یا $x=5$

پ) $x^2-5x+6=0 \xrightarrow{\text{تجزیه با یک جملهٔ مشترک}} (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow x-2=0$ یا $x-3=0 \Rightarrow x=2$ یا $x=3$

ت) $x^2-2x+1=0 \xrightarrow{\text{تجزیه با یک جملهٔ مشترک}} (x-1)(x-1)=0 \Rightarrow x-1=0$ یا $x-1=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=1 \Rightarrow x=1$

مورد داشتیم پرسیده آقا قسمت ت، معادله دو جواب دارد، یا یه جواب؟

ببین سؤال خیلی خوبی پرسیدی. معادله یک جواب $x=1$ دارد اما این جواب تکراری است. به همین خاطر می‌گویند $x=1$ جواب مضاعف (دوبله) یا ریشهٔ مضاعف معادله است. x^2-2x+1 رو با اتحاد اول هم می‌تونستی تجزیه کنی. یعنی:

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \xrightarrow[\text{برابر صفر می‌شود.}]{\text{فقط صفر به توان ۲}} x-1=0 \Rightarrow x=1$$

به دلیل وجود توان دوم در $(x-1)^2$، به جواب $x=1$، ریشهٔ مضاعف گفته می‌شود.

مثال معادلهٔ درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۱ و ۲− باشد.

پاسخ عدد ۱، ریشهٔ معادلهٔ $x-1=0$ و عدد ۲−، ریشهٔ معادلهٔ $x+2=0$ است، پس کافی است معادله را به صورت $(x-1)(x+2)=0$ در نظر بگیریم. با ضرب ساده‌سازی داریم: $x^2+2x-x-2=0$، یعنی $x^2+x-2=0$ معادله‌ای است که ریشه‌هایش ۱ و ۲− است.

۲) روش ریشه‌گیری (حل معادلهٔ $x^2=k$)

معادلهٔ $x^2-4=0$ را در نظر بگیرید. معادله را به صورت $x^2=4$ می‌نویسیم. چه اعدادی به توان ۲ برابر ۴ می‌شوند؟ درست است ۲ و ۲−، پس $x=\pm 2$. به عبارت دیگر $x=\pm\sqrt{4}$.

نکته

۱ اگر $k\geq 0$ باشد، جواب‌های معادلهٔ $x^2=k$ می‌شود: $x=\pm\sqrt{k}$.

۲ اگر $k<0$ باشد، معادلهٔ $x^2=k$ جواب ندارد، مثلاً معادلهٔ $x^2=-1$ جواب ندارد، چون حاصل هیچ عددی به توان ۲، منفی نمی‌شود.

۳ در حالت کلی ممکن است به جای x، یک عبارت □ نیز قرار گیرد و معادله به صورت $\square^2=k$ باشد.

مثال معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^2-9=0$ ب) $2x^2-10=0$ پ) $3x^2+4=0$

پاسخ

الف) $x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm\sqrt{9} \Rightarrow x=\pm 3$

ب) $2x^2-10=0 \Rightarrow 2x^2=10 \Rightarrow x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

پ) $3x^2+4=0 \Rightarrow 3x^2=-4 \Rightarrow x^2=-\frac{4}{3} \xrightarrow[\text{منفی نمی‌شود.}]{x^2\text{ برابر با عدد}}$ معادله جواب ندارد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال معادلهٔ $(x+1)^2=1$ را حل کنید.

پاسخ معادله را به صورت $\square^2=1$ در نظر بگیرید. با توجه به نکتهٔ (۳) داریم: $\square=\pm\sqrt{1}=\pm 1$. حالا $\square$ همان $x+1$ است، پس:

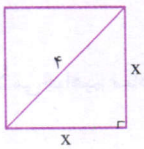
$$x+1=1 \Rightarrow x=0 \quad \text{یا} \quad x+1=-1 \Rightarrow x=-2$$

مثال معادلهٔ $(2x-1)^2=3$ را حل کنید.

پاسخ معادله را به صورت $\square^2=3$ در نظر بگیرید. با توجه به نکتهٔ (۳) $\square=\pm\sqrt{3}$. حالا $\square$ همان $2x-1$ است، پس:

$$2x-1=\sqrt{3} \Rightarrow 2x=\sqrt{3}+1 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad , \quad 2x-1=-\sqrt{3} \Rightarrow 2x=-\sqrt{3}+1 \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$$

مثال طول قطر مربعی برابر ۴ است. طول ضلع آن را به دست آورید.



پاسخ مربعی به ضلع x در نظر بگیرید. به یاد دارید که طبق قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر، برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر، پس باید معادلهٔ $x^2+x^2=4^2$ را حل کنیم.

$2x^2=16$، پس $x^2=\frac{16}{2}=8$ و لذا $x=\pm\sqrt{8}$. چون x طول ضلع مربع است، جواب منفی برای x قابل قبول نیست. طول ضلع مربع $\sqrt{8}$ خواهد بود.

۳) روش مربع کامل

می‌خواهیم معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ را با روش دیگری حل کنیم. هدف این است که معادلهٔ درجه‌دوم را به صورت $\square^2=k$ درآورده و در صورتی که $k\geq 0$ باشد، نتیجه بگیریم: $\square=\pm\sqrt{k}$.

مثلاً می‌خواهیم $x^2+6x-8=0$ را حل کنیم.

گام اول -8 را به طرف راست معادله می‌بریم تا معادلهٔ $x^2+6x=8$ به دست آید.

گام دوم نصف ضریب x می‌شود ۳. توان دوم عدد ۳ (یعنی ۹) را به دو طرف معادله (به دو طرف اضافه می‌کنیم تا معادله عوض نشه!) اضافه می‌کنیم.

گام سوم سمت چپ معادله، به صورت $(a+b)^2$ درمی‌آید:

$$\underbrace{x^2+6x+3^2}=8+3^2 \Rightarrow \underbrace{(x+3)^2}=8+9 \Rightarrow (x+3)^2=17 \Rightarrow x+3^2=17$$

گام چهارم حالا جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x+3=\sqrt{17} \Rightarrow x=\sqrt{17}-3 \\ x+3=-\sqrt{17} \Rightarrow x=-\sqrt{17}-3 \end{cases}$$

یا مثلاً می‌خواهیم معادلهٔ $x^2-4x-7=0$ را حل کنیم:

گام اول -7 را به طرف دیگر می‌بریم.

گام دوم نصف ضریب x برابر -2 است، توان دوم آن می‌شود $(-2)^2=4$. حالا عدد ۴ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$\underbrace{x^2-4x+4}=7+4 \Rightarrow (x-2)^2=11 \xrightarrow{\text{گام چهارم}} x-2=\pm\sqrt{11} \Rightarrow x-2=\sqrt{11} \Rightarrow x=\sqrt{11}+2 \quad \text{یا} \quad x-2=-\sqrt{11}$$

گام سوم

$$\Rightarrow x=-\sqrt{11}+2$$

مثال معادلهٔ $2x^2+3x-1=0$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ این معادله یک تفاوت با دو معادلهٔ قبلی دارد! ضریب x^2 برابر یک نیست، پس گام صفر هم به حل معادله اضافه می‌شود:

گام اول با تقسیم جمله‌ها بر ۲، ضریب x^2، برابر ۱ می‌شود. بعد همان کارهای قبلی را تکرار می‌کنیم.

$$2x^2+3x-1=0 \Rightarrow \frac{2x^2}{2}+\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0 \xrightarrow{\text{گام (۱)}} x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$$

گام دوم نصف ضریب x می‌شود $\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$. توان دوم آن $(\frac{3}{4})^2$ است که باید آن را به دو طرف معادله اضافه کنیم.

گام سوم

$$x^2+\frac{3}{2}x+(\frac{3}{4})^2=(\frac{3}{4})^2+\frac{1}{2} \Rightarrow (x+\frac{3}{4})^2=\frac{9}{16}+\frac{1}{2}=\frac{9+8}{16}=\frac{17}{16} \Rightarrow (x+\frac{3}{4})^2=\frac{17}{16} \Rightarrow x+\frac{3}{4}=\pm\sqrt{\frac{17}{16}}$$

گام چهارم جواب‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow x+\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x=-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{17}}{4}=\frac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ x+\frac{3}{4}=-\frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow x=-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{17}}{4}=\frac{-3-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

برای حل معادلهٔ درجه‌دوم به روش مربع کامل به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۰ در صورتی که ضریب x^2 برابر با یک نباشد، با تقسیم جمله‌ها بر آن عدد، ضریب آن را یک می‌کنیم. (تقسیم بر a)

۱ عدد ثابت را به سمت دیگر معادله می‌بریم.

۲ ضریب x را نصف کرده و آن را به توان ۲ می‌رسانیم. حالا عدد به دست آمده را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

۳ سه جملهٔ سمت چپ معادله، تشکیل اتحاد مربع را می‌دهند. عبارت‌های سمت راست را نیز ساده می‌کنیم. معادله به صورت $\square^2 = k$ درآمده است.

۴ اگر $k < 0$ (منفی) باشد، معادله جواب ندارد. اگر $k \geq 0$ باشد $\square = \pm\sqrt{k}$ خواهد بود. با حل معادله‌های $\square = \sqrt{k}$ و $\square = -\sqrt{k}$، جواب‌های معادله (همون x) به دست می‌آیند.

۴) روش Δ (روش کلی)

معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر بگیرید. عدد $b^2 - (4ac)$ را **مُبَیِّن معادله** نامیده و آن را با حرف یونانی Δ (دلتا) نمایش می‌دهیم.

برای حل معادله، ابتدا Δ را به دست می‌آوریم. برای Δ، سه حالت ممکن است به وجود آید:

الف $\Delta > 0$ باشد. در این حالت معادلهٔ درجه‌دوم دو ریشه دارد. یکی از آن‌ها $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و دیگری $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ است.

ب $\Delta = 0$ باشد. در این حالت، دو جواب بالا، برابر با $\frac{-b}{2a}$ می‌شوند. در این حالت می‌گوییم معادله، یک ریشهٔ مضاعف دارد.

پ $\Delta < 0$ باشد. در این حالت معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال معادلهٔ $x^2 - 3x + 2 = 0$ را با روش Δ حل کنید.

پاسخ $a = 1$، $b = -3$ و $c = 2$ است. حالا:

$$\Delta = b^2 - (4ac) = (-3)^2 - (4(1)(2)) = 9 - 8 = 1$$

چون Δ مثبت است، معادله دو ریشه دارد.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{3+1}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2(1)} = \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

مثال معادلهٔ $2x^2 - \sqrt{5}x - 3 = 0$ را با روش Δ حل کنید.

پاسخ $a = 2$، $b = -\sqrt{5}$ و $c = -3$ است، پس:

$$\Delta = b^2 - (4ac) = (-\sqrt{5})^2 - (4(2)(-3)) = 5 - (-24) = 29$$

چون $\Delta > 0$ است، معادله دو ریشه دارد.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{5})+\sqrt{29}}{2(2)} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{29}}{4} \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{5})-\sqrt{29}}{2(2)} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{29}}{4} \end{cases}$$

مثال معادلهٔ $4x^2 = 4x - 1$ را با روش Δ حل کنید.

پاسخ ابتدا عبارت‌های سمت راست را به چپ می‌بریم تا معادلهٔ $4x^2 - 4x + 1 = 0$ به دست آید، بنابراین $a = 4$، $b = -4$ و $c = 1$ است، پس:

$$\Delta = b^2 - (4ac) = (-4)^2 - (4(4)(1)) = 16 - 16 = 0$$

چون $\Delta = 0$ است معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد که برابر است با:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(4)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

مثال معادلهٔ $-x^2 + 3x - 7 = 0$ را با روش Δ حل کنید.

پاسخ $a = -1$، $b = 3$ و $c = -7$ است، پس:

$$\Delta = b^2 - (4ac) = 3^2 - (4(-1)(-7)) = 9 - (28) = -19$$

چون $\Delta < 0$ است (منفی است) معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $2x^2 + ax - 3 = 0$ برابر $\frac{1}{2}$ باشد، جواب دیگر معادله را به دست آورید.

پاسخ ابتدا باید a را به دست آورده و بعد معادلهٔ درجه‌دوم را حل کنیم. $x = \frac{1}{2}$ جواب معادله است. اگر یادتان باشد، گفتیم جواب معادله، عددی است که می‌توان آن را به جای x در معادله قرار داد، پس:

$$2(\tfrac{1}{2})^2 + a(\tfrac{1}{2}) - 3 = 0 \Rightarrow 2(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{a}{2} - 3 = 0 \Rightarrow \tfrac{a}{2} = 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{6-1}{2} = \tfrac{5}{2} \Rightarrow \tfrac{a}{2} = \tfrac{5}{2} \Rightarrow a = 5$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

حالا معادلهٔ درجه‌دوم $2x^2+5x-3=0$ را حل می‌کنیم. $a=2$، $b=5$ و $c=-3$ است. *(این a رو با اون a قاطی نکنی!)*

$\Delta>0$ است، پس معادله دو ریشه دارد. $\Rightarrow$ $\Delta=b^2-(4ac)=5^2-(4(2)(-3))=25-(-24)=49$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{49}}{2(2)}=\dfrac{-5+7}{2(2)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{49}}{2(2)}=\dfrac{-5-7}{4}=-\dfrac{12}{4}=-3 \Rightarrow \text{جواب دیگر معادله} \end{cases}$$

مثال **معادلهٔ $x^2-mx+3=0$ یک ریشهٔ مضاعف دارد. m را به دست آورید.**

پاسخ شرط این‌که معادله، ریشهٔ مضاعف داشته باشد، این است که $\Delta=0$ باشد، پس:

$$b^2-(4ac)=0 \Rightarrow (-m)^2-(4(1)(3))=0 \Rightarrow m^2-12=0 \Rightarrow m^2=12 \Rightarrow m=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$$

مثال **معادلهٔ $x^2+3x-m=0$ جواب ندارد. m چه اعدادی می‌تواند باشد؟**

پاسخ شرط این‌که معادله جواب نداشته باشد، این است که $\Delta<0$ باشد، پس:

$$b^2-(4ac)<0 \Rightarrow 3^2-(4(1)(-m))<0 \Rightarrow 9-(-4m)<0 \Rightarrow 9+4m<0 \Rightarrow 4m<-9$$

باید دو طرف نامعادله را بر ضریب مجهول (یعنی m) تقسیم کنیم. چون عدد ۴ مثبت است، جهت نامساوی عوض نمی‌شود:

$\dfrac{4m}{4}<-\dfrac{9}{4} \Rightarrow m<-\dfrac{9}{4}$ یعنی اگر m عددی کوچک‌تر از $-\dfrac{9}{4}$ باشد، معادله جواب ندارد.

دو نکته برای محاسبهٔ سریع ریشه‌ها

۱ اگر در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم $a+b+c=0$، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها $x_1=1$ و دیگری $x_2=\dfrac{c}{a}$ است.

۲ اگر در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم $a+c=b$، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها $x_1=-1$ و دیگری $x_2=-\dfrac{c}{a}$ است.

مثال **ریشه‌های معادلهٔ $x^2-7x-8=0$ را به دست آورید.**

پاسخ $a=1$، $b=-7$ و $c=-8$ است. $a+c=b$ است، پس یکی از ریشه‌ها $x_1=-1$ و دیگری $x_2=-\dfrac{c}{a}=8$ است.

مثال **ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ را به دست آورید.**

پاسخ $a=1$، $b=-(1+\sqrt{2})$ و $c=\sqrt{2}$ است.

$$a+b+c=1-(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}=1-1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$$

پس یکی از ریشه‌ها $x_1=1$ و دیگری $x_2=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$ است.

جمع‌بندی روش‌های حل معادلهٔ درجه دوم

روش	راه‌حل
تجزیه	عبارت را تجزیه می‌کنیم. $\Rightarrow \square\times\bigcirc=0 \Rightarrow \square=0$ یا $\bigcirc=0$
ریشه‌گیری	$\square^2=k$ $\begin{cases} k\geq0 \Rightarrow \square=\pm\sqrt{k} \\ k<0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد.} \end{cases}$
مربع کامل	$ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{\div a} x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0 \xrightarrow[\text{دو طرف اضافه می‌کنیم.}]{\text{مربع نصف ضریب x را به}} \square^2=k \Rightarrow$ شبیه ریشه‌گیری عمل می‌کنیم.
کلی (دلتا)	$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow \Delta=b^2-4ac$: $\Delta>0$: معادله دو ریشهٔ حقیقی دارد. $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$؛ $\Delta=0$: معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد: $x=-\dfrac{b}{2a}$؛ $\Delta<0$: معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ یک معادلهٔ درجه‌دوم داده شده و شما باید آن را حل کنید. اگر نوع روش از شما خواسته نشده باشد مجاز هستید از هر روشی معادله را حل کنید در غیر این صورت می‌توانید از هر کدام از روش‌های گفته‌شده، جواب‌ها را به دست آورید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱ تا ۳۲

تیپ۲ مسائل معادلهٔ درجه دوم: مجهول معادله را x گرفته و معادلهٔ درجه‌دوم را تشکیل داده و آن را حل کنید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۳۳ تا ۴۵

تیپ۳ در معادلهٔ درجه‌دوم یک مجهول (مثل m) وجود دارد. با توجه به تعداد ریشه‌ها یا اطلاعات دیگر باید m را به دست آورید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۴۶ تا ۵۴

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۱- معادلهٔ $(x+1)(x^2+1)=0$ دارای ..... جواب است.

۲- برای حل معادلهٔ $x^2+3x=5$ با روش مربع کامل دو طرف را با عدد ..... جمع می‌کنیم.

۳- اگر در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ داشته باشیم $b^2=4ac$، معادله ..... جواب دارد.

۴- دلتای معادلهٔ $-x^2+3=0$ برابر ..... است.

معادله‌های زیر را با روش تجزیه حل کنید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۵- $2x^2+5x=0$

۶- $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}=0$

۷- $x(x+1)=x+1$

۸- $(4x-3)^2-(x-1)^2=0$

۹- $x^2-x-72=0$

۱۰- $x^2-11=10x$

۱۱- $x^2-15x+36=0$

۱۲- $9x^2+6x+1=0$

جواب‌های معادله‌های زیر را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۳- $x^2=5$

۱۴- $x^2+3=0$

۱۵- $x^2=\frac{3}{4}$

۱۶- $(x-1)^2=9$

۱۷- $(2x+1)^2=16$

معادله‌های زیر را با روش مربع کامل حل کنید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۸- $x^2-2x-3=0$

۱۹- $x^2+6x+4=0$

۲۰- $x^2-4x=-1$

۲۱- $-8x+x^2+4=0$

۲۲- $2x^2+12x+3=0$

۲۳- $x^2-5x+1=0$

۲۴- $\frac{1}{2}x^2+x-3=0$

۲۵- $x^2-x+7=0$

معادله‌های زیر را با روش Δ حل کنید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۲۶- $x^2+5x+4=0$

۲۷- $x^2-x-4=0$

۲۸- $x^2-3x=0$

۲۹- $2x^2-4x=1$

۳۰- $x^2-8=0$

۳۱- $\frac{x^2}{2}+x-2=0$

۳۲- $x^2+x+\frac{1}{4}=0$

در هر یک از سؤال‌های ۳۳ تا ۳۶ با نوشتن معادلهٔ مناسب، اعداد خواسته‌شده را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

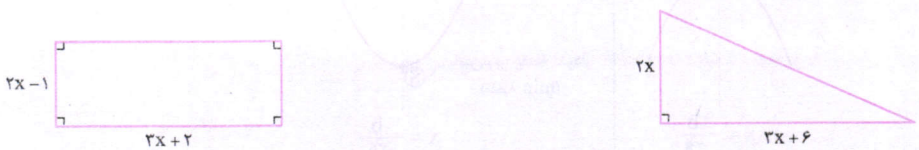
۳۳- عدد صحیحی که وقتی آن را با مربعش جمع کنیم، حاصل ۱۲ شود.

۳۴- دو عدد فرد متوالی که ضرب آن‌ها برابر ۱۴۳ باشد.

۳۵- عدد صحیحی که جمع خودش و معکوسش برابر ۲ باشد.

۳۶- مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی برابر ۳۹۴ است. این دو عدد را بیابید.

۳۷- مساحت دو شکل زیر مساوی است. طول و عرض مستطیل چه‌قدر است؟



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۳۸- یکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر x است. طول وتر، ۲ واحد از طول این ضلع بزرگ‌تر و طول ضلع دیگر، یک واحد از آن کم‌تر است. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس، طول اضلاع مثلث را به دست آورید.

۳۹- طول مستطیلی، دو برابر عرض آن است. اگر مساحت مستطیل ۸۰۰ متر مربع باشد، طول و عرض مستطیل را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۴۰- اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر ۴ سال دیگر حاصل‌ضرب سن آن‌ها ۶۰ شود، سن هر کدام را تعیین کنید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

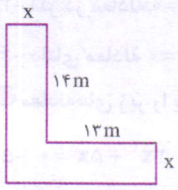
۴۱- می‌خواهیم وسط زمینی مستطیل‌شکل، باغچه‌ای مستطیلی به ابعاد ۱۵ و ۱۰ متر درست کنیم. کناره‌های باغچه از لبه‌های کناری زمین فاصله‌ای برابر دارند. اگر مساحت باغچه $\frac{۲۵}{۳۴}$ مساحت زمین باشد، کناره‌های باغچه، از لبه‌های کناری زمین چه‌قدر فاصله دارند؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۴۲- با ۵۰ متر نرده، زمینی مستطیل‌شکل به مساحت ۱۳۶ متر مربع را نرده کشیده‌ایم. طول و عرض زمین چه‌قدر است؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۴۳- افرادی در یک همایش شرکت کرده‌اند. در پایان همایش همهٔ افراد برای خداحافظی با هم دست می‌دهند. اگر تعداد دست‌دادن‌ها ۶۶ بار باشد، چند نفر در این همایش شرکت کرده‌اند؟ اگر تعداد دست‌دادن‌ها y و تعداد افراد n باشد، مدلی برای تعداد دست‌دادن‌ها بنویسید. (رابطه‌ای بین y و n) *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۴۴- براساس اطلاعات آماری، میانگین نمره‌های ریاضی تعداد دانش‌آموزان یک کلاس (y)، ارتباط با میانگین ساعت مطالعه آن‌ها در هفته (h) دارد. این رابطه توسط معادلهٔ $y = -۰/۰۶۲۵h^۲ - h + ۲۴ \ (۰ \le h \le ۸)$ بیان می‌شود. برای رسیدن به میانگین نمره ۱۶، میانگین ساعت مطالعهٔ دانش‌آموزان چه‌قدر باید باشد؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۴۵- پارکینگی به صورت مقابل است. اگر مساحت این پارکینگ ۱۶۰ متر مربع باشد، طول x را به دست آورید.



۴۶- در هر معادله مقدار a را طوری تعیین کنید که معادله یک ریشه داشته باشد. سپس آن ریشه را بیابید.

الف) $x^۲ - ۳ax + ۲a^۲ + ۱ = ۰$ ب) $(a+۸)x^۲ + ۲(۵a+۳)x + a + ۸ = ۰$

عدد c را به صورتی تعیین کنید که معادلهٔ $x^۲ + ۲x + c = ۰$:

۴۷- دارای دو ریشه باشد.

۴۸- دارای یک ریشهٔ مضاعف دارد.

۴۹- دارای ریشهٔ حقیقی نباشد.

۵۰- یکی از جواب‌های معادلهٔ $۷x^۲ + ax + ۱۲ = ۰$ برابر -۴ است. جواب دیگر معادله را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۵۱- اگر $x = ۲$ تنها جواب معادلهٔ $x^۲ + (n-۲)x - (m+۱) = ۰$ باشد، مقدار m و n را بیابید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۵۲- نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی که به جای m قرار گیرد، معادلهٔ $x^۲ + ۲mx + m^۲ + ۱ = ۰$ جواب ندارد.

۵۳- نشان دهید به ازای هر عدد حقیقی $m \neq ۰$، معادلهٔ $mx^۲ + (۲m+۱)x + m + ۱ = ۰$ دقیقاً دو جواب دارد.

۵۴- خط $y = ۳x - ۲$ از چند نقطه عبور می‌کند که عرض نقطه، مربع طول آن باشد؟

درس ۲ سهمی

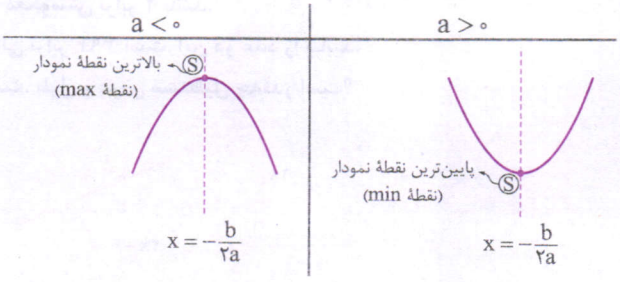
معادلهٔ سهمی

به نمودار معادله‌های درجه‌دوم، **سهمی** می‌گوییم. معادلهٔ سهمی به دو صورت ممکن است داده شده باشد:

۱) صورت استاندارد $y = ax^۲ + bx + c$ ۲) صورت مربع کامل $y = a(x-h)^۲ + k$

برای رسم نمودار سهمی از روی معادلهٔ آن، به x عددهای مختلف داده و y آن‌ها را به دست می‌آوریم. اگر این نقاط را به هم وصل کنیم یکی از دو شکل $\vee$ یا $\wedge$ به دست می‌آید.

نمودارهای معادلهٔ استاندارد $y = ax^۲ + bx + c \ (a \neq ۰)$



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته

۱ اگر $a > ۰$ (یعنی ضریب $x^۲$ مثبت) دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$ دهانهٔ سهمی رو به پایین است.

۲ در هر دو حالت به نقطهٔ S که پیچش سهمی در آن عوض می‌شود **رأس سهمی** می‌گوییم.

۳ اگر $a > ۰$ سهمی دارای نقطهٔ مینیمم (min) و اگر $a < ۰$ سهمی دارای نقطهٔ ماکزیمم (max) است که در هر دو حالت همان رأس سهمی است.

۴ طول رأس سهمی از رابطهٔ $x_S = -\frac{b}{۲a}$ به دست می‌آید. عرض رأس سهمی (یعنی y_S) را می‌توانیم با قراردادن x_S در معادلهٔ سهمی به دست آوریم.

۵ عرض رأس سهمی از رابطهٔ $y_S = -\frac{\Delta}{۴a}$ نیز به دست می‌آید.

۶ به خط عمودی $x = -\frac{b}{۲a}$ (همان طول رأس سهمی) محور **تقارن سهمی** می‌گوییم.

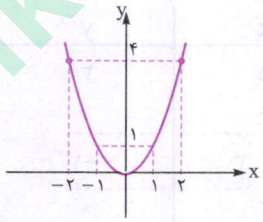
۷ برای رسم سهمی در حالت استاندارد اول طول رأس سهمی را به دست می‌آوریم. سپس دو نقطهٔ بالاتر و پایین‌تر را در معادلهٔ سهمی قرار داده تا عرض نقاط به دست آید. حالا نقاط را به هم وصل می‌کنیم.

۸ اگر $x = ۰$ قرار دهیم $y = c$ می‌شود. c عرض از مبدأ یا همان نقطهٔ برخورد نمودار با محور yها است.

مثال سهمی $y = x^۲$ را رسم کنید.

پاسخ $a = ۱$، $b = ۰$ و $c = ۰$ است، پس $x_S = \frac{-b}{۲a} = ۰$ می‌شود.

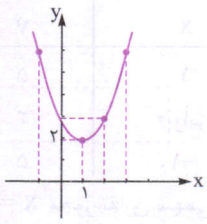
x	y	(x,y)
۲	$۲^۲ = ۴$	(۲,۴)
۱	$۱^۲ = ۱$	(۱,۱)
۰	$۰^۲ = ۰$	(۰,۰)
−۱	$(-۱)^۲ = ۱$	(−۱,۱)
−۲	$(-۲)^۲ = ۴$	(−۲,۴)



مثال نمودار سهمی $y = x^۲ - ۲x + ۳$ را رسم کنید.

پاسخ طول رأس سهمی $x_S = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۲}{۲(۱)} = ۱$ است. دو نقطهٔ بالاتر و پایین‌تر را در نظر گرفته و نقطه‌یابی می‌کنیم:

x	$y = x^۲ - ۲x + ۳$	(x,y)
−۱	$y = (-۱)^۲ - ۲(-۱) + ۳ = ۶$	(−۱,۶)
۰	$y = ۰^۲ - ۲(۰) + ۳ = ۳$	(۰,۳)
۱	$y = ۱^۲ - ۲(۱) + ۳ = ۲$	(۱,۲)
۲	$y = ۲^۲ - ۲(۲) + ۳ = ۳$	(۲,۳)
۳	$y = ۳^۲ - ۲(۳) + ۳ = ۶$	(۳,۶)

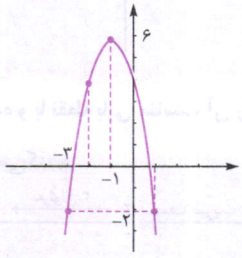


توجه دارید که چون ضریب $x^۲$ (یعنی $a = ۱$) مثبت است، دهانهٔ سهمی به سمت بالاست. مختصات رأس سهمی (۱,۲) بوده و خط عمودی $x = ۱$، محور تقارن سهمی است. در این سهمی، نقطهٔ (۱,۲) پایین‌ترین نقطهٔ نمودار است.

مثال مختصات رأس سهمی $y = -۲x^۲ - ۴x + ۴$ را به دست آورده و آن را رسم کنید.

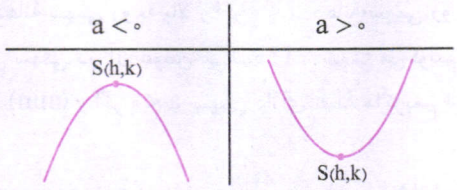
پاسخ $a = -۲$، $b = -۴$ و $c = ۴$ است، پس طول رأس سهمی می‌شود $x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{-۴}{۲(-۲)} = -۱$. با قراردادن $x = -۱$ در معادله، می‌توانیم عرض رأس سهمی را هم به دست آوریم *(می‌تونستی از $-\frac{\Delta}{۴a}$ هم بری)*. برای رسم، دو نقطه قبل و بعد از $x = -۱$ را در معادله قرار می‌دهیم.

x	$y = -۲x^۲ - ۴x + ۴$	(x,y)
−۳	$y = -۲(۹) + ۱۲ + ۴ = -۲$	(−۳,−۲)
−۲	$y = -۲(۴) + ۸ + ۴ = ۴$	(−۲,۴)
$\boxed{-۱}$ رأس	$y = -۲(۱) + ۴ + ۴ = ۶$	(−۱,۶)
۰	$y = ۰ + ۰ + ۴ = ۴$	(۰,۴)
۱	$y = -۲ - ۴ + ۴ = -۲$	(۱,−۲)



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

رسم سهمی از روی صورت مربع کامل $y = a(x-h)^2 + k$



در معادلهٔ سهمی به شکل $y = a(x-h)^2 + k$ مختصات رأس سهمی به صورت (h,k) است. h همان ریشهٔ داخل پرانتز و k عدد ثابت است مثلاً مختصات رأس سهمی $y = ۳(x+۲)^۲ - ۱$ به صورت $(-۲,-۱)$ است. حالا کافیست رأس و دو نقطهٔ قبل و بعد آن را پیدا کرده و به هم وصل کنیم.

نکته

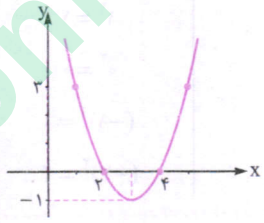
معادلهٔ محور تقارن در این حالت $x = h$ (همان طول) رأس سهمی است.

مثال در هر قسمت، مختصات رأس سهمی، محور تقارن را به دست آورده و نمودار سهمی را رسم کنید.

الف) $y = (x-۳)^۲ - ۱$ ب) $y = ۲x^۲ + ۳$ پ) $y = -(x+۲)^۲ + ۴$

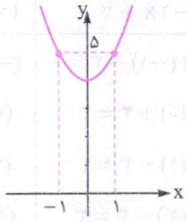
پاسخ الف) ریشهٔ داخل پرانتز $x = ۳$ است، پس مختصات رأس سهمی به صورت $(۳,-۱)$ است. معادلهٔ محور تقارن نیز خط عمودی $x = ۳$ خواهد بود. چون عدد پشت پرانتز، $a = ۱$ است، پس a مثبت بوده و دهانهٔ سهمی به سمت بالاست. رأس سهمی پایین‌ترین نقطهٔ نمودار است.

x	y
۵	۳
۴	۰
۳ رأس	−۱
۲	۰
۱	۳



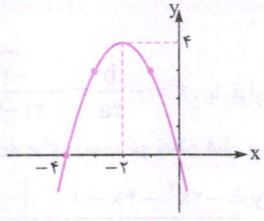
ب) سهمی را می‌توانید به صورت $y = ۲(x-۰)^۲ + ۳$ در نظر بگیرید، پس $(۰,۳)$ مختصات رأس و $x = ۰$ محور تقارن سهمی است. چون $a = ۲$ و مثبت است، پس دهانه رو به بالاست. رأس سهمی، پایین‌ترین نقطهٔ سهمی است.

x	y
۱	۵
۰ رأس	۳
−۱	۵



پ) ریشهٔ داخل پرانتز $x = -۲$ است، پس مختصات رأس سهمی $(-۲,۴)$ می‌شود. $x = -۲$ محور تقارن سهمی است. چون $a = -۱$ *(ضریب پشت پرانتز یا همون ضریب $x^۲$ فرقی نمی‌کنه)* است، پس $a < ۰$ و دهانهٔ سهمی رو به پایین است. رأس سهمی بالاترین نقطهٔ سهمی است.

x	y
۰	۰
−۱	۳
−۲ رأس سهمی	۴
−۳	۳
−۴	۰



مثال با استفاده از روش مربع کامل، سهمی $y = x^۲ + ۴x - ۱$ را مربع کامل کرده و با نقطه‌یابی مناسب آن را رسم کنید.

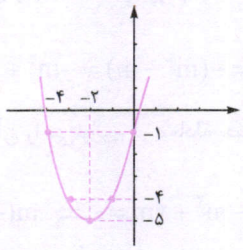
پاسخ $y = \underbrace{x^۲ + ۴x + ۴} - ۴ - ۱ = (x+۲)^۲ - ۵ \Rightarrow$ عدد ۴ را زیاد و کم می‌کنیم

$y = x^۲ + ۴x - ۱ \xrightarrow{\text{نصف ضریب } x = ۲} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

ریشهٔ داخل پرانتز $x=-2$ است. مختصات رأس سهمی $(-2,-5)$ خواهد بود. دوتا عدد بالاتر و پایین‌تر از -2 را به جای x قرار داده و y آن‌ها را به دست می‌آوریم:

x	$y=(x+2)^2-5$	(x,y)
-4	$y=(-4+2)^2-5=-1$	$(-4,-1)$
-3	$y=(-3+2)^2-5=-4$	$(-3,-4)$
رأس $\boxed{-2}$	$y=0-5=-5$	$(-2,-5)$
-1	$y=(-1+2)^2-5=-4$	$(-1,-4)$
0	$y=(0+2)^2-5=-1$	$(0,-1)$



توجه دارید که چون $y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$ است، x را می‌توانیم در هر کدام از معادله‌ها که خواستیم، قرار بدهیم. *(فرقی نمی‌کنه)*

به دست آوردن معادلهٔ سهمی

اگر به تعداد کافی، نقطه از سهمی داشته باشیم، می‌توانیم معادلهٔ آن را به دست آوریم. معادلهٔ سهمی را به صورت $y=ax^2+bx+c$ یا $y=a(x-h)^2+k$ در نظر می‌گیریم. حالا با جای‌گذاری نقطه‌های داده‌شده به جای x و y، باید a,b,c یا a,h,k را به دست آورید.

نکته مهم

اگر رأس سهمی داده شده باشد، دو نکته از آن می‌فهمیم؛ یکی این‌که مختصات آن را می‌توانیم در معادله جای‌گذاری کنیم. دیگر این‌که در شکل استاندارد معادله، $x=-\frac{b}{2a}$، همان طول رأس است و در شکل مربع کامل، (h,k) رأس سهمی داده شده است.

مثال **معادلهٔ یک سهمی را به دست آورید که از نقطهٔ $(1,2)$ عبور کرده و مختصات رأس آن به صورت $(-1,-2)$ باشد.**

پاسخ **روش اول** معادلهٔ سهمی را به صورت $y=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم. باید a,b,c را به دست آوریم.

$$\begin{cases} (1,2)\ \text{روی سهمی} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 2=a+b+c & (1) \\ (-1,-2)\ \text{روی سهمی} \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} -2=a(-1)^2+b(-1)+c=a-b+c & (2) \\ x=-\frac{b}{2a}=-1 \Rightarrow -b=-2a \Rightarrow b=2a & (3) \end{cases}$$

در معادله‌های (۱) و (۲) به جای b، عبارت $2a$ را قرار می‌دهیم، پس:

$$\begin{cases} 2=a+2a+c \Rightarrow \\ -2=a-2a+c \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} 3a+c=2 \\ -a+c=-2 \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \begin{cases} 3a+c=2 \\ -3a+3c=-6 \end{cases}$$

$$4c=-4 \Rightarrow c=-1 \Rightarrow 3a+(-1)=2 \Rightarrow a=1 \Rightarrow b=2a=2$$

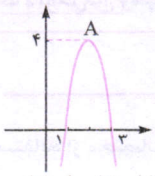
بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=x^2+2x-1$ خواهد بود.

روش دوم معادلهٔ سهمی را به صورت $y=a(x-h)^2+k$ در نظر می‌گیریم. رأس سهمی $(-1,-2)$ است. از طرفی رأس سهمی در این شکل معادلهٔ سهمی، (h,k) است، پس $(h,k)=(-1,-2)$ و لذا $h=-1$ و $k=-2$ به دست می‌آید، بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=a(x-(-1))^2-2=a(x+1)^2-2$ خواهد بود. حالا نقطهٔ $(1,2)$ را هم جای‌گذاری می‌کنیم تا a به دست آید.

$$2=a(1+1)^2-2 \Rightarrow 4=4a \Rightarrow a=1$$

پس معادلهٔ سهمی، به صورت $y=(x+1)^2-2$ خواهد بود. توجه دارید که $y=(x+1)^2-2=x^2+2x+1-2=x^2+2x-1$.

مثال **معادلهٔ سهمی مقابل را به دست آورید.**



پاسخ سهمی، محور xها را در $x=1$ و $x=3$ قطع کرده است. پس نقطه‌های $(1,0)$ و $(3,0)$ روی منحنی هستند. با استفاده از تقارن درمی‌یابیم که طول رأس سهمی $x=2$ و لذا مختصات رأس سهمی $A(2,4)$ خواهد بود. اگر معادلهٔ سهمی را $y=ax^2+bx+c$ بگیریم، با جای‌گذاری نقطه‌ها و حل دستگاه سه معادله ـ سه مجهول، a,b,c به دست می‌آید (شبیه مثال قبلی)، اما چون رأس سهمی را داریم، از شکل $y=a(x-h)^2+k$ استفاده می‌کنیم که راحت‌تر است. $(h,k)=(2,4)$ و لذا $h=2$ و $k=4$، پس $y=a(x-2)^2+4$.

حالا نقطهٔ $(1,0)$ را در معادلهٔ $y=a(x-2)^2+4$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$0=a(1-2)^2+4=a+4 \Rightarrow a=-4 \Rightarrow y=-4(x-2)^2+4$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال رأس سهمی $y = x^2 - 2mx + m$ بر روی خط $y + 3x = 0$ قرار دارد. m را تعیین کنید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

پاسخ مختصات رأس سهمی به صورت $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ است پس اول آن را به دست می‌آوریم:

$$x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2m}{2} = m$$

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4m^2 - 4m}{4(1)} = -(m^2 - m) = -m^2 + m$$

نقطهٔ $(m, -m^2 + m)$ روی خط $y + 3x = 0$ قرار دارد پس مختصات آن را می‌توانیم در معادلهٔ خط جای‌گذاری کنیم:

$$-m^2 + m + 3(m) = 0 \Rightarrow -m^2 + 4m = 0 \Rightarrow m(-m + 4) = 0 \begin{cases} m = 0 \\ -m + 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \end{cases}$$

تعیین علامت ضرایب a, b, c و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ از روی نمودار سهمی

از روی نمودار سهمی بدون این‌که مختصات نقطه‌ای را داشته باشیم، می‌توانیم علامت ضرایب a، b و c در معادلهٔ سهمی را به دست آوریم.

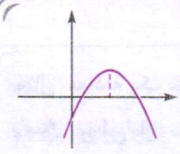
۱ اگر دهانه یا پیچش سهمی به سمت بالا باشد، $a > 0$ و اگر دهانهٔ سهمی رو به پایین باشد، $a < 0$ است.

۲ $x = -\frac{b}{2a}$ طول رأس سهمی است. با توجه به علامت طول رأس و علامت a، علامت b به دست می‌آید.

۳ اگر $x = 0$ قرار دهید، $y = c$ به دست می‌آید. به عبارت دیگر، c همان محل برخورد نمودار، با محور y هاست. با توجه به این‌که نمودار در قسمت مثبت یا منفی یا صفر، محور y ها را قطع می‌کند، علامت c هم به دست می‌آید.

۴ در نقاط برخورد با محور x ها، $y = 0$ است، پس محل‌های برخورد نمودار با محور x ها، همان ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ خواهد بود.

مثال معادلهٔ سهمی مقابل به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است. علامت ضرایب a، b و c را به دست آورید.



پاسخ دهانهٔ سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$. از طرفی، طول رأس سهمی مثبت است، پس $-\frac{b}{2a} > 0$ است. چون $a < 0$ است، پس $b > 0$ می‌باشد. محل برخورد نمودار با محور y ها منفی است، پس $c < 0$ است.

نمودار در دو نقطه محور x ها را قطع می‌کند، پس معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه دارد *(هر دو تا هم مثبت هستن)*.

در امتحان چه خبر؟

تیپ ۱ معادلهٔ سهمی به صورت استاندارد یا مربع کامل داده شده و نمودار آن از شما خواسته می‌شود. اول باید رأس سهمی را به دست آورید و بعد با نقطه‌یابی مناسب آن را رسم کنید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۵۵ تا ۶۸

تیپ ۲ گفته سهمی از نقاط خاصی عبور می‌کند و معادلهٔ سهمی (برعکس بالا) خواسته می‌شود. معادلهٔ سهمی را به صورت استاندارد یا مربع کامل در نظر گرفته و با جای‌گذاری نقاط، ضرایب مجهول را به دست آورید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۶۹ تا ۷۸

تیپ ۳ بالاترین یا کم‌ترین مقدار یک کمیت در مسائل مورد سؤال قرار گرفته است. باید عرض رأس را به دست آورید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۸۰ تا ۸۱

تیپ ۴ باید علامت ضرایب سهمی را از روی نمودار به دست آورید. با توجه به نکات درس‌نامه علامت a، b و c به دست می‌آید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۸۲ تا ۸۶

سؤال‌های امتحانی

با استفاده از مختصات نقطهٔ رأس، سهمی‌های زیر را رسم کنید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۵۵- $y = x^2 + 6x - 2$ ۵۶- $y = -x^2 + 2x - 1$ ۵۷- $y = -(x-1)^2$ ۵۸- $y = (x+1)^2 + (x+2)^2$

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۵۹- نمودار سهمی $y = -x^2$ از ناحیه‌های ..... و ..... عبور می‌کند.

۶۰- محل برخورد سهمی $y = 2x^2 - x + 3$ با محور yها نقطهٔ ..... است.

۶۱- اگر $S(-1, 2)$ رأس سهمی باشد، معادلهٔ محور تقارن ..... است.

۶۲- مختصات رأس سهمی $y = -2(x+1)^2 - 3$ به صورت ..... است.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مختصات رأس و معادلهٔ محور تقارن سهمی‌ها را به دست آورده و آن‌ها را رسم کنید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۶۳- $y = x^2 - 1$ ۶۴- $y = 2(x+1)^2 - 3$ ۶۵- $y = -(x-3)^2 + 2$

۶۶- $y = x^2 - 6x + 4$ ۶۷- $y = -x^2 - 4x + 3$ ۶۸- $y = 3x^2 + 5x - 8$

۶۹- سهمی $y = x^2 + bx + c$ محور xها را در نقطهٔ ۱- و محور yها را در نقطهٔ ۲ قطع کرده است. معادلهٔ سهمی را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

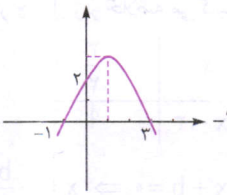
۷۰- سهمی $y = ax^2 + bx + c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ و محور xها را در نقطه‌های ۱ و ۲- قطع می‌کند. معادلهٔ این سهمی را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

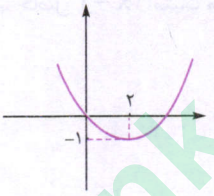
۷۱- معادلهٔ یک سهمی را به دست آورید که محور yها را در نقطهٔ ۱- قطع کرده و مختصات رأس آن (۴-,۱-) باشد.

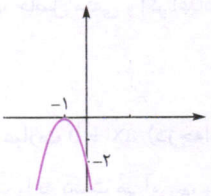
۷۲- معادلهٔ سهمی که محور طول‌ها را در نقاطی به طول ۲- و ۴ قطع کند و عرض پایین‌ترین نقطهٔ سهمی برابر ۴- باشد را بنویسید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۷۳- معادلهٔ سهمی را بنویسید که در نقطهٔ به طول ۱ بر محور افقی مماس است و محور عمودی را در نقطهٔ به عرض ۲- قطع می‌کند. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

معادلهٔ سهمی‌های زیر را به دست آورید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

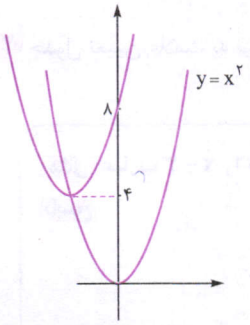
۷۴-


۷۵-


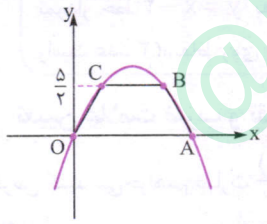
۷۶-


۷۷- الف) اگر (۲,a) و (۶-,a) دو نقطه از سهمی $y = 3x^2 + bx$ باشند، b را به دست آورده و سهمی را رسم کنید.

ب) معادلهٔ سهمی سمت چپ را به دست آورید.

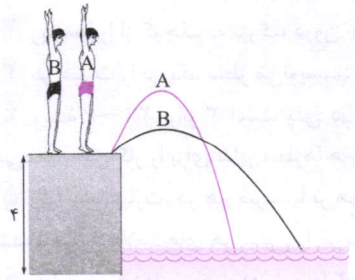


۷۸- در شکل زیر مساحت ذوزنقهٔ OABC را بیابید، اگر معادلهٔ سهمی $y = -2x^2 + 6x$ باشد. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*



۷۹- سهمی‌های $y = x^2$، $y = 2x^2$ و $y = \frac{x^2}{2}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. ضریب x^2 چه تأثیری روی نمودار سهمی دارد؟

۸۰- دو شناگر، با سرعت‌ها و زاویه‌های مختلفی از ارتفاع ۴ متری، شیرجه می‌زنند. مسیر حرکت فرد A با معادلهٔ $y = -x^2 + 5x + 4$ و مسیر حرکت فرد B با معادلهٔ $y = -\frac{x^2}{2} + 3x + 4$ به دست می‌آید. x مسافت افقی و y ارتفاع فرد از سطح آب است. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



الف) مسیر حرکت هر دو شناگر را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

ب) کدام‌یک از شناگران به ارتفاع اوج بیشتری می‌رسد؟

پ) کدام‌یک از شناگران مسافت افقی بیشتری را طی می‌کند؟

۸۱- ارتفاع یک توپ گلف، t ثانیه پس از ضربه‌زدن از معادلهٔ $y = -8t^2 + 48t$ به دست می‌آید.

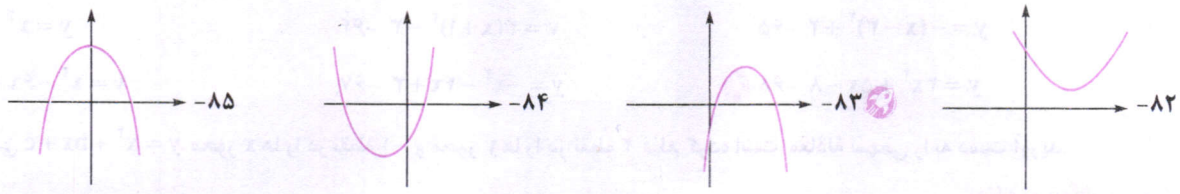
الف) نمودار این معادله را رسم کنید.

ب) بالاترین ارتفاعی که توپ به آن می‌رسد در چه ثانیه‌ای و چه‌قدر خواهد بود؟

پ) پس از چند ثانیه توپ به زمین برخورد می‌کند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

معادلهٔ هر یک از سهمی‌های زیر به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است. علامت a,b,c و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ را به دست آورید.



۸۶- به ازای چه مقادیری برای m، سهمی $y = mx^2 + mx - 1$ فقط از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور می‌کند؟

درس ۳ تعیین علامت

تعیین علامت عبارت‌های درجه‌اول

می‌خواهیم علامت عبارت جبری $2x - 3$ را تعیین کنیم. اگر به جای x، اعداد مختلفی قرار دهیم، عددهای مثبت و منفی به دست می‌آید. مثلاً اگر $x = 1$ قرار دهیم، حاصل منفی می‌شود ولی اگر $x = 5$ قرار دهیم، مثبت می‌شود. در تعیین علامت می‌خواهیم مشخص کنیم به ازای چه اعدادی برای x، عبارت $2x - 3$ مثبت، به ازای چه اعدادی صفر و به ازای چه اعدادی منفی می‌شود. اول این‌که $x = \frac{3}{2}$ ریشهٔ عبارت است. اگر اعداد کم‌تر از $\frac{3}{2}$ به جای x قرار دهیم، حاصل منفی و اگر اعداد بزرگ‌تر از $\frac{3}{2}$ قرار دهیم، حاصل $2x - 3$ مثبت می‌شود. این اطلاعات را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

x		$\frac{3}{2}$	
$2x - 3$	−	0	+

روش تعیین علامت عبارت $ax + b$ (درجه‌اول):

۱ ابتدا ریشهٔ عبارت را به دست می‌آوریم، یعنی:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

۲ جدول تعیین علامت به صورت مقابل است:

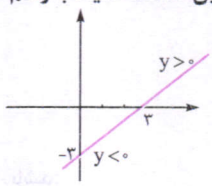
x	$-\infty$	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

مثال عبارت $x - 3$ را تعیین علامت کنید. با رسم خط $y = x - 3$، درستی جدول تعیین علامت را با نمودار بررسی کنید.

پاسخ

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$x < 3$	3	$x > 3$
$x - 3$	−	0	+
	(مخالف ضریب x)		(موافق ضریب x)



نمودار خط $y = x - 3$ به صورت بالا است. در $x = 3$، نمودار با محور xها، برخورد کرده و $y = 0$ می‌شود. به ازای $x > 3$ (سمت راست عدد ۳)، نقاط روی خط، دارای $y > 0$ هستند و به ازای $x < 3$ (سمت چپ عدد ۳)، نقاط روی خط، دارای $y < 0$ هستند.

تعیین علامت ضرب و تقسیم چند عبارت درجه‌اول

فرض کنید می‌خواهیم عبارت $P(x) = \frac{(2x - 6)(1 - x)}{(-4x - 8)}$ را تعیین علامت کنیم. برای این کار مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ تک‌تک عبارت‌ها را برابر با صفر قرار داده و ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \quad , \quad -4x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2$$

۲ ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ، درون جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

۳ هر عبارت را در یک سطر می‌نویسیم. در سطر آخر نیز، $P(x)$ یا کل عبارتی که قرار است تعیین علامت شود را قرار می‌دهیم.

۴ ریشهٔ $2x - 6$ برابر ۳ است، پس در $x = 3$، صفر (0) قرار می‌دهیم. کم‌تر از آن، مخالف ضریب x و بیشتر از آن را موافق ضریب x قرار می‌دهیم. این کار را برای سایر سطرها هم انجام می‌دهیم.

۵ اگر چند عبارت، در هم ضرب یا بر هم تقسیم شوند، علامت آن‌ها در هم ضرب خواهد شد، بنابراین علامت‌های هر ستون را ضرب کرده و در سطر $P(x)$ قرار می‌دهیم.

۶ به ازای ریشه‌های مخرج (در این‌جا $x = -2$)، عبارت $P(x)$ تعریف‌نشده می‌شود، پس در $x = -2$ واژهٔ تعریف‌نشده (ت.ن) را می‌نویسیم.

۷ کسر وقتی صفر می‌شود که صورت آن صفر (ولی مخرج غیرصفر) باشد، پس به ازای $x = 1, 3$، عبارت $P(x) = 0$ می‌شود. پس در این دو نقطه در سطر $P(x)$، صفر (0) قرار می‌دهیم.

x		-2		1		3	
$2x - 6$	−		−		−	0	+
$1 - x$	+		+	0	−		−
$-4x - 8$	+	0	−		−		−
$P(x)$	−	ت.ن	+	0	−	0	+

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

تعیین علامت توان‌های زوج و فرد عبارت‌های درجه‌اول

۱ اگر عبارتی به توان زوج برسد یا کل آن قدرمطلق داشته باشد، هیچ‌گاه منفی نمی‌شود، بنابراین در کل سطرِ عبارت‌هایی به صورت $(ax+b)^{\text{زوج}}$ و $|ax+b|$، علامت + قرار می‌دهیم.

۲ اگر عدد منفی یا مثبت به توان فرد برسد، علامت آن عوض نمی‌شود، بنابراین عبارت‌هایی به صورت $(ax+b)^{\text{فرد}}$ را شبیه همان عبارت‌های درجه‌اول، تعیین علامت می‌کنیم. کم‌تر از ریشه، علامت مخالف a و بیشتر از ریشه، علامت آن موافق a خواهد بود.

مثال عبارت $A=|2-x|(2x-1)^3x^2$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ ابتدا ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$|2-x|=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2\ ,\ (2x-1)^3=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ ,\ x^2=0 \Rightarrow x=0$$

در سطر $|2-x|$ و x^2، همه‌جا را مثبت قرار می‌دهیم. سطر $(2x-1)^3$ را شبیه $2x-1$ تعیین علامت می‌کنیم. مخرج نداریم، بنابراین عبارت A به ازای همهٔ ریشه‌ها صفر می‌شود.

x		0		$\frac{1}{2}$		2	
$\lvert 2-x\rvert$	+		+		+	0	+
$(2x-1)^3$	−		−	0	+		+
x^2	+	0	+		+		+
A	−	0	−	0	+	0	+

تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم

می‌خواهیم عبارت درجه‌دوم $P(x)=ax^2+bx+c$ را تعیین علامت کنیم. شبیه پله‌های قبلی ابتدا ریشه‌ها را تعیین می‌کنیم. تعداد ریشه‌ها بستگی به علامت Δ دارد. بنابراین با سه حالت مواجه می‌شویم:

حالت اول معادلهٔ $P(x)=0$ دو ریشه داشته باشد $(\Delta>0)$. تعیین علامت به صورت زیر می‌شود:

x		x_1		x_2	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

حالت دوم معادلهٔ $P(x)=0$ یک ریشه داشته باشد $(\Delta=0)$. وقتی معادله یک ریشه دارد، مانند این است که در جدول بالا x_1 و x_2 برهم منطبق می‌شوند، بنابراین قسمتِ مخالفِ a، از بین رفته و تعیین علامت به صورت زیر می‌شود:

x		x_1	
ax^2+bx+c	موافق علامت a	0	موافق علامت a

حالت سوم معادلهٔ $P(x)=0$ ریشه نداشته باشد $(\Delta<0)$. در این حالت، علامت عبارت درجه‌دوم همواره موافق a است.

x	
ax^2+bx+c	همواره موافق a

نکته

بهتر است تعیین علامت چند حالت خاص را همواره به خاطر داشته باشید.

$x^2\geq 0 \Rightarrow$ $x=0$ ریشه بوده و در سطر x^2، همهٔ علامت‌ها مثبت خواهند بود.

$-x^2\leq 0 \Rightarrow$ $x=0$ ریشه بوده و در سطر $-x^2$، همهٔ علامت‌ها منفی خواهند بود.

$x^2+1>0 \Rightarrow$ $x^2+1=0$ ریشه ندارد و در سطر x^2+1 همه مثبت هستند.

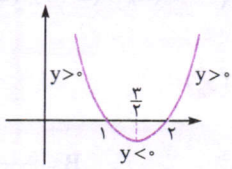
$a>0 \Rightarrow x^2+a>0 \Rightarrow$ در سطر x^2+a همه مثبت هستند.

مثال عبارت $y=x^2-3x+2$ را تعیین علامت کنید، سپس سهمی را رسم کرده و درستی علامت‌های به دست آمده را با نمودار بررسی کنید.

پاسخ ابتدا ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0 \Rightarrow x=1,2$$

x		1		2	
$y=x^2-3x+2$	+	0	−	0	+
	موافق ضریب x^2		مخالف ضریب x^2		موافق ضریب x^2



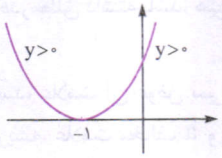
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال عبارت $y = x^2 + 2x + 1$ را تعیین علامت کنید. سپس سهمی را رسم کرده و درستی علامت‌های به دست آمده را با نمودار بررسی کنید.

پاسخ اول ریشه: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

x		-1	
x^2+2x+1	$+$	0	$+$

(دو طرف موافق a)



می‌بینید که نمودار سهمی در $x = -1$ بر محور xها مماس شده و بقیهٔ جاها $y > 0$ خواهد بود.

مثال عبارت $A = \dfrac{(x^2-1)(x^2+16)}{(3-x)^3(x^2-5x+6)}$ را تعیین علامت کنید.

پاسخ

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ دو ریشه دارد.

$x^2 + 16 = 0 \Rightarrow x^2 = -16$ ریشه ندارد.

$(3-x)^3 = 0 \Rightarrow 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2, 3$

x		-1		1		2		3	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2+16	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$(3-x)^3$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
x^2-5x+6	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
A	$+$	0	$-$	0	$+$	تن	$-$	تن	$-$

بین دو ریشهٔ $x^2 - 1$ (یعنی ۱ و ۱−) علامت آن مخالف ضریب x^2 و خارج دو ریشه، موافق است. $x^2 + 16$ ریشه ندارد، پس علامت آن همواره موافق ضریب x^2 است. در $(3-x)^3$ چون توان فرد است، شبیه درجه‌اول تعیین علامت می‌شود. بین دو ریشهٔ $x^2 - 5x + 6$ (یعنی ۳ و ۲)، مخالف ضریب x^2 و خارج آن موافق است. $x = 2, 3$ ریشه‌های مخرج هستند، پس A در آن‌ها تعریف‌نشده (تن) است و $x = \pm 1$ ریشه‌های صورت بوده، لذا در این نقاط، $A = 0$ می‌شود.

درامتحان چه‌خبر؟

سؤال پرتکرار تمام امتحانات! باید یک عبارت جبری (معمولاً یک کسر) که ضرب و تقسیم چند عبارت تشکیل‌شده را تعیین علامت کنید. ریشهٔ تک‌تک عبارت‌ها را به دست آورده و از کوچک به بزرگ در جدول قرار می‌دهید.
برای هر عبارت هم یک سطر قرار داده و از روش تغییر علامت خودش آن را تعیین علامت می‌کنید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۸۷ تا ۱۰۴

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۸۷- علامت بین دو ریشهٔ عبارت درجه‌دوم همواره ..... است.

۸۸- عبارت درجه‌دوم $x^2 + 3x + 7$ همواره ..... است.

۸۹- در ردیف جدول تغییر علامت $-|x+1|$ همواره علامت ..... قرار می‌گیرد.

۹۰- علامت عبارت $(1-x)^3$ به ازای $x < 1$ ..... است.

عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۹۱- $A = 2x - \dfrac{1}{3}$

۹۲- $A = \sqrt{8} - \sqrt{2}x$

۹۳- $A = x(x+1)(4-x)$

۹۴- $P(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

۹۵- $A = \dfrac{4}{m+2}$

۹۶- $P(x) = -x^2 + 5x$

۹۷- $P(x) = \dfrac{-1}{x-3}$

۹۸- $P(x) = (x-4)^2(x^2-4)(x+7)^{11}$

۹۹- $P(x) = \dfrac{-x^2}{(4x-1)^3}$

۱۰۰- $P(x) = \dfrac{(x+1)^2(2-2x)}{|4x-8|}$

۱۰۱- $A = \dfrac{x^2-9}{x^2+9}$

۱۰۲- $A = \dfrac{7x^2-6x-1}{x^2-x+\frac{1}{4}}$

۱۰۳- $B = \dfrac{(x^2-x+3)(-2-x-x^2)}{x^2+x}$

۱۰۴- $B = \dfrac{x^2-x-3}{(-1-x^2)(4-x^2)}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۴ حل نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، نامعادله‌هایی که با این دو عبارت ساخته می‌شود به صورت زیر است:

می خوانیم	نامعادله
A مثبت است.	$A > ۰$
(A مثبت یا صفر است) A بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.	$A \geq ۰$
A منفی است.	$A < ۰$
(A منفی یا صفر است) A کوچک‌تر یا مساوی صفر است.	$A \leq ۰$

می خوانیم	نامعادله
A کوچک‌تر از B است.	$A < B$
A کوچک‌تر یا مساوی B است.	$A \leq B$
A بزرگ‌تر از B است.	$A > B$
A بزرگ‌تر یا مساوی B است.	$A \geq B$

حل نامعادله‌ی درجه اول

برای این کار مراحل زیر را طی می‌کنیم:

۱ با ضرب یا تقسیم دو طرف نامعادله در عدد مناسب، مخرج‌ها را از بین می‌بریم. یادتان هست که ضرب و تقسیم در عدد مثبت، جهت را عوض نمی‌کند ولی ضرب و تقسیم بر عدد منفی، جهت نامعادله را عوض می‌کند.

۲ اعداد را به یک طرف و عبارت‌های دارای متغیر را به طرف دیگر می‌بریم (معلوم ـ مجهول). حواستان باشد، اگر عبارتی را به طرف دیگر ببرید، علامت آن عبارت عوض می‌شود (در واقع با این کار دارید دو طرف را با عبارت یکسانی جمع می‌کنید). حالا عبارت‌های دو طرف را ساده کنید.

۳ دو طرف را بر ضریب مجهول، تقسیم کنید. جهت یادتان نرود. تقسیم بر عدد منفی، جهت را عوض می‌کند.

مثال نامعادلهٔ $-۲x + \frac{x+۱}{۲} > -۴$ را حل کرده و جواب را به صورت مجموعه‌ای، بازه‌ای و روی محور نمایش دهید.

پاسخ

$$-۲x + \frac{x+۱}{۲} > -۴ \xrightarrow{\times ۲} -۴x + x + ۱ > -۸ \Rightarrow -۳x + ۱ > -۸ \Rightarrow -۳x > -۸ - ۱$$

$$-۳x > -۹ \xrightarrow[\text{پس جهت عوض می‌شود.}]{\text{دو طرف را بر ۳- تقسیم می‌کنیم،}} x < \frac{-۹}{-۳} = ۳$$

نمایش روی محور	نمایش بازه‌ای	نمایش مجموعه‌ای جواب
۰ ۱ ۲ ۳	$(-\infty, ۳)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < ۳\}$

حل نامعادلهٔ دوگانه

فرض کنید عدد x به صورتی باشد که هم‌زمان در هر دو نامعادلهٔ $۲x - ۱ < ۵$ و $-۱ < ۲x - ۱$ صدق کند. چون می‌خواهیم x در هر دو نامعادله صدق کند، باید هر دو را حل کرده و بین جواب‌ها، **اشتراک** بگیریم، پس:

$$\left.\begin{array}{l} ۲x - ۱ < ۵ \Rightarrow ۲x < ۶ \Rightarrow x < ۳ \\ -۱ < ۲x - ۱ \Rightarrow ۰ < ۲x \Rightarrow ۰ < x \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} ۰ < x < ۳$$

در اصطلاح گفته می‌شود جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} ۲x - ۱ < ۵ \\ -۱ < ۲x - ۱ \end{cases}$ برابر با بازهٔ $(۰, ۳)$ است. این دو نامعادله را می‌توانیم در یک نامعادلهٔ دوگانه، به صورت $-۱ < ۲x - ۱ < ۵$ نیز نمایش داده و آن را حل کنیم.

$$-۱ < ۲x - ۱ < ۵ \xrightarrow[\text{با ۱ جمع می‌کنیم}]{\text{هر سه قسمت را}} -۱ + ۱ < ۲x - ۱ + ۱ < ۵ + ۱ \Rightarrow ۰ < ۲x < ۶ \xrightarrow{\div ۲} ۰ < x < ۳$$

نکته

۱ که برای حل نامعادلات دوگانه، اگر دو طرف عدد باشند، می‌توانید شبیه بالا، هم‌زمان هر دو را حل کنید. با انجام جمع و تفریق و ضرب و تقسیم روی هر سه عبارت، x را تنها کنید.

۲ اگر در طرفین نامعادله، x وجود داشته باشد، نمی‌توانید هم‌زمان هر دو را حل کنید. باید نامعادلهٔ دوگانه را تبدیل به دو نامعادله کرده، جواب هر کدام را به دست آورده و در پایان بین جواب‌ها، اشتراک بگیرید.

مثال نامعادلهٔ دوگانهٔ $-۱ < \frac{۱-۳x}{۵} \leq ۲$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

پاسخ

$$-۱ < \frac{۱-۳x}{۵} \leq ۲ \xrightarrow{\times ۵} -۵ < ۱ - ۳x \leq ۱۰ \xrightarrow{-۱} -۶ < -۳x \leq ۹ \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود.}]{\text{با تقسیم بر ۳-}} ۲ > x \geq -۳ \Rightarrow \text{جواب} = [-۳, ۲)$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال نامعادلهٔ $3 < 1+\frac{x}{2} \le 3-2x$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

پاسخ علاوه بر عبارت وسط، در طرف چپ هم، x داریم. این‌جا نمی‌توانیم شبیه بالا هم‌زمان، دو نامعادله را حل کنیم، بنابراین آن را تبدیل به دو نامعادله کرده و در آخر بین جواب‌ها، اشتراک می‌گیریم.

$$\begin{cases} 3-2x \le \frac{x}{2}+1 \xrightarrow{\times 2} 6-4x \le x+2 \Rightarrow 6-2 \le 4x+x \Rightarrow 4 \le 5x \Rightarrow \frac{4}{5} \le x \ (1) \\ \frac{x}{2}+1 < 3 \Rightarrow \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow x < 4 \ (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)\cap(2)} \frac{4}{5} \le x < 4 \Rightarrow \text{جواب} = [\frac{4}{5}, 4)$$

کاربرد تعیین علامت در حل نامعادله

فرض کنید می‌خواهیم نامعادلهٔ $\frac{9-x^2}{x-1} > 0$ را حل کنیم. منظور از حل نامعادله، به دست آوردن x هایی است که به ازای آن‌ها، کسر $\frac{9-x^2}{x-1}$ مثبت می‌شود. یادتان هست که در سطر آخر تعیین علامت، x هایی که کسر به ازای آن‌ها مثبت یا منفی می‌شد را به دست می‌آوردیم.

$9-x^2=0 \Rightarrow 9=x^2 \Rightarrow x=\pm 3$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

x		-3		1		3	
$9-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{9-x^2}{x-1}$	$+$ (ج)	0	$-$	ت.ن	$+$ (ج)	0	$-$

به ازای بازه‌هایی که کسر مثبت است، جواب نامعادله هستند؛ یعنی $x < -3$ یا $1 < x < 3$.

نمایش جواب به صورت بازه می‌شود: $(-\infty, -3) \cup (1, 3)$.

نکته

۱) برای حل نامعادله‌های غیر از درجه‌اول، باید تعیین علامت کنید. *(یه بار دیگه این جمله رو بخون)*

۲) برای حل نامعادلهٔ غیر درجه‌اول، ابتدا همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف منتقل می‌کنیم، تا نامعادله به صورت $A > 0$، $A \ge 0$، $A < 0$ یا $A \le 0$ درآید. حالا A را تعیین علامت کرده و جواب‌ها را به دست می‌آوریم.

مثال نامعادلهٔ $\frac{(|x|+1)(4x^2-3x-1)}{5+4x-x^2} \le 0$ را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

پاسخ به محض شنیدن نامعادله، یاد تعیین علامت بیفتید! یادتان هست که برای تعیین علامت، ابتدا ریشه‌ها را به دست می‌آوریم.

$|x|+1=0 \Rightarrow |x|=-1$ ریشه ندارد. قدرمطلق منفی نمی‌شود، پس ریشه ندارد.

$$4x^2-3x-1=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$5+4x-x^2=0 \Rightarrow -(x^2-4x-5)=0 \Rightarrow -(x-5)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=-1 \end{cases}$$

x هایی که به ازای آن‌ها، کسر منفی یا صفر می‌شود را به عنوان جواب، معرفی می‌کنیم. توجه دارید که اعدادی که به ازای آن‌ها کسر، تعریف‌نشده می‌شود $(x=-1,5)$ هیچ‌گاه جزء جواب نیستند، بنابراین در آن نقاط، بازه‌ها، باز خواهند بود. اگر نامعادله $A \ge 0$ یا $A \le 0$ باشد، x هایی‌که کسر در آن‌ها صفر می‌شود، جزء جواب هستند و بازه‌ها در آن نقاط بسته می‌شوند. جواب نامعادله می‌شود:

$(-\infty, -1) \cup [-\frac{1}{4}, 1] \cup (5, +\infty)$

x		-1		$-\frac{1}{4}$		1		5	
$\lvert x\rvert+1$	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
$4x^2-3x-1$	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$5+4x-x^2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$
کسر	$-$ (ج)		$+$ (ت.ن)	0	$-$ (ج)	0	$+$ (ت.ن)		$-$ (ج)

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال نامعادلهٔ $\frac{x+1}{x-2} \geq 3$ را حل کنید و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

پاسخ قبل از این‌که سریع تعیین علامت کنیم، همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف منتقل می‌کنیم. بعد با مخرج‌مشترک‌گیری و ساده‌سازی عبارت را به یک کسر تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{x+1}{x-2} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{x+1-3x+6}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{-2x+7}{x-2}}_{A} \geq 0 \qquad -2x+7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{2}\ ,\ x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x هایی که $A \geq 0$ می‌شود را می‌خواهیم، پس جواب نامعادله به صورت $(2, \frac{7}{2}]$ خواهد بود. توجه دارید که چون ≥ 0 داریم، در $x=\frac{7}{2}$ بازه بسته ولی در $x=2$ (*چون تعریف نشده هستش*) بازه باز خواهد بود.

x		2		$\frac{7}{2}$	
$-2x+7$	+		+	0	−
$x-2$	−	0	+		+
A	−		+	0	−

ت.ن

مورد داشتیم گفته آقا همون اول طرفین وسطین کنیم خیلی راحت حل میشه که!

ببین فرض کن طرفین وسطین کردی میشه $x+1 \square 3(x-2)$. جهت رو کدوم طرفی می‌ذاری؟ چون علامت $x-2$ مثبت یا منفی می‌تونه باشه، تو جهت گیر می‌کنیم. آره اگر از علامت مخرج خبر داشتی، می‌تونی طرفین وسطین کنی. تو تمرین‌ها چند نمونه برات حل کردم.

مثال نامعادلهٔ $x^2 - 2x \geq 3$ را با جدول تعیین علامت و با رسم سهمی حل کنید.

پاسخ

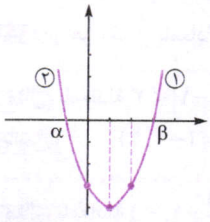
$$\underbrace{x^2-2x-3}_{(x-3)(x+1)} \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$$

x		−1		3	
x^2-2x-3	+	0	−	0	+
	ج				ج

جواب $= (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

$y = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{\text{سهمی را رسم می‌کنیم.}}$

x	$y = x^2-2x-3$	(x, y)
0	$y = 0-0-3 = -3$	$(0, -3)$
$\boxed{1}$ رأس	$y = 1-2-3 = -4$	$(1, -4)$
2	$y = 4-4-3 = -3$	$(2, -3)$



باید جواب‌های نامعادلهٔ $y = x^2 - 2x - 3 \geq 0$ را به دست آوریم. x هایی قابل قبول است که y آن‌ها مثبت یا صفر می‌شود (قسمت‌های (۱) و (۲))، بنابراین ابتدا معادلهٔ $x^2 - 2x - 3 = 0$ را حل می‌کنیم تا α و β به دست آید.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 = \alpha \\ x = 3 = \beta \end{cases}$$

جواب نامعادله با استفاده از روش هندسی (یعنی رسم نمودار) می‌شود $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

همواره مثبت یا همواره منفی بودن عبارت‌های درجه دوم

بار دیگر تعیین علامت عبارت درجه‌دوم $ax^2 + bx + c$ را بررسی کنید. می‌خواهیم ببینیم در چه صورتی عبارت درجه‌دوم همواره مثبت می‌شود. خب اگر $\Delta > 0$ شود، معادلهٔ درجه‌دوم دو ریشه پیدا کرده و بخشی موافق و بخشی مخالف a می‌شود، بنابراین عبارت درجه‌دوم همواره یک علامت نخواهد داشت. با توجه به تعیین علامت در حالت سوم عبارت‌های درجه‌دوم، داریم:

$ax^2 + bx + c < 0$ شرط این‌که همواره $\Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

$ax^2 + bx + c > 0$ شرط این‌که همواره $\Rightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

تذکر اگر بخواهیم همواره $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا همواره $ax^2 + bx + c \leq 0$ باشد، در شرط‌های بالا $\Delta \leq 0$ را می‌نویسیم (*ولی شرط a همونه*).

مثال به ازای چه مقادیری برای m، عبارت $mx^2 + mx + 1$ همواره مثبت است؟

پاسخ

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4m < 0 \xrightarrow{\text{با تعیین علامت حل می‌کنیم.}} m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \Rightarrow m = 0, 4 \xrightarrow[\text{جدول}]{\text{با رسم}} 0 < m < 4 \\ a > 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases}$$

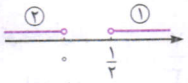
باید بین دو جواب به دست آمده، یعنی $0 < m < 4$ و $m > 0$ اشتراک بگیریم. اشتراک آن‌ها می‌شود $0 < m < 4$؛ بنابراین اگر $0 < m < 4$ باشد، به ازای هر عددی که به جای x قرار دهیم، عبارت درجه‌دوم، مثبت می‌شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال حدود m را به گونه‌ای مشخص کنید که سهمی $y = mx^2 - 2(m+1)x + m + 4$ همواره زیر محور xها باشد.

پاسخ باید کاری کنیم که همواره $y = mx^2 - 2(m+1)x + m + 4 < 0$ باشد. شرط‌های همواره منفی‌بودن یعنی $\Delta < 0$ و $a < 0$ را نوشته و در پایان بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} (1)\ \ \Delta < 0 \Rightarrow (-2(m+1))^2 - 4m(m+4) < 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 - 16m < 0 \Rightarrow 4 < 8m \Rightarrow \frac{4}{8} < m \Rightarrow \frac{1}{2} < m \\ (2)\ \ a < 0 \Rightarrow m < 0 \end{cases}$$

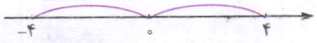
دو جواب روی محور به صورت  هستند. واضح است که اشتراک این دو جواب، $\varnothing$ است. به عبارت دیگر، عددی برای m وجود ندارد که به ازای آن، سهمی همواره زیر محور xها قرار بگیرد.

حل نامعادله‌های قدرمطلقی

قدرمطلق x یا $|x|$، فاصلهٔ نقطهٔ x روی محور را از مبدأ نشان می‌دهد. مثلاً وقتی $|2| = 2$ یا $|-2| = 2$ می‌شود، یعنی فاصلهٔ نقطه‌های ۲ و ۲− از مبدأ ۲ واحد است.

حالا می‌خواهیم نامعادلهٔ $|x| \le 4$ را حل کنیم.

جواب نامعادله، نقاطی هستند که فاصلهٔ آن‌ها تا مبدأ کم‌تر یا مساوی ۴ واحد است. اگر $-4 \le x \le 4$ باشد، فاصلهٔ x تا مبدأ کم‌تر یا مساوی ۴ است.



نتیجه: $|x| \le a \xrightarrow{a>0} -a \le x \le a$

به جای x ممکن است یک عبارت □ قرار گیرد. در این صورت از $|\square| \le a$ نتیجه می‌گیریم: $-a \le \square \le a$.

شبیه بالا می‌خواهیم نامعادلهٔ $|x| \ge 4$ را حل کنیم. اگر $x \ge 4$ یا $x \le -4$ باشد، فاصلهٔ xها تا مبدأ، بیشتر یا مساوی ۴ می‌شود.

نتیجه $|x| \ge a \xrightarrow{a>0} x \ge a$ یا $x \le -a$

به جای x می‌تواند یک عبارت □ قرار گیرد. در این صورت از $|\square| \ge a$ نتیجه می‌گیریم: $\square \ge a$ یا $\square \le -a$.

خیلی دقت کنید که جواب‌های هر دو نامعادله قابل قبول هستند. (یا یعنی اجتماع)

تذکر در هر یک از نامعادلات اگر علامت مساوی وجود نداشته باشد (< یا >)، جواب‌ها نیز مساوی ندارند.

مثال نامعادلهٔ $|2x-1| < 3$ را حل کنید.

پاسخ $|2x-1| < 3 \Rightarrow -3 < 2x - 1 < 3 \xrightarrow{+1} -2 < 2x < 4 \xrightarrow{\div 2} -1 < x < 2 \Rightarrow$ جواب $= (-1, 2)$

مثال نامعادلهٔ $\left|\frac{x+1}{2} - 1\right| \ge 1$ را حل کنید و مجموعه‌جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

پاسخ

$$\left|\frac{x+1}{2} - 1\right| \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} - 1 \ge 1 \Rightarrow \frac{x+1}{2} \ge 2 \Rightarrow x + 1 \ge 4 \Rightarrow x \ge 3 \\ \text{یا} \\ \frac{x+1}{2} - 1 \le -1 \Rightarrow \frac{x+1}{2} \le 0 \Rightarrow x + 1 \le 0 \Rightarrow x \le -1 \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند، بنابراین جواب نامعادله، مجموعهٔ $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ خواهد بود.

مثال نامعادلهٔ $|x| < -2$ را حل کنید.

پاسخ دست نگه دارید! سریع ننویسید $-2 < x < 2$. مگر می‌شود قدرمطلق از ۲− کم‌تر باشد؟ پس نامعادله جواب ندارد. اگر دقت کرده باشید، برای استفاده از نکته‌ها، باید $a > 0$ باشد.

مثال نامعادلهٔ $|x+1| > -2$ را حل کنید.

پاسخ قدرمطلق همواره از ۲− بزرگ‌تر است، پس جواب نامعادله، همهٔ اعداد $\mathbb{R}$ خواهد بود.

مثال یک نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسید که جواب آن بازهٔ $(-1, 5)$ باشد.

پاسخ سعی می‌کنیم برعکس مراحل را طی کنیم.

$|x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x - 2 < 3 \Rightarrow$ از هر سه‌تا، ۲ واحد کم می‌کنیم $\xrightarrow[\text{را قرینهٔ هم کنید.}]{\text{با کم‌کردن عدد، دو طرف}}$ $-1 < x < 5$

مورد داشتیم پرسیده آقا از کجا فهمیدید که باید ۲ واحد کم کنیم؟

ببین اگر $a < x < b$ باشه، کافیه عدد $\frac{a+b}{2}$ رو کم کنی. اگه گفتی چرا؟

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال نامعادله‌های $x^2-4\le 0$ و $x^2-9\ge 0$ را با ویژگی‌های قدرمطلق حل کنید.

پاسخ یادآوری می‌کنم که $\sqrt{x^2}=|x|$. حالا:

$$x^2-4\le 0 \Rightarrow x^2\le 4 \xrightarrow{\sqrt{}} |x|\le 2 \Rightarrow -2\le x\le 2$$

$$x^2-9\ge 0 \Rightarrow x^2\ge 9 \xrightarrow{\sqrt{}} |x|\ge 3 \Rightarrow x\ge 3 \text{ یا } x\le -3$$

(با این مثال خیلی‌خیلی زیاد مواجه میشی، خوب اونو یاد بگیر!)

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ یک نامعادلهٔ توأم را باید حل کرده و جواب را به دست آورید. حواستان باشد اگر دو طرف مجهول باشد باید آن را تبدیل به دو نامعادله کنید و بعد بین جواب‌ها اشتراک بگیرید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۰۹ تا ۱۱۴

تیپ۲ یک نامعادلهٔ درجه‌دوم (معمولاً کسری) را باید حل کنید که قطعاً سؤال از آن می‌آید. عبارت‌ها را به یک طرف برده و ساده‌سازی و تعیین علامت.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۱۵ تا ۱۲۳ و ۱۴۹ تا ۱۵۳

تیپ۳ مسئله طوری داده شده که برای حل آن به یک نامعادلهٔ درجه‌دوم می‌رسید. با توجه به تعیین علامت عبارت درجه‌دوم جواب مسئله به دست می‌آید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۲۴ تا ۱۳۱ و ۱۵۶ و ۱۵۷

تیپ۴ باید شرایط همواره مثبت (سهمی بالای محور x) یا همواره منفی بودن (سهمی پایین محور x) را روی عبارت درجه‌دوم اعمال کنید تا مجهول به دست آید که این تیپ هم خیلی مهم است.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۳۲ تا ۱۳۷ و ۱۵۸ تا ۱۶۱

تیپ۵ نامعادلهٔ قدرمطلقی است. با توجه به دو ویژگی قدرمطلق آن را تبدیل به نامعادلهٔ عادی کرده و آن را حل می‌کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۳۸ تا ۱۴۸ و ۱۶۲ تا ۱۶۵

تیپ۶ تعیین علامت از روی نمودار است. xهایی که نمودار بالای محور xها است، $P(x)$ مثبت و جاهایی که زیرمحور xها است، $P(x)$ منفی و در محل برخورد نمودار با محور xها، $P(x)=0$ است.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۵۴ و ۱۵۵

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را به درستی تکمیل کنید.

۱۰۵- $A>0$ به صورت ..... خوانده می‌شود.

۱۰۶- عبارت $\frac{x}{2x+4}$ به ازای ..... تعریف نشده است.

۱۰۷- جواب نامعادلهٔ $\frac{x-1}{x^2+1}>0$ بازه ..... است.

۱۰۸- اگر $a>0$ از $|x|<a$ نتیجه می‌شود ..... .

دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

۱۰۹- $-1<3x+2<11$

۱۱۰- $1<\frac{4-2x}{3}\le 5$

۱۱۱- $\frac{1}{3}<\frac{t-1}{4}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$

۱۱۲- $-2\le\frac{3}{2}(4t-1)\le 12$

دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

۱۱۳- $\begin{cases} x-1>-2x+8 \\ \frac{x}{2}-1<2x \end{cases}$

۱۱۴- $\begin{cases} \frac{x+2}{3}<\frac{x}{2}-\frac{x-5}{6} \\ 3(2x-1)-x>3x-1-2x \end{cases}$

نامعادله‌های زیر را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۱۵- $\frac{3x+6}{x^2-5x+6}\ge 0$

۱۱۶- $\frac{x^2-25}{x(x-3)^2}<0$

۱۱۷- $\frac{-x^2(x+3)}{x^2-1}\ge 0$

۱۱۸- $\frac{(x-2)^4(2-8x)}{x^2-x}\ge 0$

۱۱۹- $\frac{6}{x}<1$

۱۲۰- $x+\frac{1}{x}\le -2$

۱۲۱- $\frac{x}{x-1}\le\frac{x+1}{x-2}$

۱۲۲- $\frac{3-x}{x^2+1}>1$

۱۲۳- $\frac{x-2}{x-1}>2+\frac{2x+3}{1-x}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نامعادله‌های زیر را با جدول تعیین علامت و با رسم نمودار حل کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۱۲۴- $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ ۱۲۵- $x^2 < 1$

در هر معادله حدود m را به صورتی مشخص کنید که معادله دو ریشه داشته باشد. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۲۶- $x^2 + 3x - m + 1 = 0$ ۱۲۷- $x^2 + (m+1)x + 1 = 0$

در هر معادله حدود m را به صورتی مشخص کنید که معادله ریشه نداشته باشد.

۱۲۸- $x^2 - mx + 4 = 0$ ۱۲۹- $mx^2 + 4x - 1 = 0$

۱۳۰- سود y (برحسب میلیون تومان) که از تولید x هزار کالا توسط یک شرکت حاصل می‌شود، از معادلهٔ $y = -200 + 5x$ به دست می‌آید.

الف) به ازای تولید چه تعداد کالا، شرکت نه سود می‌کند نه ضرر؟

ب) به ازای تولید چه تعداد کالا شرکت سود می‌کند؟

پ) به ازای تولید چه تعداد کالا شرکت ضرر می‌کند؟

ت) اگر حداقل و حداکثر سود ۲۰ تا ۵۰ میلیون باشد، حداقل و حداکثر تعداد کالاهای تولیدی را بیابید.

(x های به دست آمده در واحد ۱۰۰۰ واحد و y برحسب میلیون تومان است.)

۱۳۱- تسنیم و مهدی با شنیدن صدای سوت، هر یک توپی را به هوا پرتاب می‌کنند. اگر ارتفاع توپ تسنیم و مهدی نسبت به زمان به ترتیب با معادله‌های $y = -t^2 + 10t$ و $y = -3t^2 + 18t$ بیان شود، در چه ثانیه‌هایی توپ تسنیم بالاتر از توپ مهدی قرار دارد؟

۱۳۲- نشان دهید رابطهٔ $2x^2 - 3x + 5 > 0$ همواره برقرار است.

حدود m را در هر عبارت طوری مشخص کنید که همواره مثبت باشد. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۳۳- $mx^2 + 3x + 1$ ۱۳۴- $4x^2 - mx + 1$

۱۳۵- حدود a را در عبارت طوری مشخص کنید که همواره منفی باشد. $ax^2 + ax + \frac{1}{a}$

۱۳۶- حدود a را طوری تعیین کنید که سهمی $y = ax^2 + 4ax + a + 5$ همواره بالای محور x ها باشد.

۱۳۷- حدود a را طوری تعیین کنید که همواره داشته باشیم: $2ax^2 + (a-2)x + 2a \geq 0$.

نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه نمایش دهید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۳۸- $|3x+1| \leq 2$ ۱۳۹- $|2-x| \leq 5$ ۱۴۰- $|\frac{x}{2} - 1| \geq 2$

۱۴۱- $|1 - \frac{x+1}{3}| > 4$ ۱۴۲- $3|4x - \frac{1}{2}| - 1 \leq \frac{1}{2}$ ۱۴۳- $\frac{|x-1|}{4} \geq 2$

۱۴۴- $|x^2 - 1| \geq 3$ ۱۴۵- $x^2 - 8 \leq 0$ ۱۴۶- $x^2 - 3 > 0$

۱۴۷- نامعادله‌ای قدرمطلقی بنویسید که: *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) جواب آن بازهٔ $(1,8)$ باشد. ب) جواب آن بازهٔ $(-\infty,-2] \cup [4,+\infty)$ باشد.

۱۴۸- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $3m - 7$ واحد از هم قرار دارند. اگر تعداد نقطه‌هایی که از A و B به فاصلهٔ $m - 1$ هستند برابر ۱ باشد، m را بیابید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

ابتدا عبارت‌ها را تجزیه کرده و سپس آن‌ها را تعیین علامت کنید.

۱۴۹- $y = x^3 - x$ ۱۵۰- $y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2}$

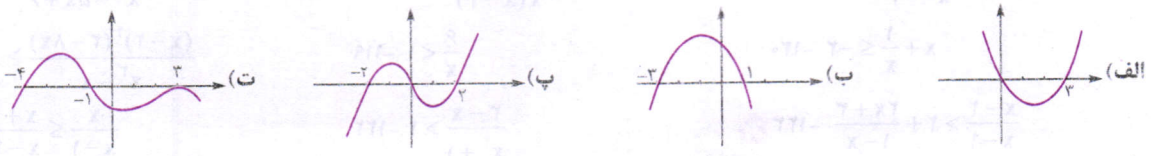
نامعادله‌های زیر را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

۱۵۱- $\frac{(x^2 + x + 6)(x-3)^7}{x^2 + |x|} < 0$ ۱۵۲- $\frac{-|x-1|(x - 2 - x^2)}{3x^2 - 2x - 5} \leq 0$

۱۵۳- نامعادلهٔ زیر را حل کرده و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

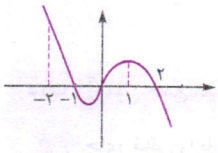
$$-1 < \frac{x+1}{x-1} < 1$$

۱۵۴- با توجه به نمودار معادلهٔ $y = P(x)$ در هر قسمت، جدول تعیین علامت آن را رسم کنید.



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۵۵- نمودار معادلهٔ $y = P(x)$ به صورت مقابل است. جواب نامعادله‌های زیر را بنویسید.



الف) $P(x) \geq 0$ ب) $P(x) \leq 0$

پ) $xP(x) \geq 0$ ت) $\frac{P(x)}{x-2} < 0$

۱۵۶- در معادله حدود m را به صورتی مشخص کنید که معادله دو ریشه داشته باشد. $(x+1)(x-2)+mx=0$

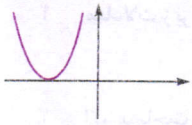
۱۵۷- در معادله حدود m را به صورتی مشخص کنید که معادله ریشه نداشته باشد. $\frac{x-1}{x+1}=mx$

۱۵۸- حدود m را در عبارت طوری مشخص کنید که همواره مثبت باشد. $mx^2+(2m-1)x+(m-2)$

۱۵۹- حدود a را در عبارت طوری مشخص کنید که همواره منفی باشد. $(a-1)x^2+2(a-1)x+2a-5$

۱۶۰- حدود m را طوری تعیین کنید که نمودار معادلهٔ $y=x^2+mx$ همواره بالاتر از نمودار معادلهٔ $y=2x+3m-1$ قرار گیرد.

۱۶۱- حدود a را طوری بیابید تا نمودار سهمی $y=x^2+(a-1)x+1$ به صورت مقابل باشد.



نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

۱۶۲- $\frac{1}{|x|} > 2$

۱۶۳- $|x^2-2x| \leq 3$

نامعادله‌های دوگانهٔ زیر را حل کنید.

۱۶۴- $1<|x|<3$

۱۶۵- $-1 \leq |x-1| \leq 5$

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل چهارم، منتخب سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل چهارم	رشتهٔ: ریاضی و تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.om	نمره
۱	جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) در معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ اگر $b^2<4ac$ باشد، معادله ..... ریشه دارد. ب) معادلهٔ محور تقارن سهمی $y=x^2+\frac{x}{2}-1$ به صورت ..... است. پ) عبارت جبری $\frac{1}{x^2}+1$ به ازای مقادیر تعریف‌شده همواره ..... است. ت) اگر $\lvert -x\rvert \le 2$، آن‌گاه محدودهٔ x به صورت ..... است.				۱
۲	معادلات زیر را به روش‌های خواسته‌شده حل کنید. الف) $x^2+3x=3$ (مربع کامل‌کردن) ب) $-2x^2+x+3=0$ (فرمول کلی Δ)				۱/۵
۳	اگر مساحت مستطیل و مثلث برابر باشند، x را به دست آورید. 				۱
۴	سهمی به معادلهٔ $y=2x^2+4x-3$ داده شده است. الف) مشخص کنید این سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟ ب) نمودار سهمی را رسم کنید.				۱/۵
۵	خط $x=\frac{2}{3}$ محور تقارن سهمی $y=ax^2-2x+4$ است. مختصات رأس این سهمی را بیابید.				۱
۶	عبارت روبه‌رو را تعیین علامت کنید. $P=\frac{\lvert x\rvert(x^2-4x+3)}{(x-2)^2(-3x^2-2x-7)}$				۲
۷	نامعادلهٔ $\frac{x^3-x}{x^2-2x+2}\le 0$ را حل کنید.				۱
۸	مجموعه‌جواب نامعادلهٔ مقابل را به شکل بازه بنویسید. $\lvert\frac{x-1}{2}-1\rvert\ge 3$				۰/۵
۹	نامساوی $3<x<12$ را به شکل یک نامعادلهٔ قدرمطلقی بنویسید.				۰/۵
	جمع نمرات				۱۰

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- یک (فقط $x=-1$ چون $x^2+1=0$ جواب ندارد.)

۲- $(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$

۳- یک (چون $\Delta=0$)

۴- $\Delta=0^2-4(-1)(3)=12$

۵- $2x^2+5x=0 \xrightarrow{\text{تجزیه با فاکتورگیری}} x(2x+5)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

۶- $\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}=0 \Rightarrow x(\frac{x}{2}+\frac{1}{3})=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{x}{2}+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow \frac{x}{2}=-\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 2} x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

۷- $x(x+1)=x+1$

روش اول

$x(x+1)-(x+1)=0 \xrightarrow[\text{بگیریم}]{\text{از } (x+1) \text{ فاکتور}} (x+1)(x-1)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

روش دوم

$x(x+1)=x+1 \Rightarrow x^2+x=x+1 \Rightarrow x^2-1=0$

$\xrightarrow{\text{تجزیه با مزدوج}} (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$

۸- $(4x-3)^2-(x-1)^2=0$

$\Rightarrow (4x-3-(x-1))(4x-3+x-1)=0$

$$\Rightarrow \underbrace{(4x-3-x+1)}_{3x-2}(5x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \\ 5x-4=0 \Rightarrow x=\frac{4}{5} \end{cases}$$

۹- $x^2-x-72=0 \xrightarrow[\text{و جمع اون‌ها } -1 \text{ باشه}]{\text{(دو عدد پیدا می‌کنیم که ضربشون } -72)} -9, 8$

$$\Rightarrow (x-9)(x+8)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-9=0 \Rightarrow x=9 \\ x+8=0 \Rightarrow x=-8 \end{cases}$$

۱۰- $x^2-11=10x \xrightarrow{\text{(معادله را مرتب می‌کنیم)}} x^2-10x-11=0$

$\xrightarrow[\text{و جمعشون } -10 \text{ باشه}]{\text{(دو عدد پیدا می‌کنیم که ضربشون } -11)} -11, +1$

$$(x-11)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-11=0 \Rightarrow x=11 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

۱۱- $x^2-15x+36=0 \xrightarrow[\text{و جمعشون } -15 \text{ باشه}]{\text{(باید دو عدد پیدا کنیم که ضربشون } 36)} -12, -3$

$$\Rightarrow (x-12)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-12=0 \Rightarrow x=12 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

۱۲- $9x^2+6x+1=0 \xrightarrow{\text{تجزیه با اتحاد مربع}} (3x+1)^2=0$

$\Rightarrow 3x+1=0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

(معادله یک ریشهٔ مضاعف دارد.)

توجه کنید $x=-\frac{1}{3}$ که ریشهٔ مضاعف معادله نامیده می‌شود.

با توجه به پلهٔ ششم، اگر $x^2=k$ و $k\geq 0$ باشد، داریم $x=\pm\sqrt{k}$.

اگر k منفی باشد، معادله جواب ندارد. در حالت کلی اگر $\square^2=k$ ($\square$ عبارتی جبری است) باشد، $k\geq 0$ است نیز می‌توان گفت $\square=\pm\sqrt{k}$. اگر k منفی باشد، معادلهٔ $\square^2=k$، جواب ندارد.

۱۳- $x^2=5 \Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$

۱۴- $x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3$ معادله جواب ندارد.

۱۵- $x^2=\frac{3}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۶- $(x-1)^2=9 \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=3 \Rightarrow x=4 \\ x-1=-3 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

۱۷- $(2x+1)^2=16 \Rightarrow 2x+1=\pm\sqrt{16} \Rightarrow 2x+1=\pm 4$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1=4 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x+1=-4 \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

۱۸- $x^2-2x-3=0 \Rightarrow x^2-2x=3$

$\xrightarrow[\text{دوم آن } +1 \text{ است.}]{\text{نصف ضریب } x \text{ برابر } -1 \text{ است و توان}}$ ۱+ را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

$\Rightarrow x^2-2x+1=3+1 \Rightarrow (x-1)^2=4$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{4} \Rightarrow x=1+2=3 \\ x-1=-\sqrt{4} \Rightarrow x=1-2=-1 \end{cases}$$

۱۹- $x^2+6x+4=0 \Rightarrow x^2+6x=-4$

$\xrightarrow[\text{آن } +9 \text{ است.}]{\text{نصف ضریب } x \text{ برابر } 3 \text{ و توان دوم}}$ ۹+ را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

$\Rightarrow x^2+6x+9=9-4 \Rightarrow (x+3)^2=5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+3=\sqrt{5} \Rightarrow x=-3+\sqrt{5} \\ x+3=-\sqrt{5} \Rightarrow x=-3-\sqrt{5} \end{cases}$$

۲۰- $x^2-4x=-1$

$\xrightarrow[\text{و توان دوم آن } (-2)^2=4 \text{ است.}]{\text{نصف ضریب } x \text{ برابر } -2}$ ۴+ را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

$\Rightarrow x^2-4x+4=4-1 \Rightarrow (x-2)^2=3$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=\sqrt{3} \Rightarrow x=2+\sqrt{3} \\ x-2=-\sqrt{3} \Rightarrow x=2-\sqrt{3} \end{cases}$$

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۲۱- $-8x+x^2+4=0 \Rightarrow x^2-8x=-4$

$\xrightarrow[\text{آن } 16=(-4)^2 \text{ است.}]{\text{نصف ضریب x برابر } -4 \text{ و توان دوم}}$ ۱۶+ را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

$\Rightarrow x^2-8x+16=16-4 \Rightarrow (x-4)^2=12$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-4=\sqrt{12} \Rightarrow x=4+\sqrt{12}=4+2\sqrt{3} \\ x-4=-\sqrt{12} \Rightarrow x=4-\sqrt{12}=4-2\sqrt{3} \end{cases}$$

۲۲- $2x^2+12x+3=0$

$\xrightarrow[\text{یعنی ۲ تقسیم می‌کنیم.}]{\text{ابتدا دو طرف را بر ضریب } x^2}$ $\frac{2x^2}{2}+\frac{12x}{2}+\frac{3}{2}=0$

$\Rightarrow x^2+6x=-\frac{3}{2}$

$\xrightarrow[\text{و توان دوم آن ۹ است.}]{\text{نصف ضریب x برابر ۳}}$ $x^2+6x+9=9-\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow (x+3)^2=\frac{15}{2} \Rightarrow \begin{cases} x+3=\sqrt{\frac{15}{2}} \Rightarrow x=-3+\sqrt{\frac{15}{2}} \\ x+3=-\sqrt{\frac{15}{2}} \Rightarrow x=-3-\sqrt{\frac{15}{2}} \end{cases}$$

۲۳- $x^2-5x+1=0 \Rightarrow x^2-5x=-1$

$\xrightarrow[\text{و توان دوم آن } (-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}]{\text{نصف ضریب x برابر } -\frac{5}{2}}$ $\frac{25}{4}$ را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

$\Rightarrow x^2-5x+\frac{25}{4}=\frac{25}{4}-1 \Rightarrow (x-\frac{5}{2})^2=\frac{21}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-\frac{5}{2}=\sqrt{\frac{21}{4}} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{21}}{2}+\frac{5}{2}=\frac{5+\sqrt{21}}{2} \\ x-\frac{5}{2}=-\sqrt{\frac{21}{4}} \Rightarrow x=-\frac{\sqrt{21}}{2}+\frac{5}{2}=\frac{5-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

۲۴-

$\frac{1}{2}x^2+x-3=0 \xrightarrow[\text{ضریب } x^2 \text{ برابر ۱ شود.}]{\text{طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم تا}}$ $x^2+2x=6$

$\xrightarrow[\text{و توان دوم آن هم یک}]{\text{نصف ضریب } x=1}$ $x^2+2x+1=6+1$

$$\Rightarrow (x+1)^2=7 \Rightarrow \begin{cases} x+1=\sqrt{7} \Rightarrow x=\sqrt{7}-1 \\ x+1=-\sqrt{7} \Rightarrow x=-\sqrt{7}-1 \end{cases}$$

۲۵- $x^2-x+7=0 \Rightarrow x^2-x=-7$

$\Rightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=-7+\frac{1}{4} \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2=-\frac{27}{4}$

توان دوم برابر با عدد منفی نمی‌شود، پس معادله جواب ندارد.

۲۶- $x^2+5x+4=0 \xrightarrow{a=1,\ b=5,\ c=4} \Delta=b^2-(4ac)$

$=25-(4(1)(4))=25-16=9$

$\xrightarrow[\text{پس معادله دو جواب دارد.}]{\Delta>0 \text{ است}}$

$$\begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{9}}{2(1)}=\frac{-5+3}{2}=-1 \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{9}}{2(1)}=\frac{-5-3}{2}=-4 \end{cases}$$

۲۷- $x^2-x-4=0 \xrightarrow{a=1,\ b=-1,\ c=-4} \Delta=b^2-(4ac)$

$=(-1)^2-(4(1)(-4))=1-(-16)=1+16=17$

$\xrightarrow[\text{پس معادله دو جواب دارد.}]{\Delta>0 \text{ است}}$

$$\begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{17}}{2(1)}=\frac{1+\sqrt{17}}{2} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{17}}{2(1)}=\frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

۲۸- $x^2-3x=0 \xrightarrow{a=1,\ b=-3,\ c=0} \Delta=b^2-(4ac)$

$$=(-3)^2-(4(1)(0))=9-0=9 \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=3 \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0 \end{cases}$$

۲۹-

$2x^2-4x=1 \xrightarrow{\text{معادله را مرتب می‌کنیم.}} 2x^2-4x-1=0$

$\xrightarrow{a=2,\ b=-4,\ c=-1} \Delta=b^2-(4ac)=(-4)^2-(4(2)(-1))$

$=16+8=24$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)+\sqrt{24}}{2(2)}=\frac{4+\sqrt{24}}{4} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-4)-\sqrt{24}}{2(2)}=\frac{4-\sqrt{24}}{4} \end{cases}$$

۳۰- $x^2-8=0 \xrightarrow{a=1,\ b=0,\ c=-8} \Delta=b^2-(4ac)$

$=0^2-(4(1)(-8))=0-(-32)=32$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0+\sqrt{32}}{2}=\frac{\sqrt{32}}{2}=\frac{\sqrt{16\times 2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-0-\sqrt{32}}{2}=\frac{-\sqrt{32}}{2}=-\frac{\sqrt{16\times 2}}{2}=-\frac{4\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2(\frac{1}{2})}=\frac{-1+\sqrt{5}}{1}=-1+\sqrt{5} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2(\frac{1}{2})}=\frac{-1-\sqrt{5}}{1}=-1-\sqrt{5} \end{cases}$$

۳۱- $\frac{x^2}{2}+x-2=0 \xrightarrow{a=\frac{1}{2},\ b=1,\ c=-2} \Delta=b^2-(4ac)$

$=1^2-(4(\frac{1}{2})(-2))=1-(-4)=5$

۳۲- $x^2+x+\frac{1}{4}=0 \xrightarrow{a=1,\ b=1,\ c=\frac{1}{4}} \Delta=b^2-(4ac)$

$=(1)^2-(4(1)(\frac{1}{4}))=1-1=0$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

چون $\Delta = ۰$ است، معادله یک ریشهٔ مضاعف برابر $x = -\frac{b}{۲a}$ دارد.

پس $x = -\frac{۱}{۲(۱)} = -\frac{۱}{۲}$.

۳۳- عدد صحیح را x در نظر می‌گیریم، پس باید معادلهٔ $x + x^۲ = ۱۲$ را حل کنیم. معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x^۲ + x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x+۴)(x-۳) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۴=۰ \Rightarrow x=-۴ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ عدد صحیح می‌تواند ۳ یا ۴- باشد.

۳۴- عدد فرد اول را $۲x-۱$ و عدد فرد متوالی بعدی را $۲x+۱$ می‌گیریم:

$$(۲x-۱)(۲x+۱) = ۱۴۳ \Rightarrow ۴x^۲ - ۱ = ۱۴۳$$

$$\Rightarrow ۴x^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow x^۲ = ۳۶ \Rightarrow x = \pm ۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۶ \Rightarrow ۲(۶)-۱, ۲(۶)+۱ \Rightarrow \text{اعداد ۱۱ و ۱۳ هستند.} \\ x=-۶ \Rightarrow ۲(-۶)-۱, ۲(-۶)+۱ \Rightarrow \text{اعداد ۱۱- و ۱۳- هستند.} \end{cases}$$

۳۵- $x + \frac{۱}{x} = ۲ \Rightarrow \frac{x^۲+۱}{x} = ۲ \Rightarrow x^۲ + ۱ = ۲x$

$$\Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

۳۶- عدد فرد اول را $۲n-۱$ و عدد فرد متوالی بعدی را $۲n+۱$ در نظر می‌گیریم:

$$(۲n-۱)^۲ + (۲n+۱)^۲ = ۳۹۴$$

$$\Rightarrow ۴n^۲ - ۴n + ۱ + ۴n^۲ + ۴n + ۱ = ۳۹۴ \Rightarrow ۸n^۲ = ۳۹۲$$

$\Rightarrow n^۲ = ۴۹ \Rightarrow n = \pm ۷ \Rightarrow$ دو عدد فرد ۱۵ و ۱۳ یا ۱۵- و ۱۳- هستند.

۳۷-

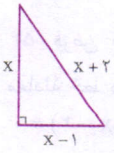
$$\left.\begin{array}{l} \text{مساحت مستطیل} = (۲x-۱)(۳x+۲) \\ \text{مساحت مثلث} = \frac{(۲x)(۳x+۶)}{۲} = x(۳x+۶) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (۲x-۱)(۳x+۲) = x(۳x+۶)$$

$$\Rightarrow ۶x^۲ + ۴x - ۳x - ۲ = ۳x^۲ + ۶x \Rightarrow ۳x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = ۲۵-۴(۳)(-۲) = ۴۹} \begin{cases} x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۵+۷}{۶} = ۲ \text{ قابل قبول} \\ \Rightarrow \begin{cases} \text{طول} = ۳(۲)+۲ = ۸ \\ \text{عرض} = ۲(۲)-۱ = ۳ \end{cases} \\ x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۵-۷}{۶} = -\frac{۱}{۳} \\ \Rightarrow \text{به ازای } x = -\frac{۱}{۳} \text{، طول ضلع } ۲x \text{ منفی می‌شود.} \\ \Rightarrow x^۲ \text{ قابل قبول نیست.} \end{cases}$$

۳۸- مثلث را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم.



طبق قضیهٔ فیثاغورس:

$$x^۲ + (x-۱)^۲ = (x+۲)^۲ \Rightarrow x^۲ + x^۲ - ۲x + ۱ = x^۲ + ۴x + ۴ \Rightarrow x^۲ - ۶x - ۳ = ۰$$

$$\xrightarrow{\Delta = b^۲ - (۴ac) = ۴۸} \begin{cases} x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۶+\sqrt{۴۸}}{۲} \\ = \frac{۶+۴\sqrt{۳}}{۲} = ۳ + ۲\sqrt{۳} \\ x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۶-\sqrt{۴۸}}{۲} \end{cases}$$

چون $x+۲, x-۱, x$ طول ضلع هستند، منفی نمی‌توانند باشند، بنابراین $x_۱$ قابل‌قبول است.

۳۹- عرض مستطیل را x در نظر می‌گیریم، بنابراین طول آن $۲x$ خواهد بود. مساحت مستطیل، طول × عرض مستطیل است.

پس: $(۲x)(x) = ۸۰۰ \Rightarrow ۲x^۲ = ۸۰۰$

$$\Rightarrow x^۲ = \frac{۸۰۰}{۲} = ۴۰۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۴۰۰} = \pm ۲۰$$

چون x عرض مستطیل است، منفی نمی‌تواند باشد، پس $x = ۲۰$ قابل‌قبول خواهد بود. عرض مستطیل برابر ۲۰ و طول آن ۴۰ متر خواهد بود.

۴۰- سن دو برادر را x و y می‌گیریم پس $x - y = ۴$. ۴ سال دیگر سن هر دو به ترتیب $x+۴$ و $y+۴$ می‌شود. پس $(x+۴)(y+۴) = ۶۰$.

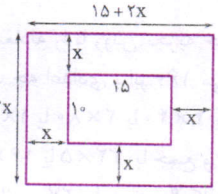
از طرفی $x = y + ۴$ با جای‌گذاری داریم:

$$(y + \overbrace{۴+۴}^{۸})(y+۴) = ۶۰ \Rightarrow y^۲ + ۱۲y + ۳۲ = ۶۰$$

$$\Rightarrow y^۲ + ۱۲y - ۲۸ = ۰$$

$$\Rightarrow (y-۲)(y+۱۴) \Rightarrow \begin{cases} y = ۲ \checkmark \Rightarrow x = ۶ \\ y = -۱۴ \times \end{cases}$$

۴۱- فاصلهٔ کناره‌های باغچه تا لبهٔ زمین را x در نظر می‌گیریم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{مساحت زمین} = (۱۵+۲x)(۱۰+۲x) \\ \text{مساحت باغچه} = ۱۰ \times ۱۵ = ۱۵۰ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{۶}{\cancel{۱۵۰}}}{(۱۵+۲x)(۱۰+۲x)} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۲۵}}}{۳۴}$$

$$\Rightarrow (۱۵+۲x)(۱۰+۲x) = ۲۰۴$$

$$\Rightarrow ۱۵۰ + ۳۰x + ۲۰x + ۴x^۲ = ۲۰۴ \Rightarrow ۴x^۲ + ۵۰x - ۵۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} ۲x^۲ + ۲۵x - ۲۷ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۲۵^۲ - ۴(۲)(-۲۷) = ۸۴۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲۵+\sqrt{۸۴۱}}{۴} = \frac{-۲۵+۲۹}{۴} = ۱ \checkmark \\ x_۲ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲۵-\sqrt{۸۴۱}}{۴} = \frac{-۲۵-۲۹}{۴} = -۱۳/۵ \times \end{cases}$$

۴۲- طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم.

$$\text{محیط مستطیل} = ۲(x+y) = ۵۰ \Rightarrow x + y = ۲۵$$

$\Rightarrow y = ۲۵ - x \Rightarrow$ جای‌گذاری در معادلهٔ پایین

$$\text{مساحت مستطیل} = xy = ۱۳۶ \Rightarrow x(۲۵-x) = ۱۳۶$$

$$\Rightarrow -x^۲ + ۲۵x = ۱۳۶ \Rightarrow x^۲ - ۲۵x + ۱۳۶ = ۰$$

می‌توانیم معادله را به روش Δ حل کنیم ولی سعی می‌کنیم معادله را با روش تجزیه حل کنیم: $۱۳۶ = ۱۷ \times ۸$، پس:

$$(x-۸)(x-۱۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۸ \Rightarrow y = ۱۷ \\ x = ۱۷ \Rightarrow y = ۸ \end{cases}$$

بنابراین طول و عرض زمین ۱۷ و ۸ خواهد بود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۴۳- فرض کنیم n نفر در همایش شرکت کرده‌اند. هر فرد با $n-1$ نفر دیگر دست داده است. (تا این‌جا $n(n-1)$). اما وقتی دو نفر A و B دست می‌دهند، یک بار دست‌دادن اتفاق افتاده است ولی یک بار، آن را در A و یک بار در B شمارش کرده‌ایم؛ به عبارت دیگر هر دست‌دادن را دو بار شمرده‌ایم. بنابراین تعداد دست‌دادن‌ها می‌شود $\frac{n(n-1)}{2}$. حالا:

$$\frac{n(n-1)}{2}=66 \Rightarrow n(n-1)=132=12\times 11 \Rightarrow n=12$$

مدل تعداد دست‌دادن‌ها نیز می‌شود $y=\frac{n(n-1)}{2}$.

۴۴-

$$-0/0625h^2-h+24=16 \Rightarrow -0/0625h^2-h+8=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(-0/0625)(8)=1+2=3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{3}}{-0/125}\simeq\frac{1+1/7}{-0/125}<0 & \text{غیرقابل قبول} \\ h_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{3}}{-0/125}\simeq\frac{1-1/7}{-0/125}=5/6 \checkmark \end{cases}$$

میانگین مطالعهٔ ریاضی در هفته، باید حدود ۵/۶ ساعت باشد.

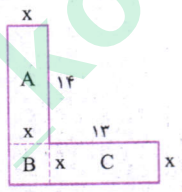
۴۵-

مساحت پارکینگ = مساحت مستطیل A + مساحت مربع B + مساحت مستطیل C

$$=14x+x^2+13x=x^2+27x \Rightarrow x^2+27x=160$$

$$\Rightarrow x^2+27x-160=0$$

این معادله را با روش تجزیه حل می‌کنیم. ضرب چه اعدادی برابر ۱۶۰ می‌شود؟ مثلاً ۱×۱۶۰ یا ۲×۸۰ یا ۴×۴۰ یا ۸×۲۰ یا ۱۰×۱۶ یا ۵×۳۲. با جمع و تفریق کدام می‌توانیم، ۲۷ را بسازیم؟ کافی است دو عدد را ۳۲+ و ۵- در نظر بگیریم، یعنی:



$$x^2+27x-160=0 \Rightarrow (x+32)(x-5)=0 \times$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+32=0 \Rightarrow x=-32 & \text{(طول منفی نیست)} \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \checkmark \end{cases}$$

● شرط این‌که معادله یک ریشه داشته باشد، این است که $\Delta=0$ باشد.

۴۶- الف)

$$\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow \Delta=(-3a)^2-4(1)(2a^2+1)=0$$

$$\Rightarrow 9a^2-8a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

اگر $a=2$ باشد، ریشه عبارت است از:

$$x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$$

اگر $a=-2$ باشد، ریشه عبارت است از:

$$x^2+6x+9=0 \Rightarrow (x+3)^2=0 \Rightarrow x=-3$$

ب)

$$\Delta=b^2-4ac=0 \Rightarrow (2(5a+3))^2-4(a+8)(a+8)=0$$

$$\Rightarrow 4(5a+3)^2-4(a+8)^2=0$$

$$\xrightarrow{\div 4} (5a+3)^2-(a+8)^2=0$$

$$\xrightarrow[\text{با اتحاد مزدوج}]{\text{حل به روش تجزیه}} (5a+3+a+8)(5a+3-(a+8))=0$$

$$\Rightarrow (6a+11)(4a-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} 6a+11=0 \Rightarrow a=-\frac{11}{6} \\ 4a-5=0 \Rightarrow a=\frac{5}{4} \end{cases}$$

اگر $a=-\frac{11}{6}$ باشد، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{37}{6}x^2-\frac{37}{3}x+\frac{37}{6}=0 \xrightarrow{\div 37} \frac{x^2}{6}-\frac{x}{3}+\frac{1}{6}=0$$

$$\xrightarrow{\times 6} x^2-2x+1=0 \Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

اگر $a=\frac{5}{4}$ باشد، معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{37}{4}x^2+\frac{37}{2}x+\frac{37}{4}=0 \xrightarrow{\times\frac{4}{37}} x^2+2x+1=0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

۴۷- شرط داشتن دو ریشه: $\Delta>0 \Rightarrow b^2-(4ac)>0$

$$\Rightarrow 4-(4c)>0 \Rightarrow 4>4c$$

$\Rightarrow 1>c$ (یعنی c باید از یک کوچک‌تر باشد)

۴۸- شرط داشتن ریشهٔ مضاعف: $\Delta=0 \Rightarrow 4-4c=0$

$$\Rightarrow 4=4c \Rightarrow 1=c$$

۴۹- شرط نداشتن جواب: $\Delta<0 \Rightarrow 4-4c<0$

$$\Rightarrow 4<4c \Rightarrow 1<c$$

۵۰- $x=-4$ جواب معادله است، بنابراین می‌توان آن را به جای x قرار داد:

$$7(-4)^2+a(-4)+12=0 \Rightarrow -4a=-124 \Rightarrow a=31$$

$$\Rightarrow 7x^2+31x+12=0 \Rightarrow \Delta=31^2-4(7)(12)=625$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-31+25}{14}=\frac{-6}{14}=-\frac{3}{7} & \text{ریشهٔ دیگر} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-31-25}{14}=-4 \end{cases}$$

۵۱- $x=2$ تنها جواب معادله است پس معادلهٔ درجه‌دوم به صورت $(x-2)^2=0$ بوده است.

$$(x-2)^2=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} n-2=-4 \\ \Rightarrow n=-2 \\ -(m+1)=4 \\ \Rightarrow m=-5 \end{cases}$$

۵۲- کافی است نشان دهیم Δ این معادلهٔ درجه‌دوم، به ازای هر m، همواره منفی است.

$$\Delta=b^2-4ac=(2m)^2-4(m^2+1)$$

$$=4m^2-4m^2-4=-4<0$$

۵۳- کافی است نشان دهیم به ازای هر عدد $m\neq 0$، Δ معادله مثبت است.

$$\Delta=b^2-4ac=(2m+1)^2-4m(m+1)$$

$$=4m^2+4m+1-4m^2-4m=1>0$$

۵۴- فرض کنیم خط از نقطهٔ (x,x^2) عبور کند. با جای‌گذاری در معادلهٔ خط داریم:

$$x^2=3x-2 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-1)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (1,1) \\ x=2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow (2,4) \end{cases}$$

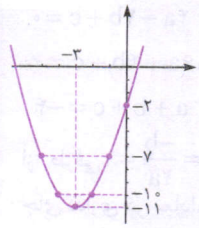
دو نقطه به دست می‌آید.

● مختصات رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ به صورت $A(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a})$ است.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

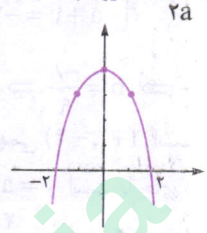
۵۵- طول رأس $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{2}=-3$ ، $y=x^2+6x-2$

x	$y=x^2+6x-2$	(x,y)
−۵	$y=25-30-2=-7$	(−۵,−۷)
−۴	$y=16-24-2=-10$	(−۴,−۱۰)
−۳	$y=9-18-2=-11$	(−۳,−۱۱)
−۲	$y=4-12-2=-10$	(−۲,−۱۰)
−۱	$y=1-6-2=-7$	(−۱,−۷)



۵۶- طول رأس $y=4-x^2=-x^2+4 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=0$

x	−۱	۰	۱
y	۳	۴	۳

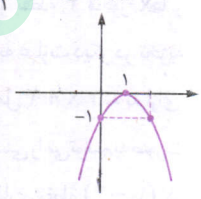


۵۷-

$y=-(x^2-2x+1)=-x^2+2x-1$

$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{-2}=1$ طول رأس

x	۰	۱	۲
y	−۱	۰	−۱

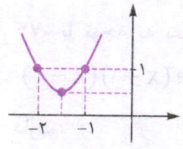


۵۸- $y=(x+1)^2+(x+2)^2=x^2+2x+1+x^2+4x+4$

$=2x^2+6x+5$

$\Rightarrow x=\frac{-b}{2a}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$ طول رأس

x	−۲	$-\frac{3}{2}$	−۱
y	۱	$\frac{1}{2}$	۱



۵۹- سوم و چهارم

۶۰- (۰,۳)

۶۱- $x=-1$

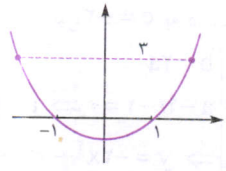
۶۲- (−۱,−۳)

● اگر معادلهٔ سهمی به صورت $y=a(x-h)^2+k$ باشد، مختصات رأس $A(h,k)$ و $x=h$ معادلهٔ محور تقارن است. با دادن دو نقطهٔ قبل و بعد از طول رأس، سهمی را رسم می‌کنیم.

۶۳-

$y=(x-0)^2-1 \Rightarrow \underbrace{A(0,-1)}_{\text{رأس}}$ ، $\underbrace{x=0}_{\text{معادله‌ی محور تقارن}}$

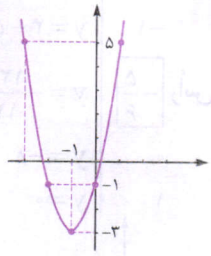
x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۳	۰	−۱	۰	۳



۶۴-

$y=2(x+1)^2-3 \Rightarrow \underbrace{A(-1,-3)}_{\text{رأس}}$ ، $\underbrace{x=-1}_{\text{محورتقارن}}$

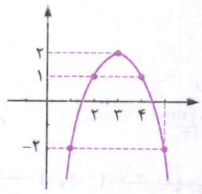
x	−۳	−۲	−۱	۰	۱
y	۵	−۱	−۳	−۱	۵



۶۵-

$y=-(x-3)^2+2 \Rightarrow \underbrace{A(3,2)}_{\text{رأس}}$ ، $\underbrace{x=3}_{\text{محور تقارن}}$

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	−۲	۱	۲	۱	−۲



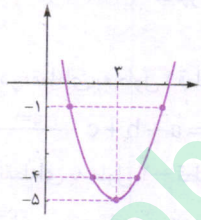
۶۶-

$y=x^2-6x+4 \xrightarrow[\text{و مربع آن ۹}]{\text{نصف ضریب x برابر ۳-}}$ ۹ را اضافه و کم می‌کنیم.

$\Rightarrow y=\underbrace{x^2-6x+9}-9+4=(x-3)^2-5$

$\Rightarrow \underbrace{A(3,-5)}_{\text{رأس}}$ ، $\underbrace{x=3}_{\text{محور تقارن}}$

x	۱	۲	۳	۴	۵
y	−۱	−۴	−۵	−۴	−۱



۶۷-

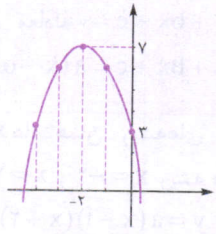
$y=-x^2-4x+3=-(x^2+4x-3)$

$=-(x^2+4x+4-4-3)=-[(x+2)^2-7]$

(مربع نصف ضریب x را زیاد و کم کردیم)

$=-(x+2)^2+7 \Rightarrow \underbrace{A(-2,7)}_{\text{رأس}}$ ، $\underbrace{x=-2}_{\text{محور تقارن}}$

x	−۴	−۳	−۲	−۱	۰
y	۳	۶	۷	۶	۳



۶۸-

$y=3x^2+5x-8=3(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{8}{3})$

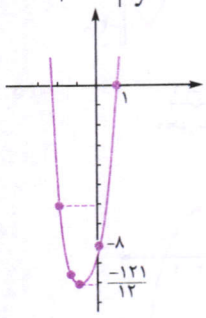
$\xrightarrow[\text{و مربع آن } \frac{25}{36} \text{ است.}]{\text{نصف ضریب x برابر } \frac{5}{6}} y=3(\underbrace{x^2+\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}}-\frac{25}{36}-\frac{8}{3})$

$=3[(x+\frac{5}{6})^2-\frac{121}{36}]=3(x+\frac{5}{6})^2-\frac{121}{12}$

$\Rightarrow A(-\frac{5}{6},-\frac{121}{12})$, $x=-\frac{5}{6}$ محور تقارن

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

x	$y=3x^2+5x-8$	(x,y)
-2	$y=12-10-8=-6$	$(-2,-6)$
-1	$y=3-5-8=-10$	$(-1,-10)$
رأس $\boxed{-\frac{5}{6}}$	$y=-\frac{121}{12}$	$(-\frac{5}{6},-\frac{121}{12})$
0	$y=-8$	$(0,-8)$
1	$y=0$	$(1,0)$



۶۹- $(-1,0) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 0=1-b+c$ ⇐ سهمی محور xها را در نقطهٔ ۱- قطع کرده است.

سهمی محور yها را در نقطهٔ ۲ قطع کرده است:

$\Rightarrow (0,2) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 2=0+0+c$

$\Rightarrow c=2 \xrightarrow{\text{در بالا}} b=3$

۷۰- **روش اول** $(0,1) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} 1=c$ ⇐ محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده.

$(1,0)$ ⇐ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کرده.

$\Rightarrow 0=a+b+c \xrightarrow{c=1} a+b=-1$

$(-2,0)$ ⇐ محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کرده.

$\Rightarrow 0=4a-2b+c \xrightarrow{c=1} 4a-2b=-1$

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$ است.

روش دوم

نکته

اگر $x=\alpha$ و $x=\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

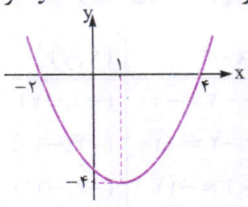
محل برخورد سهمی با محور xها، همان ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ هستند. چون $x=1$ و $x=-2$ ریشه هستند، عبارت درجه‌دوم حتماً به صورت $y=a(x-1)(x+2)$ تجزیه می‌شود (*تا $x=1$ و $x=-2$ ریشه‌ها باشن*). حالا با جای‌گذاری نقطهٔ $(0,1)$ داریم: $1=a(-1)(2) \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=-\frac{1}{2}(x-1)(x+2)$ خواهد بود.

۷۱- اگر معادلهٔ سهمی را به صورت $y=a(x-h)^2+k$ بگیریم، (h,k) همان رأس سهمی است، پس: $(h,k)=(-1,-4)$ ولذا $h=-1$ و $k=-4$ خواهد بود. بنابراین معادلهٔ سهمی $y=a(x+1)^2-4$ است. با جای‌گذاری نقطهٔ $(0,-1)$، a به دست می‌آید: $-1=a-4 \Rightarrow a=3$

پس معادلهٔ سهمی $y=3(x+1)^2-4$ به دست می‌آید.

۷۲- **روش اول** معادلهٔ سهمی را به صورت $y=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم:



$(-2,0) \Rightarrow 4a-2b+c=0$

$(4,0) \Rightarrow 16a+4b+c=0$

$(1,-4) \Rightarrow a+b+c=-4$

از طرفی $x_S=\frac{-b}{2a}=1$ پس $-b=2a$ در نتیجه $b=-2a$. با جای‌گذاری در معادلهٔ اول، دوم و سوم داریم:

$$\begin{cases}4a+4a+c=0\\16a-8a+c=0\\a+(-2a)+c=-4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8a+c=0\\-a+c=-4\end{cases}$$

$\Rightarrow 9a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{9} \Rightarrow b=\frac{-8}{9} \Rightarrow c=-\frac{39}{2}$

روش دوم رأس سهمی $(+1,-4)$ است پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=a(x-1)^2-4$ است. با جای‌گذاری نقطهٔ $(4,0)$ داریم:

$a(4-1)^2-4=0 \Rightarrow 9a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{9}$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{4}{9}(x-1)^2-4$ است.

روش سوم سهمی در نقطهٔ ۴ محور xها را قطع می‌کند پس به ازای $x=4$ داریم $y=0$. به عبارت دیگر در تجزیهٔ معادلهٔ سهمی عامل $x-4$ وجود دارد. در تجزیهٔ عامل $x+2$ (که به ازای $x=-2$ حاصل صفر بشه) وجود دارد پس معادلهٔ سهمی را می‌توانیم به صورت $y=a(x-4)(x+2)$ در نظر بگیریم. با جای‌گذاری نقطهٔ $(1,-4)$ داریم:

$-4=a(-3)(3) \Rightarrow a=\frac{4}{9} \Rightarrow y=\frac{4}{9}(x-4)(x+2)$

۷۳- معادلهٔ سهمی به صورت $y=a(x-1)^2$ است (که $x=1$ ریشهٔ مضاعف بوده) و از نقطهٔ $(0,2)$ عبور می‌کند:

$x=0 \Rightarrow 2=a(0-1)^2 \Rightarrow a=2$

۷۴- با توجه به سؤال ۷۱، بهتر است معادلهٔ سهمی را به صورت $y=a(x+1)(x-3)$ در نظر بگیریم. با جای‌گذاری نقطهٔ $(0,2)$ داریم: $2=a(-3) \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$

بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{-2}{3}(x+1)(x-3)$ خواهد بود.

۷۵- مختصات رأس سهمی $(h,k)=(2,-1)$ بوده و لذا معادلهٔ سهمی به صورت $y=a(x-2)^2-1$ است. سهمی از مبدأ یا نقطهٔ $(0,0)$ عبور می‌کند، پس: $0=4a-1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$، بنابراین معادلهٔ سهمی به صورت $y=\frac{1}{4}(x-2)^2-1$ درمی‌آید.

۷۶- می‌توانیم شبیه بالا، معادلهٔ سهمی را به صورت $y=a(x-h)^2+k$ در نظر بگیریم، اما این بار معادلهٔ سهمی را به صورت $y=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم: $x=-1$ طول رأس سهمی است، پس $\frac{-b}{2a}=-1$ و لذا $b=2a$. از طرفی نقطهٔ $(-1,0)$ روی سهمی است پس آن را در معادلهٔ سهمی جای‌گذاری می‌کنیم تا به معادلهٔ $0=a-b+c$ برسیم. سهمی از نقطهٔ $(0,-2)$ هم عبور می‌کند. با جای‌گذاری آن نیز، $c=-2$ به دست می‌آید. حالا:

$$\begin{cases}b=2a\\a-b-2=0 \Rightarrow a-2a-2=0 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow b=-4\\ \Rightarrow y=-2x^2-4x-2\end{cases}$$

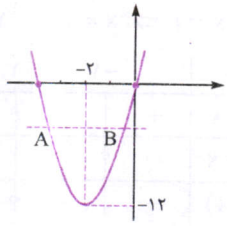
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۷۷- الف) نقاط داده‌شده دارای عرض‌های یکسان (a) هستند، بنابراین نسبت به محور تقارن قرینه‌اند. به عبارت دیگر، طول محور تقارن وسط این دو نقطه یعنی $x=\frac{-۶+۲}{۲}=-۲$ خواهد بود. $x=-۲$ همان محور تقارن یا طول رأس سهمی است، پس $\frac{-b}{۲(۳)}=-۲$ و لذا $b=۱۲$ به دست می‌آید.

$$y=۳x^۲+۱۲x=۳(x^۲+۴x)=۳(x^۲+۴x+۴-۴)$$
$$=۳(x+۲)^۲-۱۲$$

$\underbrace{A(-۲,-۱۲)}_{\text{رأس}}$

x	-۴	-۲	۰
y	۰	-۱۲	۰



توجه دارید محور تقارن، عمودمنصف پاره‌خط AB (نقاط دارای عرض‌های یکسان) است.

ب) اگر در سهمی $y=x^۲$، عرض را برابر ۴ قرار دهیم $x^۲=۴$ و لذا $x=\pm۲$. با توجه به این‌که طول رأس سهمی سمت چپ، منفی است، پس مختصات رأس سهمی سمت چپ $(-۲,۴)$ خواهد بود. شبیه سؤال ۲۵ معادلهٔ سهمی سمت چپ به صورت $y=a(x+۲)^۲+۴$ است. با جای‌گذاری نقطهٔ $(۰,۸)$، $a=۱$ به دست می‌آید.

۷۸-

$$-۲x^۲+۶x=۰ \Rightarrow x(-۲x+۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ \Rightarrow x_O=۰ \\ x=۳ \\ \Rightarrow x_A=۳ \end{cases}$$

پس $OA=۳$ است. برای به دست آوردن طول نقاط B و C باید $y=\frac{۵}{۲}$ قرار دهیم:

$$-۲x^۲+۶x=\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\times۲} -۴x^۲+۱۲x-۵=۰$$
$$\xrightarrow{\times(-۱)} ۴x^۲-۱۲x+۵=۰$$
$$\xrightarrow{\Delta=۱۴۴-۴(۴)(۵)=۶۴} x=\frac{+۱۲\pm\sqrt{۶۴}}{۸}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲۰}{۸}=\frac{۵}{۲} \Rightarrow x_B=۲/۵ \\ \frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x_C=۰/۵ \end{cases} \Rightarrow BC=۲$$

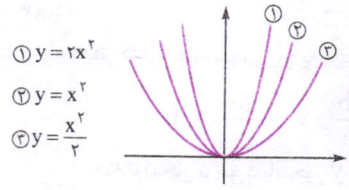
$$\text{مساحت ذوزنقه}=\frac{(OA+BC)\times\frac{۵}{۲}}{۲}=\frac{(۳+۲)\times\frac{۵}{۲}}{۲}=\frac{۲۵}{۴}$$

۷۹-

x	$y=x^۲$
-۱	۱
۰	۰
۱	۱

x	$y=۲x^۲$
-۱	۲
۰	۰
۱	۲

x	$y=\frac{x^۲}{۲}$
-۱	$\frac{۱}{۲}$
۰	۰
۱	$\frac{۱}{۲}$

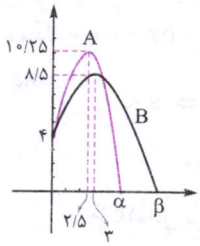


رأس هر سه سهمی نقطهٔ $(۰,۰)$ است. هر چه ضریب $x^۲$، بزرگ‌تر باشد (بدون توجه به علامت و از نظر قدر مطلق) دهانهٔ سهمی، جمع‌تر خواهد شد.

۸۰- الف)

$$A: y=-x^۲+۵x+۴ \Rightarrow x=-\frac{b}{۲a}=\frac{-۵}{-۲}=۲/۵$$

x	۰	۲	۲/۵	۳	۵
y	۴	۱۰	۱۰/۲۵	۱۰	۴



$$B: y=-\frac{x^۲}{۲}+۳x+۴$$
$$\Rightarrow x=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳}{-۱}=۳$$

x	۰	۱	۳	۴
y	۴	۶/۵	۸/۵	۸

ب) واضح است که شناگر A به ارتفاع اوج بالاتری می‌رسد.

پ) برای به دست آوردن مسافت افقی باید نقاط α و β را به دست آوریم. عرض این نقاط صفر است، پس:

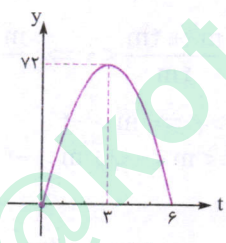
(توجه کنید ریشهٔ دیگر منفی است و غیرقابل‌قبول است.)

$$-x^۲+۵x+۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۲۵+۱۶=۴۱} \alpha=\frac{-۵-\sqrt{۴۱}}{-۲}\simeq ۵/۷$$
$$\frac{-x^۲}{۲}+۳x+۴=۰ \xrightarrow{\Delta=۹+۸=۱۷} \beta=\frac{-۳-\sqrt{۱۷}}{-۱}\simeq ۷/۱$$

بنابراین شناگر B، مسافت افقی بیشتری را طی می‌کند.

۸۱- الف)

t	y
۰	۰
۱	۴۰
۳ (رأس سهمی)	۷۲
۵	۴۰



ب) در ثانیهٔ سوم به بالاترین ارتفاع یعنی ۷۲ متر می‌رسد.

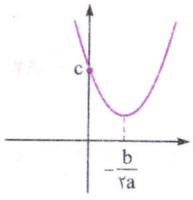
$$y=-۸t^۲+۴۸t \Rightarrow \text{رأس } t=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴۸}{-۱۶}=۳ \Rightarrow y=۷۲$$

پ) $\text{ارتفاع صفر}: y=۰ \Rightarrow -۸t^۲+۴۸t=۰$

$$\Rightarrow t(-۸t+۴۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=۶ \end{cases}$$

یعنی توپ در ثانیهٔ ۶ام به زمین برخورد کرده است. نمودار سهمی را ادامه نمی‌دهیم، چون حرکت توپ، وقتی $۰\le t\le ۶$ است معنی پیدا می‌کند.

۸۲-



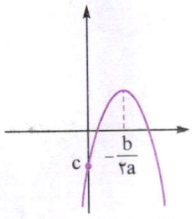
$$\frac{-b}{۲a}>۰ \xrightarrow{a>۰} b<۰$$

$c>۰$ (محل برخورد با محور y ها)

نمودار محور x ها را قطع نمی‌کند، پس معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ ریشه ندارد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۸۳-



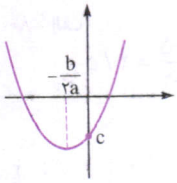
دهانهٔ سهمی رو به پایین $\Rightarrow a<0$

$\frac{-b}{2a}>0 \xrightarrow{a<0} b>0$

$c<0$ (محل برخورد با محور y ها)

نمودار محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند، پس معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، دو ریشه دارد.

۸۴-



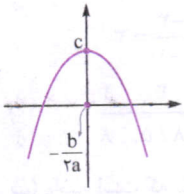
دهانهٔ رو به بالا $\Rightarrow a>0$

$\frac{-b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0$

$c<0$ (محل برخورد با محور y ها)

معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، دو ریشه دارد.

۸۵-



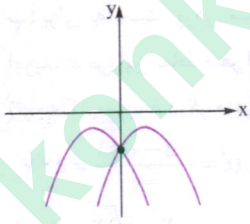
دهانهٔ رو به پایین $\Rightarrow a<0$

$\frac{-b}{2a}=0 \Rightarrow b=0$

$c>0$ (محل برخورد با محور y ها)

معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$، دو ریشه دارد.

۸۶- کمی دقت کنید که نمودار سهمی چگونه باید باشد! عرض از مبدأ که برابر ۱- است.



واضح است که دهانهٔ سهمی باید رو به پایین باشد، پس $m<0$ است.

از طرفی، عرض رأس سهمی هم باید کوچک‌تر یا مساوی صفر (مثبت نباشد) باشد؛ پس:

$$-\frac{\Delta}{4a}<0 \Rightarrow -\frac{m^2+4m}{4m}<0 \Rightarrow \frac{\cancel{m}(m+4)}{4\cancel{m}}>0$$

$$\xrightarrow{\times 4} m+4>0 \Rightarrow m>-4$$

حالا اشتراک $m<0$ و $m>-4$ برابر $-4<m<0$ می‌شود.

۸۷- مخالف ضریب x^2

۸۸- مثبت است (چون $\Delta<0$ و $a>0$)

۸۹- منفی

۹۰- مثبت

۹۱-

$$2x-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow 2x=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{6}$$

x		$\frac{1}{6}$	
$A=2x-\frac{1}{3}$	−	0	+

۹۲-

$$\sqrt{8}-\sqrt{2}x=0 \Rightarrow -\sqrt{2}x=-\sqrt{8}$$

$$\Rightarrow x=\frac{-\sqrt{8}}{-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$$

x		2	
A	+	0	−

۹۳-

$x=0\ ,\ x+1=0 \Rightarrow x=-1\ ,\ 4-x=0 \Rightarrow x=4$

x		−1		0		4	
x	−		−	0	+		+
x+1	−	0	+		+		+
4−x	+		+		+	0	−
A	+	0	−	0	+	0	−

۹۴-

$1-x=0 \Rightarrow x=1\ ,\ 1+x=0 \Rightarrow x=-1$

x		−1		1	
1−x	+		+	0	−
1+x	−	0	+		+
P(x)	−		+	0	−

ت.ن

۹۵- توجه دارید چون صورت مثبت است در علامت کسر تأثیری ندارد.

$m+2=0 \Rightarrow m=-2$

m		−2	
A	−		+

ت.ن

۹۶-

$$-x^2+5x=0 \Rightarrow x(-x+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x+5=0 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

x		0		5	
$-x^2+5x$	−	0	+	0	−

موافق ضریب x^2 — مخالف ضریب x^2 — موافق ضریب x^2

۹۷- صورت کسر منفی است. علامت منفی در علامت کل کسر اثر دارد، پس ابتدا منفی را در مخرج اثر داده و سپس کسر را تعیین علامت می‌کنیم، یعنی عبارت $A=\frac{1}{3-x}$ را تعیین علامت می‌کنیم. حالا چون صورت مثبت است در علامت A تأثیری ندارد:

$3-x=0 \Rightarrow x=3$

x		3	
A	+		−

ت.ن

توجه دارید که کسر به ازای ریشهٔ مخرج، یعنی $x=3$ تعریف‌نشده است.

۹۸- توان $(x-4)^2$ زوج است؛ پس در سطر آن، همهٔ علامت‌ها (+) است.

$(x-4)^2=0 \Rightarrow x=4$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

$(x+7)^{11}=0 \Rightarrow x=-7$ توان فرد است، شبیه درجه‌اول تعیین علامت می‌کنیم.

x		−7		−2		2		4	
$(x-4)^2$	+		+		+		+	0	+
x^2-4	+		+	0	−	0	+		+
$(x+7)^{11}$	−	0	+		+		+		+
A	−	0	+	0	−	0	+	0	+

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۹۹- توجه دارید که ریشهٔ $-x^2$ برابر صفر بوده و چون $x^2 \geq 0$ است پس $-x^2 \leq 0$، یعنی در سطر مربوط به آن، همهٔ علامت‌ها را $(-)$ می‌گذاریم. در $(4x-1)^3$ هم، چون توان فرد است، مانند $4x-1$ آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x		0		$\frac{1}{4}$	
$-x^2$	$-$	0	$-$		$-$
$(4x-1)^3$	$-$		$-$	0	$+$
A	$+$	0	$+$		$-$

ت.ن

$(4x-1)^3=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

۱۰۰-

$(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$

در سطر آن همه مثبت است. $\xrightarrow{\text{توان زوج است.}} (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$2-2x=0 \Rightarrow 2=2x \Rightarrow x=1$

$|4x-8|=0 \Rightarrow 4x-8=0 \Rightarrow x=2$

$\xrightarrow{\text{به دلیل قدرمطلق}} |4x-8| \geq 0$

x		-1		1		2	
$(x+1)^2$	$+$	0	$+$		$+$		$+$
$2-2x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$\lvert 4x-8\rvert$	$+$		$+$		$+$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$		$-$

ت.ن

۱۰۱-

$x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$

$x^2+9=0 \Rightarrow x^2=-9$ ریشه ندارد.

x		-3		3	
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$
x^2+9	$+$		$+$		$+$
A	$+$	0	$-$	0	$+$

همواره موافق علامت a می‌شود. ⇐

۱۰۲-

$7x^2-6x-1=0 \xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{7} \end{cases}$

$x^2-x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

x		$-\frac{1}{7}$		$\frac{1}{2}$		1	
$7x^2-6x-1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x^2-x+\frac{1}{4}$	$+$		$+$	0	$+$		$+$
A	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

ت.ن

موافق علامت a ⇐

۱۰۳-

همواره مثبت $\Rightarrow x^2-x+3=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(3)=-11<0$

$-2-x-x^2=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(-2)(-1)=-7<0$

$\Rightarrow$ همواره منفی

$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

x		-1		0	
x^2-x+3	$+$		$+$		$+$
$-2-x-x^2$	$-$		$-$		$-$
x^2+x	$+$	0	$-$	0	$+$
B	$-$		$+$		$-$

ت.ن ت.ن

۱۰۴- $x^2-x-3=0 \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(-3)=13>0$

$\Rightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \quad x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad -1-x^2=0$

$\Rightarrow -1=x^2$ ریشه ندارد $\Rightarrow$ همواره منفی

$4-x^2=0 \Rightarrow 4=x^2 \Rightarrow x=\pm 2$

x		-2		$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$		2		$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	
x^2-x-3	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$-1-x^2$	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$
$4-x^2$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
B	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

ت.ن ت.ن

۱۰۵- A بزرگ‌تر از صفر

۱۰۶- $x=-2$ (ریشهٔ مخرج)

۱۰۷- $(1,+\infty)$ (چون مخرج همواره مثبت است.)

۱۰۸- $-a<x<a$

۱۰۹-

$-1<3x+2<11 \xrightarrow{-2} -3<3x<9 \xrightarrow{\div 3} -1<x<3$

$\Rightarrow$ جواب $=(-1,3)$

۱۱۰-

$1<\frac{4-2x}{3}\leq 5 \xrightarrow{\times 3} 3<4-2x\leq 15 \xrightarrow{-4} -1<-2x\leq 11$

$\xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شه}]{\text{تقسیم بر } -2 \text{ پس}} \frac{1}{2}>x\geq -\frac{11}{2} \Rightarrow$ جواب $=[-\frac{11}{2},\frac{1}{2})$

۱۱۱-

$\frac{1}{3}<\frac{t-1}{4}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} \frac{5}{6}<\frac{t-1}{4}<1 \xrightarrow{\times 4} \frac{20}{6}<t-1<4$

$\xrightarrow{+1} \frac{26}{6}<t<5 \Rightarrow$ جواب $=(\frac{26}{6},5)=(\frac{13}{3},5)$

۱۱۲-

$-2\leq \frac{3}{2}(4t-1)\leq 12 \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} -\frac{4}{3}\leq 4t-1\leq \frac{\cancel{24}^{8}}{\cancel{3}}$

$\xrightarrow{+1} -\frac{1}{3}\leq 4t\leq 9 \xrightarrow{\div 4} -\frac{1}{12}\leq t\leq \frac{9}{4}$

$\Rightarrow$ جواب $=[-\frac{1}{12},\frac{9}{4}]$

● در هر دستگاه، جواب‌های هر نامعادله را به دست آورده و بین آن‌ها، اشتراک می‌گیریم.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۱۳-

$$\begin{cases} x-1>-2x+8 \Rightarrow x+2x>1+8 \\ \Rightarrow 3x>9 \xrightarrow{\div 3} x>3 \\ \frac{x}{2}-1<2x \xrightarrow{\times 2} x-2<4x \\ \Rightarrow -2<\underbrace{4x-x}_{3x} \xrightarrow{\div 3} -\frac{2}{3}<x \end{cases}$$

$\xrightarrow{\quad} 3$

$\xrightarrow{\quad} -\frac{2}{3}$

$\xrightarrow{\cap}$ جواب $=(3,+\infty)$

۱۱۴-

$$\begin{cases} \frac{x+2}{3}<\frac{x}{2}-\frac{x-5}{6} \xrightarrow{\times 6} \underbrace{2(x+2)}_{2x+4}<\underbrace{3x-(x-5)}_{2x+5} \\ \Rightarrow 4<5 \text{ همواره برقرار } \Rightarrow x\in\mathbb{R} \\ \underbrace{3(2x-1)-x}_{5x-3}>\underbrace{3x-1-2x}_{x-1} \Rightarrow 4x>2 \xrightarrow{\div 4} x>\frac{1}{2} \end{cases}$$

جواب دستگاه همان جواب نامعادلهٔ دوم یعنی $x>\frac{1}{2}$ خواهد بود. (زیرا اولی همواره برقرار است و مشکلی ایجاد نمی‌کند.)

● برای حل نامعادله، ابتدا کسر را تعیین علامت کرده و با توجه به علامت > یا < جواب‌ها را به دست می‌آوریم.

۱۱۵- $3x+6=0 \Rightarrow x=-2$

$x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$

x		-2		2		3	
$3x+6$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-5x+6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
کسر	$-$	0	$+$	ت.ن	$-$	ت.ن	$+$
			ج				ج

جواب $=[-2,2)\cup(3,+\infty)$ (چون علامت ≥ 0 داریم، نقاطی که کسر صفر می‌شود نیز قبول بوده و بازه در آن نقاط بسته است.)

۱۱۶- $x^2-25=0 \Rightarrow x=\pm 5$

$x=0\ ,\ (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$

$\xrightarrow{\text{چون توان دوم است}}$ در سطر مربوطه همه $(+)$

x		-5		0		3		5	
x^2-25	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$(x-3)^2$	$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$
کسر	$-$	0	$+$	ت.ن	$-$	ت.ن	$-$	0	$+$
					ج		ج		

جواب $=(-\infty,-5)\cup(0,3)\cup(3,5)$ (چون مساوی نداریم، هیچ کدام از نقاط مرزی در سطر آخر قبول نبوده و همهٔ بازه‌ها باز هستند.)

۱۱۷- همواره $-x^2\leq 0$ است ، $-x^2=0 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow$ در سطر $-x^2$ همهٔ علامت‌ها $(-)$ هستند

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1\ \ x+3=0 \Rightarrow x=-3$

جواب $=(-\infty,-3]\cup(-1,1)$

x		-3		-1		0		1	
$-x^2$	$-$		$-$		$-$	0	$-$		$-$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2-1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
کسر	$+$	0	$-$	ت.ن	$+$	0	$+$	ت.ن	$-$
					ج		ج		

۱۱۸- توان زوج است، پس $(x-2)^4\geq 0$ $\Rightarrow x=2 \Rightarrow (x-2)^4=0$

$2-8x=0 \Rightarrow 2=8x \Rightarrow \frac{1}{4}=x$

$x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$

x		0		$\frac{1}{4}$		1		2	
$(x-2)^4$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$
$2-8x$	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$
x^2-x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
کسر	$+$		$-$	0	$+$		$-$	0	$-$
		ت.ن				ت.ن			
	ج				ج				

جواب $=(-\infty,0)\cup[\frac{1}{4},1)\cup\{2\}$ (چون ≥ 0 داریم، نقاطی در سطر آخر، که به ازای آن‌ها کسر برابر صفر می‌شود، قابل‌قبول هستند.)

● ابتدا همهٔ عبارت‌ها را به یک طرف برده، با مخرج‌مشترک و ساده‌سازی آن‌ها را تبدیل به یک کسر می‌کنیم. حالا با تعیین علامت و توجه به علامت > یا < جواب‌ها را به دست می‌آوریم.

۱۱۹- $\frac{6}{x}<1 \Rightarrow \frac{6}{x}-1<0 \Rightarrow \frac{6-x}{x}<0$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 6-x=0 \Rightarrow x=6$

جواب $=(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$

x		0		6	
$6-x$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{6-x}{x}$	$-$		$+$	0	$-$
		ت.ن			
	ج				ج

۱۲۰-

$x+\frac{1}{x}+2\leq 0 \Rightarrow \frac{x^2+1+2x}{x}\leq 0$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x^2+1+2x=(x+1)^2=0$

$\Rightarrow x=-1\ ,\ x=0$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

جواب $=(-\infty,-1]\cup[-1,0)=(-\infty,0)$

x		-1		0	
x^2+1+2x	$+$	0	$+$		$+$
x	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x^2+1+2x}{x}$	$-$	0	$-$	ت.ن	$+$
	ج		ج		

۱۲۱- $\frac{x}{x-1}\le\frac{x+1}{x-2}\Rightarrow 0\le\frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{x-1}$

$$=\frac{\overbrace{(x+1)(x-1)}^{x^2-1}-x(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}$$

$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x-2=0\Rightarrow x=2$

$x-1=0\Rightarrow x=1$

x		$\frac{1}{2}$		1		2	
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}$	$-$	0	$+$		$-$		$+$
	ج	ت.ن			ت.ن		ج

x هایی را می‌خواهیم که کسر، بزرگ‌تر یا مساوی صفر است. پس مجموعه‌جواب می‌شود: $[\frac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$

۱۲۲- روش اول $\frac{3-x}{x^2+1}-1>0\Rightarrow\frac{3-x-x^2-1}{x^2+1}>0$

$\Rightarrow\frac{-x^2-x+2}{x^2+1}>0$

$-x^2-x+2=0\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}}\begin{cases}x=1\\ x=\frac{c}{a}=-2\end{cases}$

x		-2		1	
$-x^2-x+2$	$-$	0	$+$	0	$-$
x^2+1	$+$		$+$		$+$
$\frac{-x^2-x+2}{x^2+1}$	$-$	0	$+$	0	$-$
			ج		

$x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1$ ریشه ندارد.

$\Rightarrow$ موافق a یعنی همواره $(+)$

x هایی را می‌خواهیم که کسر مثبت باشد، پس بازهٔ $(-2,1)$ جواب نامعادله خواهد بود.

روش دوم همواره $x^2+1>0$ است، بنابراین بدون این‌که جهت عوض شود، می‌توانیم طرفین وسطین کنیم.

$3-x>x^2+1\Rightarrow 0>x^2+x-2$

$\Rightarrow x^2+x-2=0\xrightarrow{\text{جمع ضرایب صفر}}\begin{cases}x=1\\ x=\frac{c}{a}=-2\end{cases}$

x		-2		1	
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0	$+$
			ج		

۱۲۳- $\frac{x-2}{x-1}-\underbrace{\frac{2x+3}{1-x}}_{-(x-1)}-2>0\Rightarrow\frac{x-2+2x+3-2(x-1)}{x-1}>0$

$\Rightarrow\frac{x+3}{x-1}>0$

$x-1=0\Rightarrow x=1\ ,\ x+3=0\Rightarrow x=-3$

x		-3		1	
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
کسر	$+$	0	$-$	ت.ن	$+$
	ج				ج

مجموعهٔ جواب بازهٔ $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ خواهد بود.

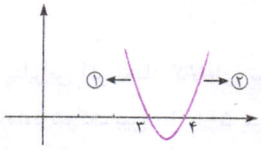
۱۲۴- $x^2-7x+12=0\Rightarrow(x-3)(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=3\\ x=4\end{cases}$

x		3		4	
$x^2-7x+12$	$+$	0	$-$	0	$+$
	ج				ج

برای به دست آوردن جواب به روش هندسی، نمودار سهمی $y=x^2-7x+12$ را رسم می‌کنیم. x هایی که در آن‌ها نمودار بالاتر یا روی محور xها قرار دارد، جواب خواهد بود.

رأس $x=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{2}\Rightarrow y=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4}$

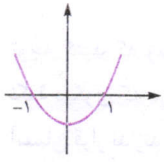
x	$y=x^2-7x+12$	(x,y)
3	$y=9-21+12=0$	$(3,0)$
$\frac{7}{2}$	$y=-\frac{1}{4}$	$(\frac{7}{2},-\frac{1}{4})$
4	$y=16-28+12=0$	$(4,0)$



$\Rightarrow$ جواب $=\underbrace{(-\infty,3]}_{(1)}\cup\underbrace{[4,+\infty)}_{(2)}$

۱۲۵- $x^2<1\Rightarrow x^2-1<0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x=\pm1$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
			ج		



نمودار معادلهٔ $y=x^2-1$ به صورت مقابل است. x هایی که به ازای آن‌ها، نمودار زیر محور xها قرار دارد، جواب است، بنابراین جواب بازهٔ $(-1,1)$ خواهد بود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

● شرط این‌که معادلهٔ درجه‌دوم دارای دو ریشه باشد، این است که $\Delta > 0$ باشد، پس:

۱۲۶-

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 9 - 4(-m+1) > 0 \Rightarrow 9 + 4m - 4 > 0$$

$$\Rightarrow 4m > -5 \Rightarrow m > -\frac{5}{4}$$

۱۲۷-

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4 > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{m^2 + 2m - 3}_{(m+3)(m-1)} > 0$$

m		-3		1	
m^2+2m-3	$+$	0	$-$	0	$+$
	ج				ج

اگر $m < -3$ یا $m > 1$ باشد، معادله دو ریشه دارد.

● شرط ریشه‌نداشتن معادلهٔ درجه‌دوم، $\Delta < 0$ است.

۱۲۸-

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-m)^2 - 4(4) < 0 \Rightarrow m^2 - 16 < 0$$

$$\xrightarrow[\text{حل کرد ولی با قدرمطلق حل می‌کنیم.)}]{\text{(می‌شه با تعیین علامت هم}} m^2 < 16 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |m| < 4$$

$$\Rightarrow -4 < m < 4$$

۱۲۹-

$$\Delta < 0 \Rightarrow 16 - 4(m)(-1) = 16 + 4m < 0$$

$$\Rightarrow 4m < -16 \Rightarrow m < -4$$

دقت کنید باید $m \neq 0$ باشد (در غیر این صورت درجه‌اول می‌شه و حتماً ریشه داره). اما اگر $m < -4$ باشد خودبه‌خود $m \neq 0$ هم هست. (یعنی نیازی به این‌که $m = 0$ رو کنار بذارید نیست چون خودش اصلاً تو جواب‌ها نیس)

۱۳۰- **الف)** اگر $y = 0$ باشد شرکت نه سود می‌کند نه ضرر، پس:

$$-200 + 5x = 0 \Rightarrow 5x = 200 \Rightarrow x = 40$$

به ازای تولید ۴۰۰۰۰ کالا، شرکت نه سود می‌کند نه ضرر.

ب) اگر شرکت بیشتر از ۴۰۰۰۰ کالا تولید کند، سود می‌کند.

پ) اگر شرکت کم‌تر از ۴۰۰۰۰ کالا تولید کند، ضرر خواهد کرد.

x		40	
$-200+5x$	$-$	0	$+$

ت) $20 \le y \le 50$، پس $20 \le -200 + 5x \le 50$ خواهد بود. این نامعادلهٔ دوگانه را حل می‌کنیم:

$$+20 \le -200 + 5x \le 50 \xrightarrow{+200} 220 \le 5x \le 250$$

$$\xrightarrow{\div 5} 44 \le x \le 50$$

بنابراین اگر تعداد کالاهای تولیدشده بین ۴۴۰۰۰ و ۵۰۰۰۰ باشد، سود شرکت بین ۲۰ تا ۵۰ میلیون تومان خواهد بود.

۱۳۱- کافی است نامعادلهٔ روبه‌رو را حل کنیم:

$$-t^2 + 10t > -3t^2 + 18t \Rightarrow 2t^2 - 8t > 0 \Rightarrow 2t(t-4) > 0$$

$$\Rightarrow$$

t		0		4	
$2t(t-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
					ج

توجه کنید که زمان منفی نیست، پس جواب $t < 0$ بی‌معنی است. نکتهٔ دیگری که در این‌جا وجود دارد این است که توپ‌ها تا قیامت! در آسمان قرار ندارند. وقتی توپ‌ها به زمین می‌رسند $y = 0$ خواهد بود.

پس:

$$-t^2 + 10t = 0 \Rightarrow t(-t+10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases} \Rightarrow$$ توپ تسنیم پس از ۱۰ ثانیه به زمین برمی‌گردد.

$$-3t^2 + 18t = 0 \Rightarrow 3t(-t+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 6 \end{cases} \Rightarrow$$ توپ مهدی پس از ۶ ثانیه به زمین می‌رسد.

پس $t \le 10$ هم خواهد بود. مشخص می‌شود در ثانیه‌های $4 < t < 10$، توپ تسنیم بالاتر از توپ مهدی قرار دارد.

۱۳۲- در عبارت درجه‌دوم $ax^2 + bx + c$ اگر $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد، همواره $ax^2 + bx + c > 0$ خواهد بود.

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(5) = -31 < 0 \ , \ a = 2 > 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x + 5 > 0$$ همواره

● شرط همواره مثبت بودن عبارت درجه‌دوم این است که $\Delta < 0$ و ضریب $x^2 = a > 0$.

۱۳۳-

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 9 - 4m < 0 \\ \Rightarrow 9 < 4m \Rightarrow \frac{9}{4} < m \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{9}{4} < m \\ a > 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases}$$

۱۳۴-

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 16 < 0 \Rightarrow m^2 < 16 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |m| < 4 \\ \Rightarrow -4 < m < 4 \\ a > 0 \Rightarrow 4 > 0 \end{cases}$$ همواره برقرار است.

پس جواب همان $-4 < m < 4$ خواهد بود.

۱۳۵- شرط همواره منفی‌شدن عبارت درجه‌دوم این است که $\Delta < 0$ و ضریب $x^2 < 0$. توجه کنید حدود a که در مسئله خواسته شده است را با a به معنی ضریب x^2 اشتباه نگیرید.

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4(a)(\frac{1}{a}) < 0 \Rightarrow a^2 - 4 < 0 \\ \Rightarrow a^2 < 4 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2 \\ x^2 \text{ ضریب} < 0 \Rightarrow a < 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} -2 < a < 0$$

۱۳۶- باید همواره $ax^2 + 4ax + a + 5 > 0$ باشد. شرط برقراری این است که $\Delta < 0$ و $a > 0$ باشد، پس:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \Rightarrow 16a^2 - 4a(a+5) < 0 \Rightarrow 4a\underbrace{(4a - (a+5))}_{3a-5} < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

a		0		$\frac{5}{3}$	
$4a(3a-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$
			ج		

اشتراک دو جواب $0 < a < \frac{5}{3}$ و $a > 0$، همان مجموعهٔ $0 < a < \frac{5}{3}$ است، پس جواب $0 < a < \frac{5}{3}$ خواهد بود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۳۷- شرط برقراری نامعادلهٔ داده‌شده این است که $\Delta \le 0$ و ضریب $x^2 > 0$ باشد.

۱) $\Delta \le 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 4(2a)(2a) \le 0 \Rightarrow (a-2)^2 - 16a^2 \le 0$

$\Rightarrow (a-2-4a)(a-2+4a) \le 0$

$\underbrace{(-3a-2)}_{\text{ریشه}=-\frac{2}{3}}\underbrace{(5a-2)}_{\text{ریشه}=\frac{2}{5}} \le 0$

$\Rightarrow$

a		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{5}$	
$(-3a-2)(5a-2)$	$-$	0	$+$	0	$-$
	ج				ج

۲) ضریب $x^2 > 0 \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow a > 0$

$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a \ge \frac{2}{5}$

۱۳۸-

$|3x+1| \le 2 \Rightarrow -2 \le 3x+1 \le 2 \xrightarrow{-1} -3 \le 3x \le 1$

$\xrightarrow{(\div 3)} -1 \le x \le \frac{1}{3} \Rightarrow$ جواب $= [-1, \frac{1}{3}]$

۱۳۹-

$|2-x| \le 5 \Rightarrow -5 \le 2-x \le 5 \xrightarrow{-2} -7 \le -x \le 3$

$\xrightarrow{\times(-1)} 7 \ge x \ge -3 \Rightarrow$ جواب $= [-3, 7]$

۱۴۰-

$|\frac{x}{2}-1| \ge 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-1 \ge 2 \Rightarrow \frac{x}{2} \ge 3 \Rightarrow x \ge 6 \\ \text{یا} \\ \frac{x}{2}-1 \le -2 \Rightarrow \frac{x}{2} \le -1 \Rightarrow x \le -2 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{اجتماع}}$ جواب $= (-\infty, -2] \cup [6, +\infty)$

۱۴۱-

$|1-\frac{x+1}{3}| > 4$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-\frac{x+1}{3} > 4 \Rightarrow -3 > \frac{x+1}{3} \Rightarrow -9 > x+1 \\ \Rightarrow -10 > x \Rightarrow x < -10 \\ \text{یا} \\ 1-\frac{x+1}{3} < -4 \Rightarrow 5 < \frac{x+1}{3} \Rightarrow 15 < x+1 \\ \Rightarrow 14 < x \end{cases}$

پس مجموعه‌جواب به صورت $(-\infty, -10) \cup (14, +\infty)$ خواهد بود.

۱۴۲-

$3|4x-\frac{1}{2}| - 1 \le \frac{1}{2} \Rightarrow 3|4x-\frac{1}{2}| \le \frac{3}{2}$

$\xrightarrow{\div 3} |4x-\frac{1}{2}| \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le 4x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$

$\xrightarrow{+\frac{1}{2}} 0 \le 4x \le 1 \xrightarrow{\div 4} 0 \le x \le \frac{1}{4} \Rightarrow$ جواب $= [0, \frac{1}{4}]$

۱۴۳-

$\frac{|x-1|}{4} \ge 2 \xrightarrow{\times 4} |x-1| \ge 8$

$\Rightarrow \begin{cases} x-1 \ge 8 \Rightarrow x \ge 9 \\ \text{یا} \\ x-1 \le -8 \Rightarrow x \le -7 \end{cases} \Rightarrow$ جواب $= (-\infty, -7] \cup [9, +\infty)$

۱۴۴-

$|x^2-1| \ge 3$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-1 \ge 3 \Rightarrow x^2 \ge 4 \\ \xrightarrow{\sqrt{}} |x| \ge 2 \Rightarrow x \ge 2 \text{ یا } x \le -2 \\ \text{یا} \\ x^2-1 \le -3 \Rightarrow x^2 \le -2 \\ \Rightarrow \text{ هیچگاه برقرار نیست.} \Rightarrow \text{جواب} = \varnothing \end{cases}$

اجتماع دو دسته جواب، همان مجموعه جواب اولی است، پس جواب بازهٔ $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ خواهد بود.

۱۴۵-

$x^2 - 8 \le 0 \Rightarrow x^2 \le 8 \xrightarrow{\sqrt{}} |x| \le \sqrt{8}$

$\Rightarrow -\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8} \Rightarrow$ جواب $= [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$

۱۴۶-

$x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 3 \xrightarrow{\sqrt{}} |x| > \sqrt{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ \text{یا} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$ جواب $= (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

۱۴۷- الف)

$1 < x < 8 \xrightarrow[\text{را کم می‌کنیم.}]{\text{عدد } \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2}} 1 - \frac{9}{2} < x - \frac{9}{2} < 8 - \frac{9}{2}$

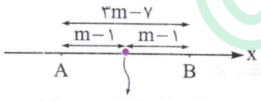
$\Rightarrow -\frac{7}{2} < x - \frac{9}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow |x - \frac{9}{2}| < \frac{7}{2}$

ب) $x \le -2$ یا $x \ge 4 \xrightarrow[\text{را کم می‌کنیم.}]{\text{عدد } \frac{4+(-2)}{2} = 1} x-1 \le -3$ یا $x-1 \ge 3$

$\Rightarrow |x-1| \ge 3$

۱۴۸-

$3m - 7 = 2(m-1) \Rightarrow 3m - 7 = 2m - 2 \Rightarrow m = 5$



تنها نقطه‌ای که از هر دو نقطه به یک فاصله است.

۱۴۹-

$y = x^3 - x = x(x^2-1)$

$x = 0 \ , \ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-1	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

۱۵۰-

$x^3 + x = 0 \Rightarrow x(x^2+1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases}$ همواره مثبت $\Rightarrow$ ریشه ندارد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

$x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$

x		−1		0		1	
x	−		−	0	+		+
x^2+1	+		+		+		+
x^2	+		+	0	+		+
x^2-1	+	0	−		−	0	+
y	−		+		−		+
		ت.ن		ت.ن		ت.ن	

۱۵۱- $x^2+x+6=0 \Rightarrow \Delta = 1-4(6) = -23 < 0$

$\Rightarrow$ همواره موافق علامت a

$(x-3)^7=0 \Rightarrow x=3$ توان فردشبیه درجه‌اول تعیین علامت می‌شود

(اگر جمع دو عبارت نامنفی صفر شه، هر دو باید صفر باشن)

$x^2+|x|=0 \Rightarrow x=0 \xrightarrow{x^2,|x|\ge 0} x^2+|x|\ge 0$

$\Rightarrow$ در سطر مربوطه همه (+) هستند.

x		0		3	
x^2+x+6	+		+		+
$(x-3)^7$	−		−	0	+
$x^2+\|x\|$	+	0	+		+
کسر	−	ت.ن	−	0	+
	ج		ج		

جواب $=(-\infty,0)\cup(0,3)$

۱۵۲-

$-|x-1|=0 \Rightarrow x=1 \ , \ |x-1|\ge 0 \Rightarrow -|x-1|\le 0$

$\Rightarrow$ در سطر مربوطه همهٔ علامت‌ها (−) است.

$x-2-x^2=0 \Rightarrow -x^2+x-2=0$

$\Rightarrow \Delta = 1^2-4(-1)(-2) = -7 < 0$

$\Rightarrow$ همواره موافق علامت a

$\Rightarrow$ در سطر مربوط، همهٔ علامت‌ها منفی است.

$3x^2-2x-5=0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{c}{a}=-\frac{-5}{3}=\frac{5}{3} \end{cases}$

x		−1		1		$\frac{5}{3}$	
$-\|x-1\|$	−		−	0	−		−
$x-2-x^2$	−		−		−		−
$3x^2-2x-5$	+	0	−		−	0	+
کسر	+		−	0	−		+
		ت.ن				ت.ن	
			ج		ج		

جواب $=(-1,1]\cup[1,\frac{5}{3}) = (-1,\frac{5}{3})$

۱۵۳- این نامعادلهٔ دوگانه را نمی‌توانیم به صورت هم‌زمان حل کنیم، پس آن را تبدیل به دو نامعادله کرده و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$-1 < \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow 0 < \frac{x+1}{x-1}+1 \Rightarrow 0 < \frac{x+1+x-1}{x-1}$

$\Rightarrow 0 < \frac{2x}{x-1}$

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \ , \ 2x=0 \Rightarrow x=0$

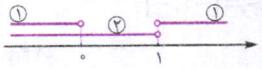
x		0		1	
2x	−	0	+		+
x−1	−		−	0	+
کسر	+	0	−	ت.ن	+
	ج				ج

بنابراین جواب این نامعادله $\overbrace{x<0 \text{ یا } x>1}^{(1)}$ خواهد بود.

$\frac{x+1}{x-1} < 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1}-1<0 \Rightarrow \frac{x+1-x+1}{x-1}<0$

$\Rightarrow \frac{2}{x-1}<0 \xrightarrow[\text{که مخرج منفی شود.}]{\text{کسر وقتی منفی می‌شود}} x-1<0$

$\Rightarrow x<1 \quad (2)$



$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x<0 \Rightarrow$ جواب نهایی دستگاه $=(-\infty,0)$

۱۵۴- **الف)** x هایی که به ازای آن‌ها، نمودار بالای محور x ها بوده $y=P(x)>0$ و x هایی که به ازای آن‌ها، نمودار زیر محور x ها است، $y=P(x)<0$ خواهند بود.

$y=0 \Rightarrow$ محل برخورد با محور xها $\Rightarrow x=0,3$

x		0		3	
P(x)	+	0	−	0	+

نمودار بالای محورxها $(y>0)$ — نمودار زیر محور xها $(y<0)$ — نمودار بالای محور xها $(y>0)$

ب) $y=0 \Rightarrow$ محل برخورد با محور xها $\Rightarrow x=-3,1$

x		−3		1	
P(x)	−	0	+	0	−

نمودار زیر محورxها — نمودار بالای محور xها — نمودار زیر محور xها

پ) $y=0 \Rightarrow x=-2,0,2$

x		−2		0		2	
P(x)	−	0	+	0	−	0	+

ت) $y=0 \Rightarrow x=-4,-1,3$

x		−4		−1		3	
P(x)	−	0	+	0	−	0	−

۱۵۵- ابتدا P(x) را تعیین علامت می‌کنیم.

$P(x)=0 \xrightarrow{\text{محل برخورد با محور xها}} x=-1,0,2$

الف) $P(x)\ge 0 \Rightarrow$ جواب $=(-\infty,-1]\cup[0,2]$

ب) $P(x)\le 0 \Rightarrow$ جواب $=[-1,0]\cup[2,+\infty)$

x		−1		0		2	
P(x)	+	0	−	0	+	0	−

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پ) برای حل این نامعادله داریم:

x		−۱		۰		۲	
P(x)	+	۰	−	۰	+	۰	−
x	−		−	۰	+		+
xP(x)	−	۰	+	۰	+	۰	−
			ج		ج		

جواب $=[-1,2]$

x		−۱		۰		۲	
P(x)	+	۰	−	۰	+	۰	−
x − ۲	−		−		−	۰	+
$\frac{P(x)}{x-2}$	−	۰	+	۰	−	ت.ن	−
		ج		ج			ج

ت) جواب $=(-\infty,-1)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$

۱۵۶- ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$(x^2-x-2)+mx=0 \Rightarrow x^2+(m-1)x-2=0$$

$$\xrightarrow{\Delta>0} (m-1)^2-4(-2)=(m-1)^2+8>0$$

توجه دارید که به ازای هر m، همواره $(m-1)^2+8>0$ است، بنابراین به ازای هر عدد m، معادله دو ریشه دارد.

۱۵۷- ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$$x-1=mx(x+1) \Rightarrow mx^2+mx-x+1=0$$

$$\Rightarrow mx^2+(m-1)x+1=0$$

$$\Delta<0 \Rightarrow (m-1)^2-4m<0 \Rightarrow m^2-2m+1-4m<0$$

$$\Rightarrow m^2-6m+1<0 \Rightarrow$$ با تعیین علامت حل می‌کنیم

$$\underbrace{m^2-6m+1}_{\text{ریشه‌ها را به دست می‌آوریم}}=0 \Rightarrow \begin{cases} m_1=\frac{6+\sqrt{32}}{2} \\ m_2=\frac{6-\sqrt{32}}{2} \end{cases}$$

m		m_2		m_1	
m^2-6m+1	+	۰	−	۰	+
			ج		

اگر $\frac{6-\sqrt{32}}{2}<m<\frac{6+\sqrt{32}}{2}$ باشد، معادله جواب ندارد.

۱۵۸-

$$\begin{cases} \Delta<0 \Rightarrow (2m-1)^2-4m(m-2)<0 \\ \Rightarrow 4m^2-4m+1-4m^2+8m<0 \\ \Rightarrow 4m<-1 \Rightarrow m<-\frac{1}{4} \\ a>0 \Rightarrow m>0 \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های $m<-\frac{1}{4}$ و $m>0$ تهی است، پس عبارت داده‌شده هیچ‌گاه همواره مثبت نمی‌شود.

۱۵۹-

$$\begin{cases} \Delta<0 \Rightarrow 4(a-1)^2-4(a-1)(2a-5)<0 \\ \Rightarrow 4(a-1)\overbrace{(a-1-(2a-5))}^{-a+4}<0 \xrightarrow[\text{علامت}]{\text{با تعیین}} a<1 \text{ یا } 4<a \\ x^2\text{ضریب}<0 \Rightarrow a-1<0 \Rightarrow a<1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} a<1$$

۱۶۰- m را طوری به‌دست می‌آوریم که همواره $x^2+mx>2x+3m-1$، پس همواره $x^2+(m-2)x-3m+1>0$ برقرار است.

$$\begin{cases} \Delta<0 \Rightarrow (m-2)^2-4(-3m+1)<0 \\ \Rightarrow m^2-4m+4+12m-4<0 \Rightarrow m^2+8m<0 \\ \Rightarrow m(m+8)<0 \xrightarrow[\text{علامت}]{\text{با تعیین}} -8<m<0 \\ a>0 \Rightarrow 1>0 \text{ همواره برقرار است.} \end{cases}$$

پس $-8<m<0$ باید باشد.

۱۶۱- همواره $y\geq 0$ است، پس همواره $x^2+(a-1)x+1\geq 0$، بنابراین:

$$\begin{cases} \Delta\leq 0 \Rightarrow (a-1)^2-4\leq 0 \Rightarrow (a-1)^2\leq 4 \\ \xrightarrow{\sqrt{}} |a-1|\leq 2 \Rightarrow -2\leq a-1\leq 2 \Rightarrow -1\leq a\leq 3 \\ x^2\text{ضریب}=1>0 \end{cases}$$

صبر کنید! کار تمام نشده است. طول رأس سهمی هم باید منفی باشد، یعنی $x=-\frac{(a-1)}{2}<0$، پس $\frac{1-a}{2}<0$ و لذا $1-a<0$ و $1<a$ خواهد شد. با اشتراک بین $-1\leq a\leq 3$ و $1<a$، مشخص می‌شود $1<a\leq 3$ می‌باشد.

۱۶۲- $\frac{1}{|x|}>2 \xrightarrow[\text{معکوس‌کردن جهت عوض می‌شود.}]{\text{دو طرف مثبت‌اند با}} |x|<\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

فقط دقت داشته باشید که به ازای $x=0$ کسر، تعریف‌نشده می‌شود، بنابراین باید $x=0$ را از جواب‌ها حذف کنیم. مجموعه‌جواب به صورت $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})-\{0\}$ یا $(-\frac{1}{2},0)\cup(0,\frac{1}{2})$ خواهد بود.

۱۶۳- یک نامعادلهٔ دوگانه داریم. چون می‌خواهیم هر دو برقرار باشند در آخر بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم. *(به «و» دقت کن)*

$$|x^2-2x|\leq 3 \Rightarrow -3\leq x^2-2x\leq 3 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x\leq 3 \\ \text{و} \\ -3\leq x^2-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-2x-3\leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+1)\leq 0 \\ 0\leq x^2-2x+3 \xrightarrow[a>0]{\Delta=4-12<0} \text{همواره برقرار است.} \end{cases}$$

x		−۱		۳	
$(x-3)(x+1)$	+	۰	−	۰	+
			ج		

بنابراین اشتراک جواب‌ها همان بازه، $[-1,3]$ خواهد بود.

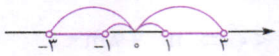
۱۶۴- روش اول: نامعادلهٔ دوگانه داریم. چون می‌خواهیم هر دو نامعادله برقرار باشند؛ در آخر باید بین جواب‌ها اشتراک بگیریم:

$$1<|x|<3 \Rightarrow \begin{cases} 1<|x| \Rightarrow 1<x \text{ یا } x<-1 \\ \quad -1 \quad 1 \\ |x|<3 \Rightarrow -3<x<3 \\ \quad -3 \quad 3 \end{cases}$$

اشتراک بین جواب‌های اولی و دومی می‌شود $1<x<3$ یا $-3<x<-1$ پس جواب، مجموعهٔ $(-3,-1)\cup(1,3)$ خواهد بود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

روش دوم $|x|$ فاصلهٔ نقطهٔ x تا مبدأ را نشان می‌دهد. باید نقاطی را به دست آوریم که فاصلهٔ آن‌ها تا مبدأ، بین ۱ تا ۳ واحد باشد. بازه‌های مشخص‌شده نقطه‌های مطلوب هستند، پس $1<x<3$ یا $-3<x<-1$.



۱۶۵- $-1\le|x-1|$ همواره برقرار است، کافی است نامعادلهٔ $|x-1|\le 5$ را حل کنیم:

$|x-1|\le 5 \Rightarrow -5\le x-1\le 5$

$\Rightarrow -4\le x\le 6 \Rightarrow$ جواب $=[-4,6]$

پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل چهارم

۱- **الف)** اگر $b^2<4ac$، آن‌گاه $\underbrace{b^2-4ac}_{\Delta}<0$ پس معادلهٔ درجه‌دوم هیچ ریشه دارد.

ب) $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$

پ) مثبت

ت) $-2\le x\le 2$ یا $-2\le -x\le 2$

۲-

الف) $x^2+3x=3 \xrightarrow{\div(\frac{3}{2})^2} x^2+3x+(\frac{3}{2})^2=3+(\frac{3}{2})^2$

$\Rightarrow (x+\frac{3}{2})^2=3+\frac{9}{4}=\frac{21}{4} \Rightarrow x+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\Rightarrow x=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{21}}{2}$

ب) $-2x^2+x+3=0 \xrightarrow[c=3]{a=-2,\,b=1} \Delta=b^2-4ac$

$=1-4(-2)(3)=1+24=25$

$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2(-2)} \Rightarrow \begin{cases}\frac{-1+5}{-4}=-1\\ \frac{-1-5}{-4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\end{cases}$

۳- مساحت مثلث برابر $S=\frac{1}{2}(x+1)(4x)\sin 30^\circ=x(x+1)$ و مساحت مستطیل برابر $(x-2)(2x+2)$ است.

$(x-2)(2x+2)=x(x+1)$

$\Rightarrow 2(x-2)(x+1)-x(x+1)=0$

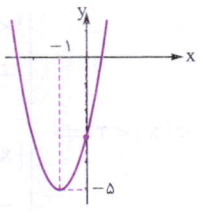
$\Rightarrow (x+1)(2(x-2)-x)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=-1 \ \times\\ 2x-4-x=0\\ \Rightarrow x=4 \ \checkmark\end{cases}$

۴- **الف)** چون ضریب x^2 مثبت است پس سهمی دارای مینیمم است.

ب) $x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{4}=-1$

x	y
۱	۳
۰	-۳
-۱	-۵
-۲	-۳
-۳	۳

رأس سهمی



۵- معادلهٔ محور تقارن: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2a}=\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow 3=2a \Rightarrow a=\frac{3}{2}$

$y=\frac{3}{2}x^2-2x+4 \Rightarrow x_S=\frac{2}{3} \Rightarrow y_S=-\frac{\Delta}{4a}$

$=-\frac{(-2)^2-4(\frac{3}{2})(4)}{4(\frac{3}{2})}=-\frac{-20}{6}=\frac{10}{3}$

پس مختصات رأس به صورت $S(\frac{2}{3},\frac{10}{3})$ است.

۶- $|x|=0 \Rightarrow x=0$

$x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1,3$

$(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$

$-3x^2-2x-7=0 \xrightarrow{\Delta<0}$ ریشه ندارد.

x	$-\infty$	۰	۱	۲	۳	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	+	+	+	+	+	
x^2-4x+3	+	+	−	−	+	
$(x-2)^2$	+	+	+	+	+	
$-3x^2-2x-7$ (همواره موافق a)	−	−	−	−	−	
P	−	−	+ ت.ن	+	−	

۷- $x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)=0$

$\Rightarrow x=-1,0,1$

$x^2-2x+2=0 \xrightarrow{\Delta<0}$ ریشه ندارد.

مجموعه‌جواب $=(-\infty,-1]\cup[0,1]$

x	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$
x	−	−	+	+	
$x-1$	−	−	−	+	
$x+1$	−	+	+	+	
$x-2x+2$	+	+	+	+	
کل	−	+	−	+	
	ج		ج		

۸- $|\frac{x-1}{2}-1|\ge 3 \Rightarrow \frac{x-1}{2}-1\ge 3$ یا $\frac{x-1}{2}-1\le -3$

$\Rightarrow \frac{x-1}{2}\ge 4$ یا $\frac{x-1}{2}\le -2$

$\Rightarrow x-1\ge 8$ یا $x-1\le -4 \Rightarrow x\ge 9$ یا $x\le -3$

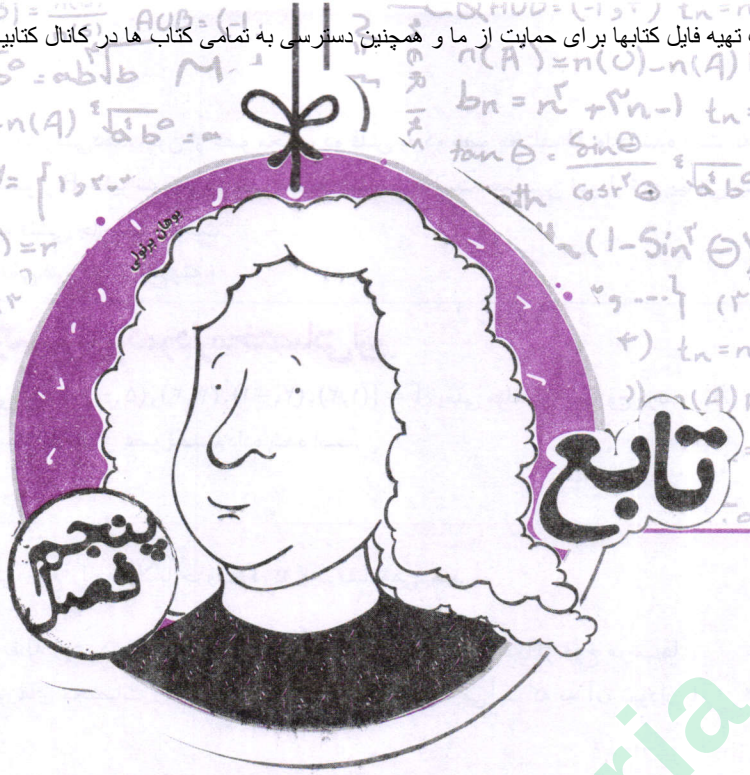
$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-\infty,-3]\cup[9,+\infty)$

۹- $\frac{3+12}{2}=\frac{15}{2}$ پس هر سه طرف را منهای $\frac{15}{2}$ می‌کنیم:

$3-\frac{15}{2}<x-\frac{15}{2}<12-\frac{15}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2}\le x-\frac{15}{2}<\frac{9}{2}$

$\Rightarrow |x-\frac{15}{2}|<\frac{9}{2}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria



فصل پنجم: تابع

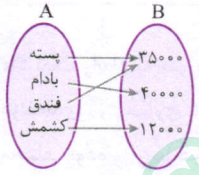
درس ۱ مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

مفهوم تابع

یک مغازه، قیمت فروش هر کیلو از خشکبارهای خود را به صورت زیر تعیین کرده است. آیا ممکن است هنگامی که یک کیلو پسته یا چیزهای دیگر خریداری می‌کنید، دو قیمت برای آن محاسبه شود؟ مسلماً پاسخ منفی است. **به عبارت دیگر هر نوع خشکبار، فقط یک قیمت دارد.**

نوع خشکبار	قیمت (تومان)
پسته	۳۵۰۰۰
بادام	۴۰۰۰۰
فندق	۳۵۰۰۰
کشمش	۱۲۰۰۰

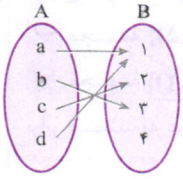
مجموعهٔ {کشمش , فندق , بادام , پسته} = A و مجموعهٔ {۳۵۰۰۰,۴۰۰۰۰,۱۲۰۰۰} = B را تعریف می‌کنیم. اطلاعات بالا را در یک نمودار پیکانی، به صورت زیر، رسم می‌کنیم. از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً یک پیکان به یکی از عضوهای مجموعهٔ B وارد می‌شود. به زبان دیگر، به هر عضو A، دقیقاً یکی از اعضای B نسبت داده می‌شود.



تذکر پسته و فندق هر دو دارای یک قیمت هستند و این مشکلی برای تابع ایجاد نمی‌کند. آن چیزی که در تابع‌بودن اهمیت دارد، این است که یک نوع خشکبار، چند قیمت مختلف ندارد؛ به عبارت دیگر از هر عضو A، دقیقاً یک پیکان خارج و به یکی از عضوهای B نظیر می‌شود.

تعریف تابع: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین دو مجموعهٔ A و B است که به هر عضو از مجموعهٔ A، دقیقاً یک عضو از مجموعهٔ B را نسبت می‌دهد (نظیر می‌کند).

مثال **آیا نمودار پیکانی مقابل یک تابع را نمایش می‌دهد؟**

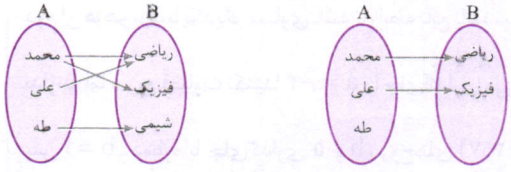


پاسخ نمودار پیکانی مقابل بین دو مجموعهٔ A و B، یک تابع را نمایش می‌دهد، چون از هر عضو A، دقیقاً یک پیکان خارج شده و دقیقاً یکی از اعضای B را به آن نسبت می‌دهد.

مورد داشتیم گفته آقا به عدد ۴ فلشی وارد نشده، پس چه‌جوری تابع میشه؟

ببین! تو تابع از هر عضو A (دقت کن همشون)، باید حتماً فلش خارج بشه ولی به بعضی از اعضای B ممکنه فلشی وارد نشه. این با تابع‌بودن مشکلی نداره.

مثال **آیا دو نمودار زیر تابع هستند؟**



(الف) (ب)

پاسخ نمودار پیکانی الف، علاقه‌مندی هر دانش‌آموز را به درس‌های دبیرستان نشان می‌دهد.

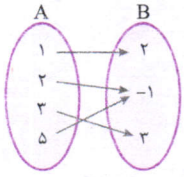
@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

این نمودار، یک تابع را نمایش نمی‌دهد، چون از عضو محمد، دو فلش به دو عضو مختلف B وارد شده است. به عبارت دیگر به یکی از عضوهای A، دقیقاً یک عضو از B نظیر نشده و دو عضو مختلف نظیر شده است. هم‌چنین نمودار تابع پیکانی ب نیز، یک تابع را نمایش نمی‌دهد، چون از عضو طه فلشی خارج نشده است.

(از همهٔ عضوهای A باید فلشی خارج بشه تا تابع بشه.)

نمایش زوج مرتب تابع و نمودار مختصاتی آن

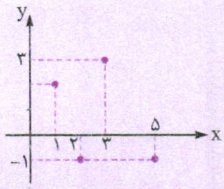


نمایش زوج مرتب تابع مقابل می‌شود: $f=\{(۱,۲),(۲,-۱),(۳,۳),(۵,-۱)\}$، یعنی مؤلفهٔ اول هر زوج مرتب از A و مؤلفهٔ دوم آن عددی از B است که به آن عضو نسبت داده شده است.

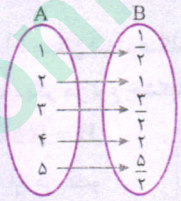
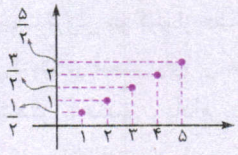
نکته

۱ در نمایش زوج مرتبی، تابع را معمولاً با حروف f، g و ... نشان می‌دهند.

۲ هر زوج مرتب، یک نقطه روی دستگاه محورهای مختصات را مشخص می‌کند. اگر زوج مرتب‌های تابع f را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنیم، نمودار مقابل به دست می‌آید که به آن نمودار یا جدول تابع گفته می‌شود.



مثال در جدول زیر، نمایش‌های مختلف یک رابطه، داده شده است.

توصیف رابطه	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	نمودار مختصاتی
رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی و کم‌تر از ۶، نصف آن را نسبت می‌دهد.		$f=\{(۱,\frac{۱}{۲}),(۲,۱),(۳,\frac{۳}{۲}),(۴,۲),(۵,\frac{۵}{۲})\}$	

هر عضو A، دقیقاً به یک عضو B می‌رود، پس تابع است. در نمایش زوج مرتب آن نیز، مؤلفه‌های اول، با هم متفاوت‌اند.

تابع‌بودن مجموعه زوج‌های مرتب

«اگر یک رابطه به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی تابع است که مؤلفه‌های اول همگی متفاوت باشند *(حالا مؤلفه‌های دوم مساوی باشن یا نباشن اهمیتی نداره)* یا اگر زوج مرتب‌هایی، مؤلفه‌های اول مساوی داشتند، مؤلفه‌های دوم آن‌ها نمی‌تواند مختلف بوده و آن‌ها هم باید با هم برابر باشند.

مثال مشخص کنید کدام مجموعه، تابع است؟

الف) $\{(-۱,۴),(۲,۰),(۳,۵),(۷,۲)\}$ ب) $\{(۲,۵),(۳,۵),(-۱,۵)\}$ پ) $\{(۳,۱),(۴,۲),(-۱,۱),(۳,۲)\}$

پاسخ الف) مجموعهٔ $\{(-۱,۴),(۲,۰),(۳,۵),(۷,۲)\}$ تابع است، چون همهٔ مؤلفه‌های اول متفاوت‌اند.

ب) مجموعهٔ $\{(۲,۵),(۳,۵),(-۱,۵)\}$ تابع است، چون همهٔ مؤلفه‌های اول متفاوت‌اند. *(گفتیم y ها مساوی باشن مهم نیست.)*

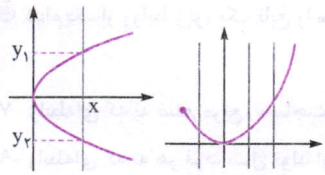
پ) مجموعهٔ $\{(۳,۱),(۴,۲),(-۱,۱),(۳,۲)\}$ تابع نیست، چون مؤلفهٔ اول دو زوج مرتبِ مشخص‌شده، مساوی‌اند، ولی مؤلفهٔ دوم آن‌ها برابر نیستند. به عبارت دیگر، در نمایش نمودار پیکانی از $۳\in A$، دو پیکان به عضوهای $۱,۲\in B$ وارد می‌شود.

مثال رابطهٔ $\{(a+b,c),(-۲,۷),(۳,-۲),(a,۱),(۳,a+۱),(-۳,b)\}$ تابع است. a، b و c را به دست آورید.

پاسخ دنبال زوج مرتب‌هایی باشید که مؤلفهٔ اول مساوی دارند. دو زوج $(۳,-۲)$ و $(۳,a+۱)$ مؤلفه‌های اولِ مساوی دارند، پس مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم باید با یکدیگر مساوی باشد تا رابطه تابع باشد، پس $a+۱=-۲$ و لذا $a=-۳$. ظاهراً هیچ دو زوج مرتب دیگری، مؤلفهٔ اول مساوی ندارند، اما سریع قضاوت نکنید! $a=-۳$ را جای‌گذاری می‌کنیم. حالا دو زوج مرتب $(-۳,b)$ و $(\overset{-۳}{a},۱)$ مؤلفه‌های اول مساوی پیدا می‌کنند، پس $b=۱$. دوباره با جای‌گذاری a و b، زوج‌های $(-۲,۷)$ و $(\overset{-۲}{a+b},c)$ مؤلفه‌های اول مساوی پیدا می‌کنند، پس $c=۷$ خواهد بود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

تابع بودن نمودار



(الف) (ب)

به دو نمودار مقابل، توجه کنید. نمودار الف، نمودار یک تابع نمی‌تواند باشد، چون یک x خاص (مؤلفهٔ اول) دو y مختلف دارد، اما در نمودار ب، هر x در بخش‌هایی که نمودار وجود دارد، فقط یک y دارد و لذا نمودار یک تابع می‌تواند باشد.

نمودار یک رابطه، وقتی نمودار تابع است که هر خط عمودی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند. *(یعنی قطع نکنه یا اگه قطع کرد، تو یه نقطه قطع کنه، نه بیشتر)*

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ یک نمایش خاص تابع، داده شده و نمایش دیگری از شما خواسته می‌شود. حواستان باشد که تابع را می‌توانیم به صورت‌های زیر نمایش دهیم:

۱- نمایش پیکانی (نمودار ون) ۲- نمایش زوج مرتبی ۳- نمودار مختصاتی

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱ تا ۶

تیپ۲ معمولاً به صورت صحیح و غلط مطرح می‌شود. *گفته که آیا ارتباط بین دو پدیده (x و y) تابع هست یا نه؟* باید ببینید به ازای هر x فقط یک y وجود دارد یا نه. هم‌چنین ممکن است تابع‌بودن یک نمودار پرسیده شده باشد.

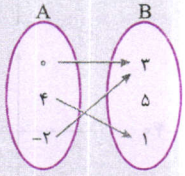
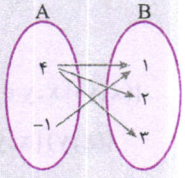
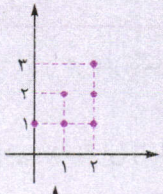
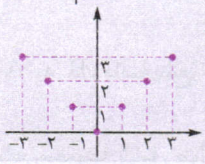
حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۷ تا ۲۰ و ۳۱ تا ۴۰

تیپ۳ مهم‌ترین تیپ همین هست. زوج مرتب‌هایی داده شده و پرسیده تابع هست یا نه یا این‌که کاری کنید که تابع شود. برای قسمت دوم باید مؤلفه دوم (y) زوج‌هایی که xهای یکسانی دارند را مساوی قرار دهید و در پایان جواب‌ها را کنترل کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۲۱ تا ۳۰ و ۴۱ تا ۴۶

سؤال‌های امتحانی

در هر سطر، نمایش‌های مختلف رابطه را کامل نموده و مشخص کنید تابع می‌باشد یا خیر؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

شماره سؤال	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	نمودار مختصاتی	تابع است یا خیر؟
۱-				
۲-				
۳-		$\{(۲,۱),(۳,-۱),(۳,۴)\}$		
۴-		$\{(۲,۲),(۱,۱),(-۱,-۱),(۴,۲)\}$		
۵-				
۶-				

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

کدام‌یک از روابط زیر، یک تابع را معلوم می‌کند؟ توضیح دهید (پدیده‌ای که اول ذکر شده، مؤلفهٔ اول یا مجموعهٔ A است).

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۷- رابطه‌ای که به ضلع مربع، مساحت آن را نسبت می‌دهد.

۸- رابطه‌ای که به هر فرد در یک زمان مشخص، وزن او را نسبت می‌دهد.

۹- رابطه‌ای که به هر فرد، سال تولد او را نسبت می‌دهد.

۱۰- رابطه‌ای که به هر عدد مثبت، ریشهٔ دوم آن را نسبت می‌دهد.

۱۱- رابطه‌ای که به هر عدد، ریشهٔ سوم آن را نسبت می‌دهد.

۱۲- رابطه‌ای که به هر فرد، رنگ پوست او را نسبت می‌دهد.

۱۳- رابطهٔ بین هر فرد و افرادی که آن‌ها را دوست دارد.

۱۴- رابطه‌ای که به هر روز، میزان بارندگی در پایان روز را نسبت می‌دهد.

۱۵- رابطهٔ بین هر چند متر نخ و مساحت مربعی که می‌توان با آن ساخت.

۱۶- رابطهٔ بین هر فرد و والدین او

۱۷- رابطه‌ای که به هر تلفن همراه، افراد دفترچهٔ تلفن آن را نسبت می‌دهد.

۱۸- رابطه‌ای که به هر ساختمان، تعداد طبقات آن را نسبت می‌دهد.

۱۹- رابطه‌ای که به هر خودرو، رنگ آن را نسبت می‌دهد.

۲۰- رابطه‌ای که به هر ماه ،تعداد روزهای آن را نسبت می‌دهد.

کدام‌یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟

۲۱- $\{(۲,۲),(-۱,-۱),(\frac{۱}{۳},\sqrt{۲}),(۰,۰)\}$

۲۲- $\{(۳,۲),(\frac{۳}{۵},-\frac{۷}{۴}),(\frac{۶}{۲},۴)\}$

۲۳- $\{(۲,۳),(۰,-۶),(۰,-\frac{۱۲}{۲}),(۲,\frac{۶}{۲})\}$

۲۴- $\{(a,۱),(b,۳),(a,-۲),(b,۴)\}$

در هر قسمت، a، b و c را به گونه‌ای مشخص کنید که رابطهٔ داده‌شده، تابع باشد. *(برگرفته از امتحانات مدارس)*

۲۵- $\{(\frac{۳}{۵},-۱),(۰,a),(\frac{۳}{۵},b-۱),(۰,۱)\}$

۲۶- $\{(۳,a-b),(۷,a+b),(\frac{۶}{۲},۴),(\sqrt{۴۹},-۱)\}$

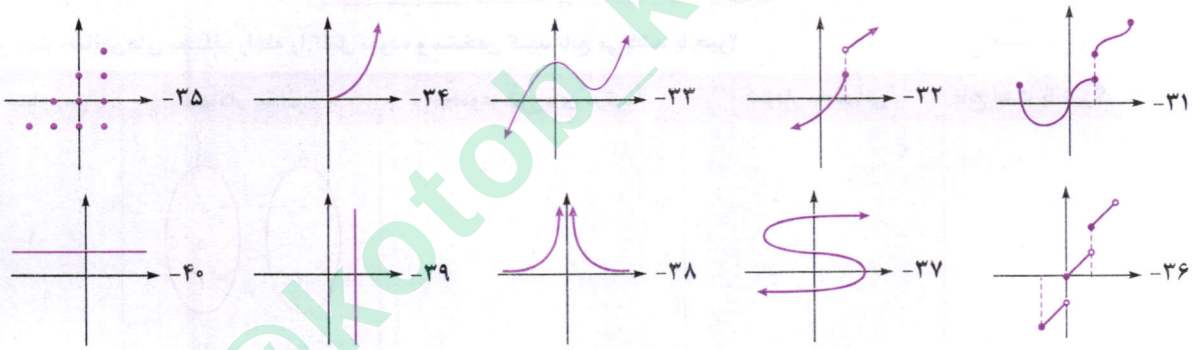
۲۷- $\{(a-۱,۲),(۵,a-۲),(a-۲,b+۱),(۳,۵),(۵,۳)\}$

۲۸- $\{(-۴,۱),(-۲,۱),(a+۱,۵),(a+۲,b+۱),(-۲,a+۵),(۱,-۲),(b+۱,c)\}$

۲۹- $\{(\frac{۱}{۲},a^۲),(a,۵),(\frac{۱}{۲},۴),(۲,-۱)\}$

۳۰- $\{(-۳,a^۲+۱),(a,۱),(-۳,۵),(-۲,۳),(۲,b+۱)\}$

کدام‌یک از نمودارهای زیر، نمودار تابع است؟



عضوهای مجموعه زوج مرتب‌های زیر را بنویسید و مشخص کنید تابع هستند یا نه؟

۴۱- $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{N},x+۲y=۸\}$

۴۲- $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z},|x|+|y|=۲\}$

۴۳- $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z},x^۲+y^۲=۴\}$

۴۴- $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z},x+y\le ۲\}$

۴۵- $x=\sin y^\circ$

۴۶- $|x+۱|+(y-۱)^۲=۰$

درس ۲ دامنه و برد توابع

تابع $\{(-۱,۲),(۳,۵),(۱,۲),(۴,۳)\}$ را در نظر بگیرید. مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تابع را **دامنهٔ تابع** و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم را **برد تابع** می‌نامیم، بنابراین:

دامنهٔ تابع $=\{-۱,۳,۱,۴\}$ برد تابع $=\{۲,۵,۳\}$

توجه اگر تابع را با f نمایش دهیم، دامنهٔ آن را با D_f و برد آن را با R_f نیز نمایش می‌دهند.

نکته

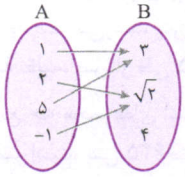
۱ در نمودار پیکانی از A به B، دامنهٔ تابع، همان مجموعهٔ A و برد تابع، عضوهایی از مجموعهٔ B است که به آن‌ها فلش وارد شده است.

۲ در نمودار مختصاتی تابع مجموعهٔ شامل طول (x) نقطه‌ها، دامنهٔ تابع و مجموعهٔ شامل عرض (y) نقطه‌ها، همان برد تابع است.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

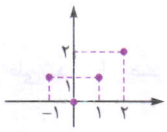
مثال دامنه و برد هر تابع را بنویسید.

الف)



ب) $\{(\frac{۳}{۵},-۱),(\sqrt{۳},-۱),(\pi,-۱)\}$

پ)



پاسخ

الف) دامنه $= \{۱,۲,۵,-۱\} = A$

برد $= \{۳,\sqrt{۲}\}$

(اونایی که فلش بهشون رفته)

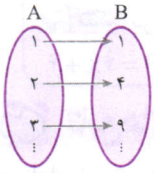
ب) دامنه $= \{\frac{۳}{۵},\sqrt{۳},\pi\}$

برد $= \{-۱\}$

پ) دامنه $= \{-۱,۰,۱,۲\}$ (همون x نقطه‌ها)

برد $= \{۰,۱,۲\}$ (همون y نقطه‌ها)

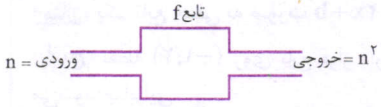
نمایش جبری تابع



مربع‌هایی که اضلاع آن‌ها ۱، ۲، ۳ و ... هستند را در نظر بگیرید. مساحت هر کدام از آن‌ها به ترتیب برابر ۱، ۴، ۹ و ... خواهد بود. می‌توانیم تابع مقابل که طول هر ضلع مربع را به مساحت آن نظیر می‌کند، در نظر بگیریم. نمودار زوج مرتب این تابع نیز می‌شود: $f = \{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۹),(۴,۱۶),\ldots\}$.

نمایش جبری: اگر ضلع مربع را n در نظر بگیریم، مساحت آن $n^۲$ می‌شود. به جای نمایش‌های بالا برای تابع f، می‌نویسیم: $f(n) = n^۲$، مثلاً $f(۱) = ۱^۲ = ۱$، $f(۲) = ۲^۲ = ۴$، $f(۳) = ۳^۲ = ۹$ و ... ، یعنی اگر به جای n در سمت چپ، هر عددی قرار دهیم، در سمت راست نیز همان عدد را قرار داده و حاصل را به دست می‌آوریم. این‌گونه نمایش تابع را، نمایش جبری می‌نامند. برای مشخص‌کردن تابع f به صورت جبری، باید به دامنه و برد آن هم توجه کنیم.

تابع به عنوان ماشین: می‌توان به تابع f، به صورت یک دستگاه یا ماشین توجه کرد که ورودی را گرفته و بعد از انجام برخی عملیات، یک خروجی ارائه می‌دهد؛ مثلاً ماشین f، ورودی $n = ۲$ را می‌گیرد و خروجی $n^۲ = ۴$ را ارائه می‌کند.



نکته

اگر زوج مرتب (x,y) عضو تابع f باشد، در نمایش جبری تابع، $f(x) = y$ خواهد بود. مثلاً اگر $(-۲,۵) \in f$ باشد، $f(-۲) = ۵$ یا اگر $f(۳) = ۱$ باشد، $(۳,۱) \in f$. در نمایش پیکانی نیز $۵ \leftarrow -۲$ و $۱ \leftarrow ۳$ وجود دارند؛ به عبارت دیگر اگر -۲ را به عنوان ورودی به تابع f بدهید، خروجی ۵ و اگر ۳ را به عنوان ورودی بدهیم، خروجی ۱ خواهد داد.

توجه نمایش جبری تابع $f(n) = n^۲$ با $f(x) = x^۲$ با $f(a) = a^۲$ هیچ تفاوتی نمی‌کند؛ به عبارت دیگر، این‌که ورودی (یا متغیر) با چه حرفی نمایش داده شود، مهم نیست.

مثال اگر $f(n) = ۲n + ۱$، $g(x) = x^۲ - ۱$ و $h(t) = t^۲ - ۳t + ۱$ باشد، حاصل $f(۱)$، $g(۲)$ و $h(۳)$ را به دست آورید.

پاسخ

$f(۱) = ۲(۱) + ۱ = ۳$, $g(۲) = ۲^۲ - ۱ = ۳$, $h(۳) = ۳^۲ - ۳(۳) + ۱ = ۹ - ۹ + ۱ = ۱$

مثال نمایش جبری هر تابع را نوشته و دامنه را مشخص کنید.

الف) $f = \{(۱,\frac{۱}{۲}),(۲,۱),(۳,\frac{۳}{۲}),\ldots\}$

ب) $f = \{(۱,۰),(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳)\}$

پاسخ الف) مؤلفه‌های دوم، نصف مؤلفه‌های اول هستند، پس اگر مؤلفه‌های اول (یا ورودی‌ها) را n بگیریم، مؤلفه‌های دوم (یا خروجی‌ها) $\frac{n}{۲}$ می‌شود. نمایش جبری تابع می‌شود: $f(n) = \frac{n}{۲}$. دامنهٔ تابع، اعداد طبیعی است، پس n عددی طبیعی است $(n \in \mathbb{N})$.

ب) مؤلفه‌های دوم، یک واحد از مؤلفه‌های اول کم‌تر هستند، پس نمایش جبری تابع می‌شود: $f(n) = n - ۱$. دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ است، پس $n = ۱,۲,۳,۴$. می‌توانستید تابع را به صورت $f(x) = x - ۱$ که $x = ۱,۲,۳,۴$ است نیز بنویسید، چون این دو نمایش جبری، هیچ تفاوتی با هم ندارند.

مثال گنجایش مخزن یک وسیلهٔ نقلیه، ۵۰ لیتر است. باک این وسیله پر از بنزین است. اگر این وسیلهٔ نقلیه d کیلومتر را طی کند، مقدار بنزین باقی‌مانده در مخزن از رابطهٔ $-۰/۰۸d + ۵۰$ به دست می‌آید. چند سؤال را با هم بررسی می‌کنیم:

الف) می‌خواهیم تابعی بنویسیم که میزان بنزین باقی‌مانده در مخزن را پس از طی d کیلومتر نشان دهد. به عبارت دیگر، d را به عنوان ورودی گرفته و بنزین باقی‌مانده، یعنی $-۰/۰۸d + ۵۰$ را به عنوان خروجی ارائه کند، بنابراین نمایش جبری تابع می‌شود:

$f(d) = -۰/۰۸d + ۵۰$

ب) $f(۰)$، نشان‌دهندهٔ چیست؟ $f(۰) = ۵۰$، یعنی اگر وسیلهٔ نقلیه هیچ مسافتی را طی نکند، بنزین باقی‌مانده، همان ۵۰ لیتر است.

پ) اگر $d = ۱۰۰$ قرار دهیم، تعبیر خروجی به دست آمده چیست؟ داریم: $f(۱۰۰) = \frac{-۸}{۱۰۰}(۱۰۰) + ۵۰ = ۴۲$

خروجی، همان بنزین باقی‌مانده است، یعنی پس از طی ۱۰۰ کیلومتر، ۴۲ لیتر بنزین، در باک باقی مانده است.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

ت پس از طی چه مسافتی، بنزین وسیلهٔ نقلیه، تمام می‌شود؟ می‌خواهیم ببینیم پس از طی چه مسافتی، مقدار بنزین باقی‌مانده یعنی $-۰/۰۸d+۵۰$ به صفر می‌رسد، پس:

$$-۰/۰۸d+۵۰=۰ \Rightarrow d=\frac{-۵۰}{-۰/۰۸}=۶۲۵$$

یعنی بنزین وسیلهٔ نقلیه، پس از طی ۶۲۵ کیلومتر تمام می‌شود.

ث دامنهٔ این تابع چه مجموعه‌ای است؟ برای تعیین دامنه باید حدود d را مشخص کنیم. حداقل مسیر طی‌شده برابر صفر و حداکثر مسیر ۶۲۵ کیلومتر است، پس $۰ \le d \le ۶۲۵$، یعنی دامنهٔ تابع بازهٔ $[۰,۶۲۵]$ خواهد بود.

مثال **طول مستطیلی، دو واحد از عرض مستطیل بزرگ‌تر است. محیط مستطیل را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بنویسید.**

پاسخ عرض مستطیل را x در نظر می‌گیریم. طول مستطیل دو واحد بزرگ‌تر است، پس طول مستطیل می‌شود: $x+۲$.

محیط مستطیل، دو برابر مجموع طول و عرض است، پس: $\text{محیط مستطیل}=f(x)=۲(x+x+۲)=۲(۲x+۲)=۴x+۴$

توجه دارید که x عرض مستطیل است، بنابراین عدد صفر یا منفی نمی‌تواند باشد. دامنهٔ تابع، همهٔ اعداد مثبت خواهد بود.

تذکر در برخی از مواقع محیط را با P نمایش می‌دهیم. می‌توانستیم تابع بالا را به صورت $P(x)=۴x+۴$ یا حتی ساده‌تر به صورت $P=۴x+۴$ نیز نمایش دهیم.

تابع‌های خطی

هر رابطه به صورت $y=ax+b$، یک رابطهٔ خطی بین x و y (یا یک تابع) است.

۱) a همان شیب خط و b، عرض از مبدأ خط است.

۲) برای رسم نمودار تابع‌های خطی، کافی است دو نقطه از آن را به دست آوریم. پس به جای x، دو عدد مختلف قرار داده و y آن‌ها را به دست می‌آوریم.

۳) اگر خط یا تابع خطی از نقطهٔ (a,b) عبور کند، می‌توانیم a را به جای x و b را به جای y یا $f(x)$ در معادلهٔ خط یا نمایش جبری تابع جای‌گذاری کنیم.

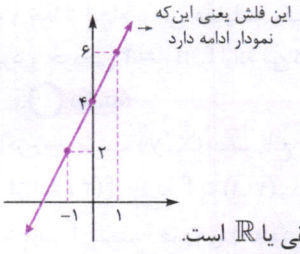
مثال **یک تابع خطی به صورت $f(x)=۲x+b$ از نقطهٔ $(-۱,۲)$ عبور می‌کند. b را به دست آورده و نمودار تابع را رسم کنید.**

پاسخ نقطهٔ $(-۱,۲)$ روی تابع قرار دارد، یعنی اگر $x=-۱$ قرار دهیم، y یا $f(x)$ برابر با ۲ می‌شود؛ بنابراین:

$$f(-۱)=۲ \Rightarrow -۲+b=۲ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow f(x)=۲x+۴$$

$$x=۰ \Rightarrow f(۰)=۴ \Rightarrow (۰,۴) \text{ نقطهٔ}$$

$$x=۱ \Rightarrow f(۱)=۶ \Rightarrow (۱,۶) \text{ نقطهٔ}$$



توجه دارید که همهٔ اعداد حقیقی را می‌توانیم به جای x ها قرار دهیم، پس دامنهٔ تابع، برابر همهٔ اعداد حقیقی یا $\mathbb{R}$ است.

مثال **در تابع خطی f داریم: $f(۱)=-۱$ و $f(۲)=۱$. نمایش جبری تابع را بنویسید.**

پاسخ نمایش جبری هر تابع خطی به صورت $f(x)=ax+b$ است. با جای‌گذاری و استفاده از حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، a و b را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(۱)=-۱ \Rightarrow a(۱)+b=-۱ \\ f(۲)=۱ \Rightarrow a(۲)+b=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-۱ \\ ۲a+b=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲a-۲b=۲ \\ ۲a+b=۱ \end{cases}$$

$$-b=۳ \Rightarrow b=-۳ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow f(x)=۲x-۳ \text{ یا } y=۲x-۳$$

مثال **فرض کنید، دما در سطح زمین، ۲۴° بوده و به ازای هر دو کیلومتر که به طرف بالا حرکت کنیم، دما یک درجه کاهش بیابد. جدول زیر، دما را در ارتفاع‌های مختلف نشان می‌دهد.**

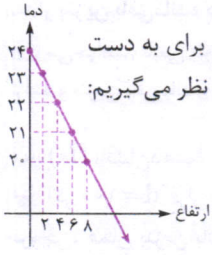
ارتفاع (کیلومتر) x	۰	۲	۴	۶	۸	...
دما (درجه) f(x)	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	

الف) این نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کرده و معادلهٔ آن را بنویسید.

ب) دمای هوا در ۶۰ کیلومتری از سطح زمین چه‌قدر است؟

پ) در چه ارتفاعی از سطح زمین، دمای هوا صفر درجه است؟

پاسخ **الف** این نقاط را روی دستگاه مشخص کرده و به هم وصل می‌کنیم. همهٔ آن‌ها روی یک خط قرار دارند. برای به دست آوردن معادلهٔ این تابع (خط) کافی است از دو نقطهٔ آن استفاده کنیم. تابع خطی را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم:



$$\begin{cases} f(۰)=۲۴ \Rightarrow b=۲۴ \\ f(۲)=۲۳ \Rightarrow ۲a+b=۲۳ \Rightarrow ۲a+۲۴=۲۳ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۲۴ \end{cases}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

ب برای به دست آوردن دما در ارتفاع ۶۰ کیلومتری، کافی است $x = ۶۰$ را در معادله قرار دهیم:

$f(۶۰) = -\frac{۱}{۲}(۶۰) + ۲۴ = -۶^\circ \Rightarrow$ دما در ارتفاع ۶۰ کیلومتری، برابر -۶° است.

پ x همان ارتفاع و $f(x)$ دمای هوا در آن ارتفاع است. برای این‌که ارتفاعی که دما در آن صفر است را به دست آوریم، کافی است $f(x) = ۰$ قرار دهیم، پس:

$-\frac{۱}{۲}(x) + ۲۴ = ۰ \Rightarrow ۲۴ = \frac{۱}{۲}x \Rightarrow x = ۴۸$ یعنی در ارتفاع ۴۸ کیلومتری، دما صفر است.

مثال $f(x) = ۲x + ۱$ و $g(x) = \frac{x}{۴} - ۱$ دو تابع خطی هستند. حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف) $f(۰) + g(۴)$ ب) $۲f(۲) - ۳g(۸)$ پ) $f(g(-۴))$

پاسخ

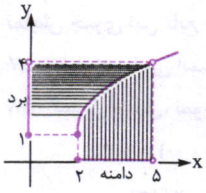
الف $f(۰) + g(۴) = \underbrace{۲(۰)+۱}_{} + \underbrace{\frac{۴}{۴} - ۱}_{} = ۱ + ۰ = ۱$

ب $۲f(۲) - ۳g(۸) = ۲(\underbrace{۲(۲)+۱}_{۵}) - ۳(\underbrace{\frac{۸}{۴} - ۱}_{۱}) = ۱۰ - ۳ = ۷$

پ ابتدا $g(-۴)$ را به دست می‌آوریم: $g(-۴) = \frac{-۴}{۴} - ۱ = -۲$.

حالا -۲ وارد f می‌شود، یعنی: $f(-۲) = -۳$ و لذا: $f(g(-۴)) = -۳$

به‌دست‌آوردن دامنه و برد از روی نمودار تابع



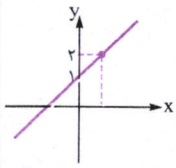
دامنه: در نمودار تابع، مؤلفه‌های اول، همان طول (x) نقاط، خواهند بود. بنابراین برای به دست آوردن دامنه از روی نمودار، کافی است x نقطه‌ها را به دست آوریم. به عبارت دیگر، نمودار را روی محور xها تصویر می‌کنیم. مثلاً دامنهٔ تابع مقابل، بازهٔ $[۲,۵]$ است.

برد: با تصویر نمودار، روی محور yها، برد به دست می‌آید. مثلاً برد تابع بالا بازهٔ $[۱,۴]$ می‌شود.

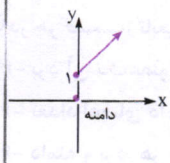
مثال نمودار تابع $f(x) = x + ۱$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید.

الف) $\mathbb{R}$ ب) $[۰,+\infty)$ پ) $(-\infty,۰)$ ت) $[-۱,۱]$

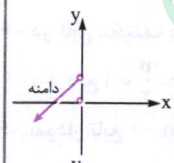
پاسخ



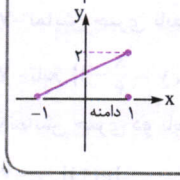
الف نمودار تابع $f(x) = x + ۱$ با دامنهٔ کل اعداد حقیقی یا $\mathbb{R}$. با نقطه‌یابی داریم: $f(۱) = ۲$ و $f(۰) = ۱$.
چون دامنه $\mathbb{R}$ است، کل نمودار خط، قابل قبول است.



ب نمودار $f(x) = x + ۱$ با دامنهٔ اعداد حقیقی مثبت یا صفر. چون دامنه، بازهٔ $[۰,+\infty)$ است، فقط قسمت‌هایی از نمودار الف، قابل قبول است که در آن، x نقاط مثبت یا صفر باشد.



پ نمودار $f(x) = x + ۱$ با دامنهٔ اعداد حقیقی منفی. چون دامنه بازهٔ $(-\infty,۰)$ است، فقط قسمت‌هایی از نمودار الف، قابل قبول است که x نقاط منفی هستند، یعنی سمت چپ نمودار الف و در $x = ۰$ هم نمودار توخالی است.



ت نمودار $f(x) = x + ۱$ با دامنهٔ $[-۱,۱]$. فقط قسمت‌هایی از نمودار الف قابل قبول است که x نقاط بین $-۱ \le x \le ۱$ باشد.

توجه کنید که فلش‌هایی که در نمودار قرار داده‌ایم، به این معنی است که نمودار از همان طرف ادامه دارد.

در امتحان چه خبر؟

تیپ۱ به دست آوردن دامنه و برد از روی نمایش‌های مختلف تابع هست. دامنه همان ورودی‌ها (x) و برد همان خروجی‌ها است (y).

حالا تو حل کن سؤال‌های ۴۷ تا ۷۰ و ۱۰۲ تا ۱۱۲

تیپ۲ نوشتن ضابطهٔ تابع خطی، به دست آوردن مقدار تابع در نقاط مختلف، رسم تابع با دامنه‌های مختلف

حالا تو حل کن سؤال‌های ۷۱ تا ۱۰۱

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤال‌های امتحانی

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۴۷- برد تابع $\{(0,4),(\frac{0}{5},2^2),(-1,\frac{8}{2})\}$ دارای ..... عضو است.

۴۸- تابعی که دامنهٔ آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد، وجود ..... .

۴۹- تعداد عضوهای دامنهٔ تابع همواره ..... تعداد عضوهای برد تابع است.

۵۰- مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ تابع را ..... تابع می‌نامند.

۵۱- معادلهٔ تابعی که شمارهٔ شکل را گرفته و تعداد دایره‌ها را ارائه می‌کند، ..... است.

۵۲- خط‌های عمودی با معادلهٔ $x = k$ را ..... به عنوان تابع در نظر گرفت.

۵۳- اگر $g(-1) = 5$ باشد، در این صورت زوج مرتب ..... عضو تابع g است.

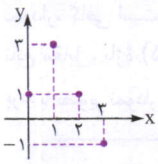
۵۴- اگر $(2,-1) \in f$ باشد، در این صورت $f(\cdots\cdots) = \cdots\cdots$.

۵۵- اگر x طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، نمایش جبری تابع محیط، نسبت به ضلع می‌شود: ..... .

۵۶- سهند در هر دقیقه پیاده‌روی، مسافت ۰/۱ کیلومتر را طی می‌کند. اگر مسافتی که سهند در t دقیقه طی می‌کند را با $f(t)$ نمایش دهیم، نمایش جبری این تابع به صورت ..... است.

۵۷- تابع g، تابعی است که $g(0) = 2$ ، $g(-1) = 2$ و $g(2) = -1$. در این صورت $g = \{\cdots\cdots,\cdots\cdots,\cdots\cdots\}$.

۵۸- نمودار مقابل، نمودار تابع f است. در این صورت:



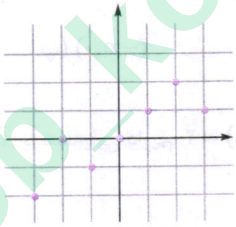
$f(0) = \cdots\cdots$ $\quad f(1) = \cdots\cdots$ $\quad f(\cdots\cdots) = 1$ $\quad f(\cdots\cdots) = -1$

$f(1) + f(2) = \cdots\cdots$ $\quad f(2) \times f(3) = \cdots\cdots$ $\quad \frac{\Delta f(1)}{f(0)} = \cdots\cdots$ $\quad 2f(1) - 3f(2) = \cdots\cdots$

دامنهٔ هر تابع را مشخص کنید. توابع ۶۰ و ۶۱ را با زوج‌های مرتب نمایش دهید.

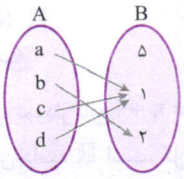
۵۹- $f = \{(3,5),(-1,4),(2,2),(-2,4$

۶۰-



۶۱- تابعی که اعداد طبیعی فرد را به صفر و اعداد طبیعی زوج را به یک نسبت می‌دهد.

۶۲-



در هر قسمت، تابعی با شرایط خواسته‌شده مثال بزنید.

۶۳- برد آن تک‌عضوی باشد. (با نمودار پیکانی)

۶۴- تعداد اعضای دامنه و برد مساوی باشند. (با زوج‌های مرتب)

۶۵- دامنه و برد، هر دو نامتناهی باشند. (با زوج‌های مرتب)

۶۶- همهٔ اعداد طبیعی را به صفر نسبت دهد. (با نمایش جبری)

۶۷- دو تابع مختلف بنویسید که دامنه‌های آن‌ها با هم و بردشان نیز با هم مساوی باشند.

۶۸- برد تابع $g(n) = \frac{n}{2} - 1$ که n اعداد طبیعی زوج است را به دست آورید.

۶۹- نمودار تابع $f(n) = 2n - 1$ با دامنهٔ اعداد طبیعی زوج را رسم کنید.

۷۰- نمایش جبری تابعی را بنویسید که دامنهٔ آن اعداد طبیعی فرد ولی برد آن اعداد طبیعی زوج باشد.

۷۱- تابع $f = \{(x,y) \mid x = 1,2,3 , y = \frac{x}{2} - 1\}$ را با زوج‌های مرتب نمایش دهید.

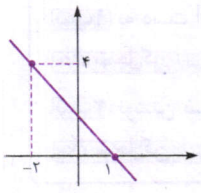
نمایش جبری دو تابع به صورت $g(x) = \frac{x}{2} - 5$ و $f(x) = 2x + 5$ است. حاصل هر قسمت را بیابید.

۷۲- $|g(2)|$ $\quad$ ۷۳- $\frac{g(6)}{2} \times f(\frac{1}{2})$ $\quad$ ۷۴- $\frac{g(0)}{2f(3) - f(4)}$

۷۵- $f(g(2))$ $\quad$ ۷۶- $g(f(\frac{1}{4}))$ $\quad$ ۷۷- $g(2f(1))$

۷۸- نمایش جبری تابع خطی f را به صورتی به دست آورید که $f(1) = 5$ و $f(-1) = 3$.

۷۹- ضابطهٔ تابع خطی مقابل را به دست آورید.



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۸۰- معادله‌ای برای هر یک از توابع خطی زیر که از نقطه‌های داده‌شده عبور می‌کند بنویسید.

الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۷	۱۰	۱۳

ب)

x	−۲	۰	۲	۴	۶
y	−۳	−۲	−۱	۰	۱

تابع $g(x) = x + ۳$ را با دامنهٔ $\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$ در نظر بگیرید.

۸۱- مقدار a را از تساوی $g(a) = g(-۱) + g(۰)$ به دست آورید.

۸۲- مقدار m را از تساوی $g(m) + g(۲m) = ۹$ به دست آورید.

تابع خطی $f(x) = -۲x + ۱$ را با دامنه‌های زیر رسم کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۳- $\mathbb{R}$ ۸۴- اعداد حقیقی مثبت ۸۵- $(-\infty,۰]$

۸۶- $[-۱,۲)$ ۸۷- $(-\infty,۱]$ ۸۸- $\{-۱,۰,۱,۲\}$

تابع خطی $f(x) = x + ۲$ را با بردهای زیر رسم کرده و دامنه را در هر قسمت مشخص کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۹- $\mathbb{R}$ ۹۰- اعداد حقیقی مثبت ۹۱- اعداد حقیقی منفی

۹۲- $[-۱,۲]$ ۹۳- $[۳,+\infty)$ ۹۴- $\{-۱,۰,۱\}$

تابع‌های $f(x) = ۲x$ و $g(x) = ۳x - ۱$ و اعداد حقیقی دلخواه b و a را در نظر بگیرید. کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

۹۵- $f(ab) = f(a)f(b)$ ۹۶- $f(a+b) = f(a)+f(b)$

۹۷- $g(ab) = g(a)g(b)$ ۹۸- $g(a+b) = g(a)+g(b)$

۹۹- اتومبیلی با ۵ لیتر بنزین، ۷۵ کیلومتر را طی می‌کند. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) جدول زیر را تکمیل کرده و با استفاده از آن رابطهٔ خطی، بین کیلومتر طی‌شده (y) و بنزین مصرفی (x) را به دست آورید.

ب) این اتومبیل با ۳۶ لیتر بنزین، چه مسافتی را می‌تواند طی کند؟

پ) برای طی مسافت ۳۲۵ کیلومتر، چند لیتر بنزین مصرف می‌شود؟

ت) اگر گنجایش باک اتومبیل ۴۰ لیتر باشد، دامنهٔ تابع چه بازه‌ای خواهد بود؟

بنزین مصرفی x	۰	۵	۱۰	۱۵
کیلومتر طی‌شده y	۰	۷۵	...	...

۱۰۰- تاکسی‌متر یک تاکسی به این صورت کار می‌کند که مبلغ ۲۰۰ تومان را به عنوان ورودی گرفته و هر ۱ کیلومتر که تاکسی طی کند، مبلغ ۷۵ تومان کرایه در نظر می‌گیرد.

الف) جدول زیر را تکمیل کرده و رابطهٔ خطی، بین کیلومتر طی‌شده (x) و مبلغ کرایه را به دست آورید.

کیلومتر طی‌شده x	۰	۱	۲	۱۰	x
کرایهٔ تاکسی y	۲۰۰	۲۷۵	...	...	...

ب) اگر تاکسی برای رسیدن به مقصد یک مسافر، ۲۷ کیلومتر را طی کرده باشد، کرایهٔ مسافر چه‌قدر خواهد بود؟

پ) با ۱۸۰۰ تومان، حدوداً چه مسافتی را می‌توان با تاکسی طی کرد؟

ت) نمودار تابع را رسم کرده و دامنهٔ آن را مشخص کنید.

۱۰۱- جدول زیر، ارتفاع یک بالون را در ساعت‌های مختلف نشان می‌دهد.

زمان (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۶	۷	۸
ارتفاع	۰	۵۰	۸۰	۸۰	۹۰	۹۰	۴۰	۰

الف) این نقطه‌ها را روی دستگاه مشخص کرده و با پاره‌خط به هم وصل کنید.

ب) آیا ارتفاع نسبت به زمان یک تابع است؟ چرا؟

پ) دامنه و برد تابع را بنویسید.

ت) این بالن در چه ساعت‌هایی در حال افزایش ارتفاع بوده است؟

ث) این بالن در چه ساعت‌هایی در یک ارتفاع ثابت بوده است؟

ج) این بالن یک ساعت و نیم پس از پرواز، حدوداً در چه ارتفاعی بوده است؟ (با توجه به نمودار به صورت تقریبی پاسخ دهید.)

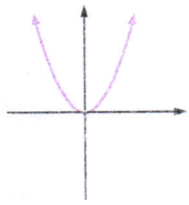
۱۰۲- دامنه و برد تابع $\{(۲a-b,۳),(-۱,۴),(۲,۷),(۱,a+۲b)\}$ به ترتیب، مجموعه‌های $\{-۱,۲,۴,۱\}$ و $\{۳,۴,۷,-۸\}$ هستند. a و b را به دست آورید.

@kotob_konkoria

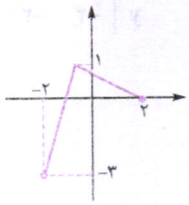
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

دامنه و برد تابع‌های زیر را به دست آورید.

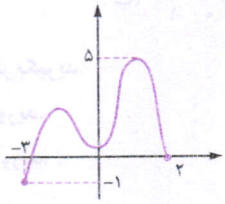
۱۰۳-



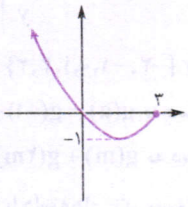
۱۰۴-



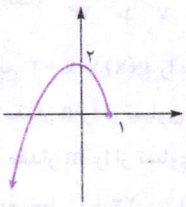
۱۰۵-



۱۰۶-

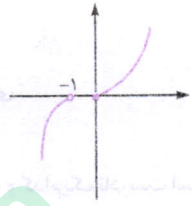


۱۰۷-

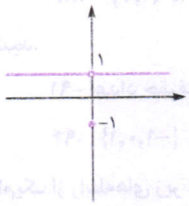


دامنه و برد تابع‌های زیر را به دست آورید.

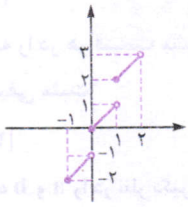
۱۰۸-



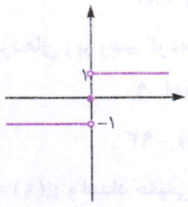
۱۰۹-



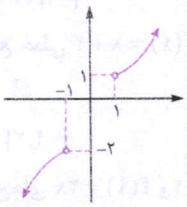
۱۱۰-



۱۱۱-



۱۱۲-



درس ۳ انواع تابع

تابع‌های چندجمله‌ای

تابع‌هایی را که ضابطهٔ آن‌ها (نمایش جبری آن‌ها)، چندجمله‌ای‌هایی از یک متغیر هستند را توابع چندجمله‌ای می‌نامیم. (بزرگ‌ترین توان x)

نکته

اگر چندجمله‌ای داده‌شده از درجهٔ n باشد، تابع را از درجهٔ n می‌نامیم.

ضابطهٔ تابع	$f(x)=\frac{3}{5}x-1$	$g(x)=\sqrt{2}x^2-3x+5$	$h(x)=x^4-x^3+7x-1$
درجهٔ تابع	۱	۲	۴

مثال ضابطهٔ تابع درجه‌دوم، به صورت $y=ax^2+bx+c$ را به دست آورید که محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده، محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کرده و از نقطهٔ (۲-،۳) نیز عبور کند.

پاسخ

محور عرض‌ها را در نقطهٔ ۱ قطع کرده $\Rightarrow$ نقطهٔ $(0,1)$ $\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در ضابطه}}$ $1=a(0)^2+b(0)+c \Rightarrow c=1$

محور طول‌ها را در نقطهٔ ۱- قطع کرده $\Rightarrow$ نقطهٔ $(-1,0)$ $\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}}$ $0=a(-1)^2+b(-1)+1 \Rightarrow 0=a-b+1 \Rightarrow -1=a-b$

تابع از نقطهٔ (۲-،۳) عبور کرده $\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در ضابطه}}$ $-2=a(3)^2+b(3)+1 \Rightarrow -3=9a+3b \xrightarrow{\div 3} -1=3a+b$

با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، $a=-\frac{1}{2}$ و $b=\frac{1}{2}$ به دست می‌آید، پس ضابطهٔ تابع به صورت $y=\frac{-1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$ است.

تابع همانی

یکی از تابع‌های چندجمله‌ای خاص، به صورت $f(x)=x$ یا $y=x$ است. داریم $f(1)=1$، $f(10)=10$، $f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$. واضح است که ورودی هر چه باشد، خروجی نیز همان خواهد بود. به چنین تابع‌هایی، همانی می‌گوییم. **در تابع‌های همانی، دامنه و برد مساوی هستند.**

مثال مشخص کنید کدام‌یک از تابع‌ها همانی هستند و کدام‌یک غیرهمانی؟

الف) $f(x)=x$ ، $(D_f=\mathbb{R})$

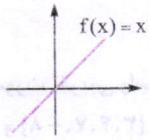
ب) $f=\{(3,3),(\pi,\pi),(\frac{1}{5},\frac{1}{5}),(a,a)\}$

پ) $f(x)=x$ ، $D_f=(0,\infty)$

ت) $f(x)=\frac{x^2+x}{x+1}$

پاسخ

الف) $f(x)=x$



$D_f=R_f=\mathbb{R}$ (همانی است.)

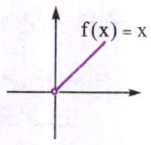
ب) $f=\{(3,3),(\pi,\pi),(\frac{1}{5},\frac{1}{5}),(a,a)\}$

(همانی است چون هر ورودی، خروجی یکسان دارد.)

$D_f=R_f=\{3,\pi,\frac{1}{5},a\}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پ



$D_f = R_f = (0, +\infty)$ (همانی است.)

ت

$f(x) = \frac{x^2 + x}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = x$ (همانی است.)

(البته دامنهٔ تابع $x \neq -1$ است ولی تأثیری در این‌که تابع همانی است، ندارد.)

تابع ثابت

تابع‌هایی که برد آن‌ها فقط یک عضو دارد را تابع ثابت می‌نامیم. ضابطهٔ جبری این تابع‌ها $f(x) = k$ (k عدد حقیقی) است.

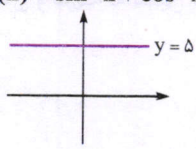
مثال مشخص کنید کدام تابع ثابت است؟

الف) $f(x) = -1$

ب) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

پ)

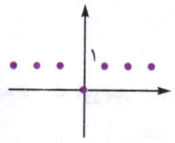
ت)



پاسخ الف $f(x) = -1$، برد تابع مجموعهٔ تک‌عضوی $\{-1\}$ است، پس تابع ثابت است.

ب $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$، برد تابع مجموعهٔ تک‌عضوی $\{1\}$ است، چون همواره داریم: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$، پس تابع ثابت است.

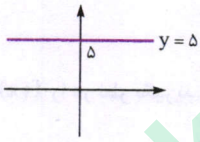
پ



برد تابع مجموعهٔ $\{0,1\}$ است.

پس غیرثابت است.

ت



برد تابع مجموعهٔ $\{5\}$ است.

پس تابع ثابت است.

مثال دو تابع $f(x) = b - 3ax$ و $g(x) = c - (3b-3)x$ ثابت هستند. اگر $f + g = 5$ باشد، a, b, c را به دست آورید.

(کنکور تجربی ۱۴۰۱)

پاسخ تابع g و f ثابت هستند *(نباید تو ضابطه‌اش x باشه)* پس باید کاری کنیم تا x از بین برود:

$3b - 3 = 0 \Rightarrow b = 1$ و $3a = 0 \Rightarrow a = 0$

از طرفی داریم:

$f(x) + g(x) = 5 \Rightarrow b + c = 5 \xrightarrow{b=1} c = 4$

مثال اگر f تابع همانی و g تابعی ثابت باشد به طوری که $g(-1) = \frac{1}{2}$، حاصل $f(2g(3)) - g(f(3))$ را به دست آورید.

پاسخ f همانی است پس $f(x) = x$ اما g تابعی ثابت است پس همواره $g(x) = \frac{1}{2}$. حالا داریم:

$f(2g(3)) = f(2(\frac{1}{2})) = f(1) = 1$

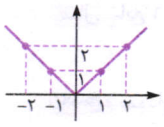
$g(f(3)) = g(3) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(2g(3)) - g(f(3)) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

تابع قدرمطلق

تابعی که به هر عدد حقیقی x، قدرمطلق آن را نسبت می‌دهد، تابع قدرمطلق می‌نامیم. ضابطهٔ این تابع $f(x) = |x|$ است. اگر مقدار تابع را به ازای چندین مقدار برای x، به دست آورده و نقاط را روی دستگاه مشخص کنیم، نمودار تابع به صورت زیر خواهد بود:

x	۰	۱	۱-	۲	۲-	۳/۵
$f(x) = \|x\|$	۰	۱	۱	۲	۲	۳/۵



دامنه و برد تابع قدرمطلق

دامنهٔ این تابع، $\mathbb{R}$ بوده ولی برد آن اعداد مثبت یا صفر یعنی بازهٔ $[0, +\infty)$ می‌باشد.

تذکر دامنهٔ تابع معمولاً توسط خود مسئله مشخص می‌شود. اما اگر نمایش جبری تابع، داده شده باشد و دامنه بیان نشده باشد، دامنه را بزرگ‌ترین مجموعهٔ ممکن که می‌توانیم به جای x قرار دهیم، تا برای y، عدد حقیقی به دست آید، در نظر می‌گیریم.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته

۱ هر عدد حقیقی را به جای x در تابع‌های چندجمله‌ای می‌توانیم قرار دهیم، پس دامنهٔ این توابع $\mathbb{R}$ خواهد بود.

۲ دامنهٔ تابع $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ برابر با $\mathbb{R}-\{1\}$ است. چون همه اعداد حقیقی به غیر از یک را می توانیم به جای x قرار دهیم تا برای y عدد حقیقی به دست آید. در تابع‌های کسری گویا، دامنه برابر با $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است.

۳ تابع‌های چندضابطه‌ای (قطعه‌ای)

همهٔ تابع‌های این‌جا یک‌ضابطه‌ای بودند، یعنی در تمام اعداد دامنه، با یک ضابطه نمایش داده می‌شدند. اما همهٔ توابع این‌گونه نیستند. مثلاً پارکینگی را در نظر بگیرید. یک ساعت اول توقف در آن رایگان است. در یک ساعت بعدی، توقف ۱۰۰۰ تومان هزینه دارد. ساعت‌های بعدی هر کدام هزار تومان اضافه می‌شود. می‌خواهیم تابعی بنویسیم که هزینهٔ پارکینگ $f(x)$، نسبت به زمان توقف ماشین (x) در آن را ارائه کند. x را زمان توقف در نظر بگیرید. اگر $0 \le x \le 1$ باشد، هزینهٔ پارکینگ رایگان (صفر تومان)، اگر $1 < x \le 2$ باشد، هزینهٔ پارکینگ ۱۰۰۰ تومان، اگر $2 < x \le 3$ باشد، هزینهٔ پارکینگ ۲۰۰۰ تومان و هزینه به همین ترتیب به دست می‌آید. این تابع را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & 0 \le x \le 1 \\ 1000 & 1 < x \le 2 \\ 2000 & 2 < x \le 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

تعریف تابع چند ضابطه‌ای: تابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلفی دارد، تابع چندضابطه‌ای یا قطعه‌ای می‌نامیم.

برای به دست آوردن مقدار تابع چندضابطه‌ای به ازای x خاص (ورودی)، ابتدا باید دید، x در کدام محدوده قرار می‌گیرد. سپس آن را در ضابطهٔ آن محدوده جای‌گذاری می‌کنیم.

مثال تابع قطعه‌ای $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x>0 \\ -x+3 & x \le 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. حاصل $f(-2)$، $f(1)$، $f(0)$ و $f(f(-1))$ را به دست آورید.

پاسخ عدد $-2 \le 0$ است، پس -2 را در ضابطهٔ پایین، جای‌گذاری می‌کنیم، پس: $f(-2)=-(-2)+3=5$

عدد $1>0$ است، پس ۱ را در ضابطهٔ بالا، جای‌گذاری می‌کنیم، پس: $f(1)=1^2-1=0$

عدد $0 \le 0$ است (*مساوی صفر، پایین داره!*)، پس: $f(0)=-(0)+3=3$

$$f(-1)=-(-1)+3=4 \Rightarrow f(\underbrace{f(-1)})=f(4)=4^2-1=15$$

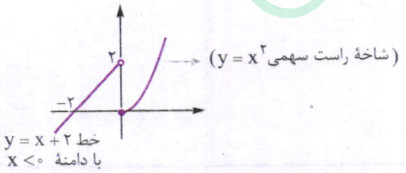
رسم تابع‌های چند ضابطه‌ای

برای رسم تابع‌های چندضابطه‌ای، کافی است هر ضابطه را در دامنهٔ خودش رسم کنیم. توجه دارید که دامنهٔ تابع چندضابطه‌ای، اجتماع تک‌تک دامنه‌ها است. بعد از رسم تابع، برد آن را نیز می‌توان به دست آورد.

مثال تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \ge 0 \\ x+2 & x<0 \end{cases}$ را رسم کنید.

پاسخ نمودار تابع $y=x^2$ را با دامنهٔ $x \ge 0$ و نمودار تابع $y=x+2$ را با دامنهٔ $x<0$، رسم می‌کنیم. دامنهٔ تابع، اجتماع مجموعه‌های $x \ge 0$ و $x<0$ یعنی $\mathbb{R}$ است.

با توجه به نمودار تابع مشخص می‌شود برد تابع نیز برابر $\mathbb{R}$ است.

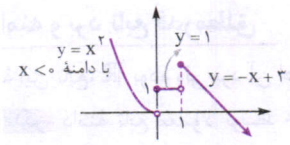


مثال تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ 1 & 0 \le x<1 \\ -x+3 & x \ge 1 \end{cases}$ را رسم کنید.

پاسخ نمودار $y=x^2$ به صورت سهمی است. از طرفی چون $x<0$ است، شاخهٔ سمت چپ سهمی مورد قبول است. $y=1$ نیز خط افقی است که در محدودهٔ $0 \le x<1$ قابل قبول است. برای رسم خط $y=-x+3$ نیز کافی است دو نقطه از آن را بیابیم:

x	۱	۲
y	۲	۱

. چون در ضابطهٔ سوم $x \ge 1$ است، بنابراین قسمت‌هایی از خط که $x \ge 1$ قابل قبول است.



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

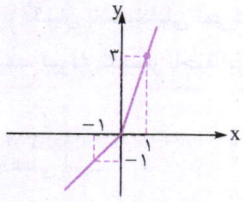
مثال نمودار تابع $f(x)=2x+|x|$ را رسم کنید.

پاسخ قدرمطلق را به صورت دو ضابطه می‌نویسیم و بعد تابع دو ضابطه‌ای را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}2x+x & x\geq 0\\ 2x-x & x<0\end{cases}=\begin{cases}3x & x\geq 0\\ x & x<0\end{cases}$$

x	0	1
y	0	3

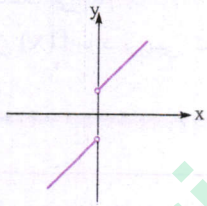
x	0	-1
y	0	-1



مثال نمودار تابع $y=x+\frac{|x|}{x}$ را رسم کنید.

پاسخ ابتدا با شرط‌گذاشتن، قدرمطلق را برمی‌داریم:

$$y=\begin{cases}x+\frac{x}{x} & x>0\\ x-\frac{x}{x} & x<0\end{cases}=\begin{cases}x+1 & x>0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$



مثال آیا معادلهٔ $y=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ -x^2 & x\leq 0\end{cases}$ یک تابع را نمایش می‌دهد؟ معادلهٔ $y=\begin{cases}x+1 & x\geq 0\\ -x^2+1 & x\leq 0\end{cases}$ چه‌طور؟

پاسخ در معادلهٔ اول، $x=0$ در هر دو رابطه صدق می‌کند اما در بالایی $y=1$ و در پایینی $y=0$ به دست می‌آید پس معادلهٔ داده‌شده تابع نیست. در دومی اگر $x>0$ از رابطهٔ بالایی فقط یک y و اگر $x<0$ از رابطهٔ پایینی فقط یک y به دست می‌آید. به ازای $x=0$ نیز هر دو ضابطه خروجی $y=1$ می‌دهند پس به ازای x ورودی فقط یک y داریم و معادلهٔ داده‌شده یک تابع را نمایش می‌دهد.

به‌دست‌آوردن f(عبارت) از روی نمایش جبری f(x)

فرض کنید تابع $f(x)$ داده شده باشد. برای به دست آوردن $f(2)$ چه می‌کنید؟ خب! خیلی ساده ۲ را به جای xها قرار می‌دهید. برای به دست آوردن f(عبارت) هم، عبارت را به جای xها قرار می‌دهیم. مثلاً فرض کنید $f(x)=3x-1$ باشد. برای به دست آوردن ضابطهٔ $f(x+1)$ کافی است به جای xها، $x+1$ را قرار دهیم، پس:

$$f(x+1)=3(x+1)-1=3x+2$$

مثال اگر $f(x)=2x+1$ باشد، حاصل $f(x^2+1)$ و $f(f(x))$ را به دست آورید.

پاسخ

$$f(x^2+1)=2(x^2+1)+1=2x^2+3$$

$$f(f(x))=f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$$

مثال اگر $f(x+3)=x^2-2x$ باشد، حاصل $f(5)$ و $f(\frac{1}{2})$ را به دست آورید.

پاسخ اگر به جای xها، عدد ۵ را قرار دهیم، $f(8)$ به دست می‌آید نه $f(5)$، بنابراین باید دید به جای xها، چه عددی قرار دهیم تا $f(5)$ به دست آید. اگر $x+3=5$ قرار دهیم، $x=2$ می‌شود؛ یعنی در دو طرف به جای xها عدد ۲ را قرار می‌دهیم تا $f(5)$ به دست آید، بنابراین:

$$x=2 \Rightarrow f(2+3)=2^2-2(2) \Rightarrow f(5)=0$$

$$x+3=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-3+\frac{1}{2}=\frac{-5}{2} \xrightarrow{\text{در رابطهٔ داده‌شده به جای xها، } \frac{-5}{2} \text{ قرار می‌دهیم.}} f(-\frac{5}{2}+3)=(-\frac{5}{2})^2-2(-\frac{5}{2})$$

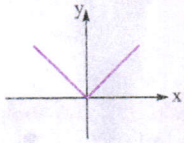
شبیه همین:

$$\Rightarrow f(\frac{1}{2})=\frac{25}{4}+5=\frac{45}{4}$$

پس جمع‌بندی انواع توابع به صورت زیر است:

انواع تابع	شکل تابع	نکات
خطی	$f(x)=ax+b$	۱) توان x نمی‌تواند بیشتر از یک باشد. ۲) برای رسم، نقطه‌یابی می‌کنیم (حواستان به دامنه باشد).
ثابت	$f(x)=k$	۱) $R_f=\{k\}$ ۲) اگر دامنه $\mathbb{R}$ باشد، نمودار خط افقی می‌شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

انواع تابع	شکل تابع	نکات
همانی	$f(x)=x$	۱) در تابع همانی همواره دامنه و برد یکسان است ولی برعکسش لزوماً درست نیست؛ یعنی اگر دامنه و برد یکسان باشد، دلیلی نمی‌شود که تابع حتماً همانی باشد. ۲) اگر $D_f=\mathbb{R}$ باشد، نمودار نیمساز ناحیهٔ اول و سوم می‌شود.
قدرمطلق	$f(x)=\lvert x\rvert=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$	نمودار به صورت هفتی است. 
چند ضابطه‌ای	$f(x)=\begin{cases} f_1 & x\in D_{f_1} \\ f_2 & x\in D_{f_2} \\ \vdots & \\ f_k & x\in D_{f_k} \end{cases}$	۱) دامنهٔ تابع، اجتماع دامنه‌های هر ضابطه است. ۲) برد از روی رسم به دست می‌آید. ۳) برای به دست آوردن $f(x)$ باید بررسی کنید (با توجه به دامنه‌ها) a در کدام ضابطه باید قرار گیرد.

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ روی انواع توابعی که در این درس یاد گرفتید مسلط باشید. ضابطه و رسم و دامنه و برد آن‌ها ممکن است سؤال بیاید (چه به صورت جای خالی و چه درست و نادرست).

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۱۳ تا ۱۲۷ و ۱۴۰ تا ۱۴۴

تیپ۲ سوال امتحانی بسیار مهم این درس، رسم تابع‌های چندضابطه‌ای است. دقت کنید که باید هر ضابطه را در دامنه خودش رسم کنید. البته ممکن است نمودار را بدهند و از شما ضابطهٔ تابع را بخواهند.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۲۸ تا ۱۳۹

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را با عبارات و اعداد مناسب تکمیل کنید.

۱۱۳- دامنهٔ تابع $y=\lvert x\rvert-\frac{1}{2}$، بازهٔ ..... و برد آن بازهٔ ..... است.

۱۱۴- اگر $f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \\ 2-x & x<0 \end{cases}$ باشد، آن‌گاه $f(1)+f(0)+f(-2)=\cdots$ ، $f(f(-1))=\cdots$.

۱۱۵- مساحت کره تابعی از ..... بوده و به صورت $S(r)=4\pi r^2$ قابل نمایش است.

۱۱۶- تابع $f=\{(a,1),(b,1),(c,1)\}$ یک تابع ..... است.

۱۱۷- تابع قدرمطلق را به صورت $f(x)=\begin{cases} \cdots & x\geq 0 \\ \cdots & x<0 \end{cases}$ نیز نمایش می‌دهند.

۱۱۸- تابع $f(x)$ ثابت بوده و $f(1)=5$ است. در این صورت نمایش جبری تابع f به صورت ..... است.

۱۱۹- تابع $y=\frac{x^2-x}{x-1}$، تابع ..... است.

۱۲۰- f تابع همانی و g تابعی ثابت بوده و $\frac{3f(2)+g(3)}{2g(5)+f(1)}=\frac{10}{9}$. در این صورت $g(0)=\cdots$.

۱۲۱- تابع درجه‌دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده است. اگر سهمی از نقطهٔ $(-1,-1)$ نیز عبور کند، a، b و c را به دست آورید.

۱۲۲- نمودار تابع همانی با دامنه‌های زیر را رسم کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) $[0,+\infty)$ ب) $[-1,3]$ پ) $\{-1,2,5\}$

۱۲۳- اگر f تابعی همانی و g تابعی ثابت باشد و داشته باشیم: $\frac{3f(2)+g(3)}{2g(7)+f(1)}=\frac{10}{9}$، مقدار $g(0)$ را به دست آورید. *(شبیه ساز کنکور ۱۴۰۱)*

۱۲۴- اگر $f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f را به دست آورید. *(کنکور تجربی خارج ۱۴۰۱)*

۱۲۵- اگر $f=\{(3,n^2-2n),(m,8),(2n-5,t),(4,3m+2)\}$ یک تابع ثابت سه عضوی باشد، $m+n+t$ کدام است؟ *(کنکور انسانی ۹۸)*

۱۲۶- تابع $f=\{(1,m+n)$ و $(20,n^2+n),(n^2-3n,4)\}$ همانی است. m را به دست آورید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۲۷- نمودار تابع $y=|x|$ را در حالت‌های زیر رسم کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) با دامنهٔ $[-۲,۲]$ ب) با برد $[۰,۳]$

نمودار تابع‌های چندضابطه‌ای زیر را رسم کنید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۲۸- $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x+۳ & x<۰ \end{cases}$

۱۲۹- $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۰ \\ -۱ & x=۰ \\ ۲ & x>۰ \end{cases}$

۱۳۰- $f(x)=\begin{cases} -۱ & x<۰ \\ ۰ & x=۰ \\ ۱ & x>۰ \end{cases}$

۱۳۱- $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x<۰ \\ |x|+۳ & x>۰ \end{cases}$

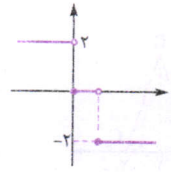
۱۳۲- $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x<۱ \\ ۴x-۱ & x\geq ۱ \end{cases}$

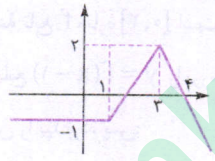
۱۳۳- $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & x<۲ \\ -۱ & ۲\leq x<۳ \\ |x-۴| & x>۳ \end{cases}$

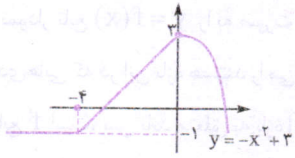
۱۳۴- نمودار تابع $y=۲x-|x|$ را رسم کنید.

۱۳۵- نمودار تابع $y=x^۲-|x|$ را رسم کنید.

با توجه به نمودار هر تابع قطعه‌ای، ضابطهٔ آن را بنویسید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۳۶-


۱۳۷-


۱۳۸-


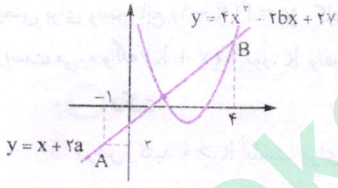
۱۳۹- کدام‌یک از معادله‌های زیر، یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) $y=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۰ \\ ۱-x & x\leq ۰ \end{cases}$ ب) $y=\begin{cases} ۲x+۱ & x\geq ۰ \\ -x & x\leq ۰ \end{cases}$

۱۴۰- اگر $f(x)=۵x+۳$ باشد، حاصل $\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ و $f(x-۱)$ را به دست آورید.

۱۴۱- در یک تابع خطی رابطهٔ $f(x+۱)=f(x)+۱$ همواره برقرار است. ضابطهٔ این تابع خطی را به دست آورید. (برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

۱۴۲- با توجه به شکل مقابل، a و b را به دست آورید.

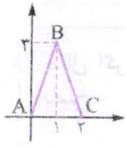


۱۴۳- اگر $f(x)$ تابعی باشد که $f(x)+xf(۲)=x^۲+۱$، $f(۱)$ را به دست آورید.

۱۴۴- اگر $f(\sqrt{x})=x+۴\sqrt{x}$ باشد، حاصل $f(۲)+f(۱)$ را به دست آورید.

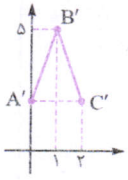
فصل ۴ انتقال تابع

نمودار تابع $f(x)\pm k$ (انتقال عمودی)



فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل باشد. با توجه به مختصات نقاط A، B و C داریم: $f(۰)=۰$، $f(۱)=۳$ و $f(۲)=۰$. واضح است که دامنهٔ تابع، بازهٔ $[۰,۲]$ و برد آن بازهٔ $[۰,۳]$ است.

می‌خواهیم نمودار تابع جدید $y=f(x)+۲$ را به دست آوریم:



$x=۰ \Rightarrow y=f(۰)+۲=۰+۲=۲ \Rightarrow A'=(۰,۲)$

$x=۱ \Rightarrow y=f(۱)+۲=۳+۲=۵ \Rightarrow B'=(۱,۵)$

$x=۲ \Rightarrow y=f(۲)+۲=۰+۲=۲ \Rightarrow C'=(۲,۲)$

بنابراین نقاط A، B و C در تابع جدید، تبدیل به نقطه‌های A'، B' و C' می‌شوند. با رسم این نقاط، نمودار تابع $y=f(x)+۲$ به صورت بالا خواهد بود. واضح است که نمودار $y=f(x)+۲$، انتقال‌یافتهٔ نمودار اول به اندازهٔ ۲ واحد به سمت بالا است. دامنهٔ تابع جدید $y=f(x)+۲$ همان دامنهٔ f یعنی بازهٔ $[۰,۲]$ است اما برد آن بازهٔ $[۲,۵]$ خواهد بود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

در حالت کلی داریم:

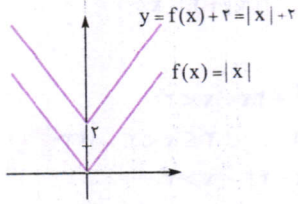
نکته

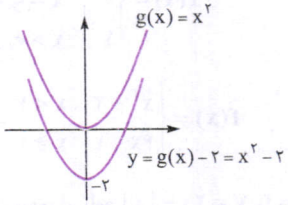
۱ برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد در راستای عمودی انتقال دهیم.
اگر $k>0$، انتقال به بالا و اگر $k<0$ انتقال به پایین خواهد بود.

۲ دامنهٔ تابع $y=f(x)+k$، همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بوده اما برد آن تغییر می‌کند.

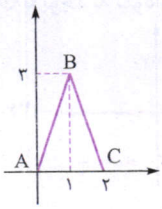
مثال اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2$ باشد، نمودار تابع‌های $y=f(x)+2$ و $y=g(x)-2$ را رسم کنید.

پاسخ





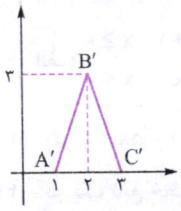
نمودار تابع $y=f(x-k)$ و $y=f(x+k)$ (انتقال افقی)



بار دیگر نمودار تابع $y=f(x)$ را به صورت مقابل در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع f، بازهٔ $[0,2]$ است، یعنی ماشین f فقط ورودی‌هایی که در این بازه هستند را می‌پذیرد. می‌خواهیم نمودار تابع $y=f(x-1)$ را بررسی کنیم. $x-1$ ورودی تابع f است، پس باید متعلق به بازهٔ $[0,2]$ باشد تا ماشین f آن را بپذیرد، پس:

$$0\le x-1\le 2 \xrightarrow{+1} 1\le x\le 3$$

یعنی دامنهٔ تابع $y=f(x-1)$ بازهٔ $[1,3]$ خواهد بود. حالا:



$$x=1 \Rightarrow y=f(1-1)=f(0)=0 \Rightarrow A'=(1,0)$$

$$x=2 \Rightarrow y=f(2-1)=f(1)=3 \Rightarrow B'=(2,3)$$

$$x=3 \Rightarrow y=f(3-1)=f(2)=0 \Rightarrow B'=(3,0)$$

یعنی برای رسم تابع $y=f(x-1)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم *(درست حدس زدی، اگر $f(x-k)$ بود، k واحد راست می‌ره و اگه $f(x+k)$ بود، k واحد چپ می‌ره یعنی برعکس عمل می‌کنه).*

نکته

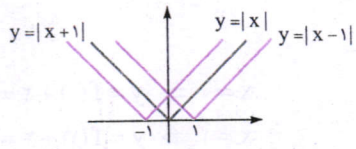
۱ فرض کنید $k>0$ باشد. برای رسم تابع $y=f(x-k)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را k واحد به راست ببریم. برای رسم $y=f(x+k)$ نیز کافی است $y=f(x)$ را k واحد به چپ ببریم.

۲ برد تابع $y=f(x\pm k)$ همان برد $f(x)$ است ولی دامنهٔ آن ممکن است تغییر کند.

۳ اگر در تابع f به جای x ها $x-k$ قرار دهیم نمودار تابع k واحد به راست و اگر به جای xها $x+k$ قرار دهیم نمودار k واحد به چپ می‌رود.

مثال اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^2$ باشد، نمودار تابع‌های $y=f(x-1)$، $y=f(x+1)$، $y=g(x-1)$ و $y=g(x+1)$ را رسم کنید.

پاسخ

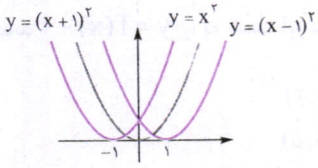


$y=|x|$ یک واحد به راست می‌رود.

$y=f(x-1)=|x-1| \Rightarrow$

$y=|x|$ یک واحد به چپ می‌رود.

$y=f(x+1)=|x+1| \Rightarrow$



$y=x^2$ یک واحد به راست می‌رود.

$y=g(x-1)=(x-1)^2 \Rightarrow$

$y=x^2$ یک واحد به چپ می‌رود.

$y=g(x+1)=(x+1)^2 \Rightarrow$

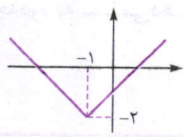
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال اگر $f(x)=|x|$ باشد، ضابطهٔ تابع $y=f(x+1)-2$ را به دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

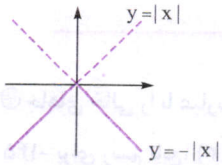
پاسخ

$$y=f(x+1)-2=\underbrace{|x+1|}_{\text{یک واحد چپ}}\overset{\text{۲ واحد پایین}}{-2}$$

$\xrightarrow[\text{و دو واحد پایین می‌بریم}]{y=|x| \text{ را یک واحد به چپ}}$



نمودار تابع $y=-f(x)$



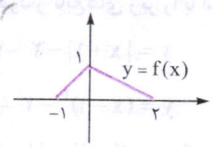
نمودار تابع $y=|x|$ به صورت مقابل است. با نقطه‌یابی می‌توان دید که نمودار $y=-|x|$ قرینهٔ نمودار $y=|x|$ نسبت به محور xها است (*تو قدرمطلق ۱ بدی، ۱ می‌گیری ولی توی $-|x|$، ۱ بدی، ۱- می‌گیری و ...*). این مطلب در حالت کلی هم درست است.

نکته

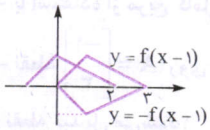
برای رسم تابع $y=-f(x)$ کافی است، نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها، قرینه کنیم.

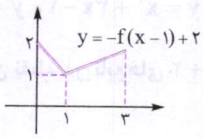
مثال نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است:

نمودار تابع $y=-f(x-1)+2$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را به دست آورید.



پاسخ برای رسم، تابع $y=f(x)$ را به ترتیب یک واحد به راست، نسبت به محور xها قرینه و ۲ واحد بالا می‌بریم.



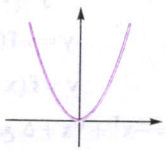


دامنه $=[0,3]$

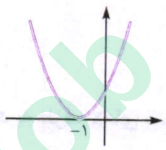
برد $=[1,2]$

مثال نمودار تابع $y=-(x+1)^2+3$ را رسم کنید.

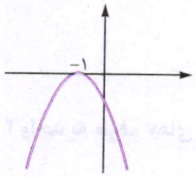
پاسخ برای رسم ابتدا نمودار $y=x^2$، را یک واحد به چپ، نسبت به محور xها، قرینه و ۳ واحد بالا می‌بریم.



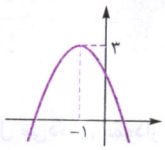
$y=x^2$



$y=(x+1)^2$



$y=-(x+1)^2$



$y=-(x+1)^2+3$

(*توجه داری که ترتیب عملیات مهمه. اول داخل پرانتز، بعد منفی پشت، بعد ۳+*)

مثال تابع $f(x)=x^2+x$ را یک واحد به راست و دو واحد پایین می‌بریم و تابع جدید به دست آمده را g می‌نامیم. محل برخورد دو تابع f و g را به دست آورید.

پاسخ f یک واحد به راست $(f(x-1))$ و دو واحد پایین می‌رود $(f(x-1)-2)$ پس تابع g همان تابع $f(x-1)-2$ ست (یعنی در ضابطهٔ f به جای xها قرار می‌دهیم $x-1$ و کل تابع را منهای ۲ می‌کنیم.)

$$g(x)=f(x-1)-2=(x-1)^2+(x-1)-2=x^2-2x+1+x-1-2=x^2-x-2$$

برای به دست آوردن محل برخورد دو تابع کافی است معادلهٔ $f(x)=g(x)$ را حل کنیم:

$$x^2+x=x^2-x-2 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=0$$

پس تنها نقطهٔ برخورد $(-1,0)$ است.

جمع‌بندی انتقال افقی و عمودی توابع این‌جوری شد:

تابع $f(x)$ را داریم. $(k>0)$:

عملیات	به جای x قرار دهیم $x-k$.	به جای x قرار دهیم $x+k$.	کل تابع را با k جمع کنیم.	کل تابع را منهای k کنیم.	کل تابع قرینه شود.
ضابطه	$y=f(x-k)$	$y=f(x+k)$	$y=f(x)+k$	$y=f(x)-k$	$y=-f(x)$
نمودار	نمودار f را k واحد به راست می‌بریم.	نمودار f را k واحد به چپ می‌بریم.	نمودار f را k واحد بالا می‌بریم.	نمودار f را k واحد پایین می‌بریم.	نمودار f نسبت به محور xها قرینه می‌شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

درامتحان چه‌خبر؟

سؤال این قسمت رسم نمودار تابع با استفاده از انتقال است. معمولاً یک تابع قدرمطلقی یا درجه‌دوم به شما می‌دهند که شما باید با رسم مراحل، آن را از روی $y=|x|$ یا $y=x^2$ رسم کنید.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۱۴۵ تا ۱۶۰

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۱۴۵- برای رسم تابع، $y=f(x+3)$، کافی است نمودار $y=f(x)$ را ۳ واحد به ..... ببریم.

۱۴۶- دامنهٔ تابع $y=f(x)+2$ با ..... تابع $y=f(x)$ یکسان است.

۱۴۷- ..... دو تابع $y=f(x+2)$ و $y=f(x)$ یکسان است.

نمودار تابع‌های زیر را با استفاده از انتقال رسم کرده و برد هر یک را بیابید. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۴۸- $y=|x+1|-2$

۱۴۹- $y=-|x|+3$

۱۵۰- $y=-|x-1|-2$

۱۵۱- $y=(x-1)^2-2$

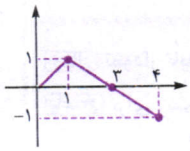
۱۵۲- $y=-(x+1)^2+3$

۱۵۳- $y=-x^2-1$

۱۵۴- با استفاده از مربع کامل کردن، توابع $y=x^2-2x$ و $y=x^2+3x-1$ را رسم کرده و برد آن‌ها را به دست آورید.

۱۵۵- نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ روی تابع $y=f(x)$ است. این نقطه در تابع‌های $y=f(x)+2$، $y=f(x)-1$، $y=f(x-1)$ و $y=f(x+1)-2$ به کدام نقطه تبدیل می‌شود؟

نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار هر تابع خواسته‌شده را رسم کنید.



۱۵۶- $y=f(x-1)$

۱۵۷- $y=f(x)+1$

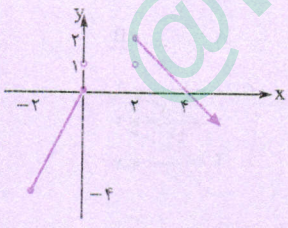
۱۵۸- $y=-f(x)+3$

۱۵۹- $y=f(x+1)-1$

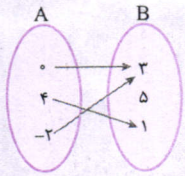
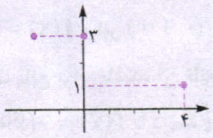
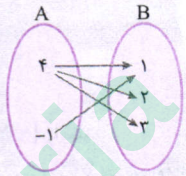
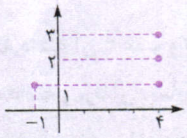
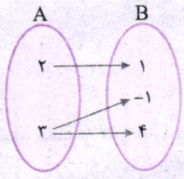
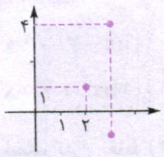
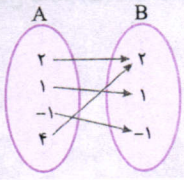
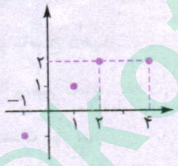
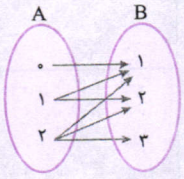
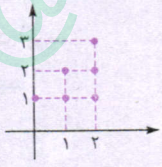
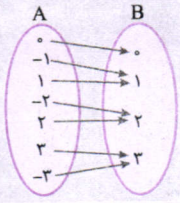
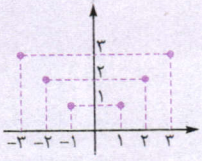
۱۶۰- نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ *(کنکور تجربی ۹۸)*

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل پنجم	رشته: ریاضی و تجربی	مدت امتحان: ۶۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
۱	جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) دامنه تابع $f(x)=x^2-1$ برابر $(0,+\infty)$ و برد آن $(0,+\infty)$ است. ب) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است. پ) برد تابع $f(x)=-(x+2)^2+3$ با دامنهٔ $[-3,2]$ بازهٔ $[-13,2]$ است. ت) برد تابع $\{(1,2),(3,-1),(4,2)\}$ شامل ۳ عضو است.				۱
۲	اگر بدانیم رابطهٔ $f=\{(a,5),(6,a^2-2),(3,-2),(6,7),(3,b)\}$ یک تابع است. آن‌گاه حاصل $\frac{f(-3)+f(3)}{f(6)}$ کدام است؟				۱
۳	الف) تابعی مثال بزنید که دامنهٔ آن ۴ عضو و برد آن ۵ عضو داشته باشد. ب) تابعی مثال بزنید که دامنه و برد آن مساوی باشند ولی تابع همانی نباشد. پ) ضابطهٔ تابعی خطی با شیب منفی را به دست آورید به طوری که دامنهٔ آن $[-1,4]$ و برد آن $[-2,1]$ باشد.				۱/۵
۴	اگر f تابع همانی و $g(x)=-4$ باشد، حاصل عبارت $g(\frac{\sqrt{2}}{2})-3f(-8)$ را بیابید.				۱
۵	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x\geq 0\\ x+2 & x>0\end{cases}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را به دست آورید.				۱
۶	نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}ax-3 & x<0\\ 2bx^2+7 & x>0\end{cases}$ از نقطهٔ $(-1,3)$ عبور می‌کند. اگر $f(2)=5$ باشد، مقادیر b و a را بیابید.				۰/۵
۷	نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1,-2)$ و $(2,-3)$ می‌گذرد و محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را به کمک انتقال، رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.				۱/۵
۸	نمودار $y=\|x\|$ را دو واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت بالا انتقال داده‌ایم و نمودار جدیدی با نام $f(x)$ به دست آمده است. حال به سؤالات زیر پاسخ دهید: الف) نمودار $-f(1+x)$ را رسم کنید. ب) مقدار $f(-3)$ را به دست آورید.				۱
۹	نمودار تابع قطعه‌ای f داده شده است: الف) ضابطهٔ آن را به دست آورید. ب) دامنه و برد آن را بیابید.  				۱/۵
	جمع نمرات				۱۰

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

	نمودار پیکانی	مجموعه زوج‌های مرتب	نمودار مختصاتی	تابع است یا خیر؟
۱-	 (هر عضو A دقیقاً به یک عضو B نظیر می‌شود، پس تابع است.)	$\{(۰,۳),(۴,۱),(-۲,۳)\}$ (مؤلفه‌های اول متفاوت‌اند، پس تابع است.)	 (هر خط عمودی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع است.)	✓
۲-	 (عدد ۴ به چند عضو مختلف نظیر شده است، پس تابع نیست.)	$\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(-۱,۱)\}$ (دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول مساوی و مؤلفهٔ دوم متفاوت وجود دارد، پس تابع نیست.)	 (خط عمودی $x = ۴$، نمودار را در بیشتر از یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع نیست.)	×
۳-	 (از عدد ۳ دو فلش به دو عضو مختلف B وارد شده است، پس تابع نیست.)	$\{(۲,۱),(۳,-۱),(۳,۴)\}$		×
۴-		$\{(۲,۲),(۱,۱),(-۱,-۱),(۴,۲)\}$		✓
۵-		$\{(۰,۱),(۱,۱),(۱,۲),$ $(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳)\}$		×
۶-		$\{(۰,۰),(۱,۱),(۲,۲),$ $(۳,۳),(-۱,۱),(-۲,۲),(-۳,۳)\}$		✓

○ اگر هر عضوِ پدیده‌ای که اول ذکر شده است، دقیقاً به یکی از عضوهای پدیدهٔ دوم نظیر شود، رابطه تابع خواهد بود.

۷- هر مربع با ضلع خاص، دقیقاً یک عدد به عنوان مساحت دارد، پس رابطه تابع است.

۸- هر فرد در یک زمان مشخص، فقط یک عدد به عنوان وزن خود دارد، پس رابطه تابع است.

۹- هر فرد، فقط یک سال تولد دارد، پس رابطه تابع است. (ممکن است دو نفر، سال تولد یکسانی داشته باشند که با تابع‌بودن تناقضی ندارد. مهم این است که هر فرد، فقط یک سال تولد دارد.)

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۰- ریشه‌های دوم عدد مثبت a، به صورت $\pm\sqrt{a}$ هستند. مثلاً ریشه‌های دوم عدد ۴ به صورت ۲± هستند، بنابراین به هر عدد مثبت، بیش از یک عضو نظیر می‌شود، بنابراین رابطه تابع نیست.

۱۱- هر عدد فقط یک ریشهٔ سوم دارد، پس رابطه تابع است.

۱۲- هر فرد، فقط یک رنگ پوست دارد، پس رابطه تابع است.

۱۳- بسیاری از افراد، بیش از یک نفر را دوست دارند، پس رابطه تابع نیست.

۱۴- در پایان هر روز، میزان بارندگی یک عدد خواهد بود، پس رابطه تابع است.

۱۵- اگر نخی به طول l داشته باشیم، فقط یک مربع به ضلع $\frac{l}{4}$ می‌توانیم بسازیم، بنابراین فقط عدد $(\frac{l}{4})^2$ به عنوان مساحت به دست می‌آید، پس رابطه تابع است.

۱۶- هر فرد به پدر و مادر خود (دو نفر) نظیر می‌شود، پس رابطه تابع نیست.

۱۷- در بیشتر تلفن‌های همراه، اسم چندین نفر در دفترچهٔ تلفن وجود دارد، پس رابطه تابع نیست.

۱۸- هر ساختمان، یک عدد به عنوان تعداد طبقات دارد، پس رابطه تابع است. توجه دارید که ممکن است ساختمان‌های مختلف، تعداد طبقات یکسانی داشته باشند. این با تابع‌بودن تناقضی ندارد. مهم این است که هر ساختمان، یک تعداد طبقات مشخصی دارد.

۱۹- هر خودرو فقط یک رنگ دارد، پس رابطه تابع است.

۲۰- هر ماه، تعداد روز مشخصی دارد. مثلاً فروردین، ۳۱ روز است، پس رابطه تابع است.

● مجموعه زوج‌های مرتب، در صورتی تابع است که یا مؤلفه‌های اول، همگی متفاوت باشند یا اگر دو زوج مرتب، مؤلفه‌های اول مساوی، داشتند، مؤلفه‌های دوم آن‌ها نیز برابر باشند. *(به عبارت دیگه دوتا زوج مرتب نبودن، یه زوج بودن که دو بار نوشته شدن)*. در واقع، دو زوج مرتب، با مؤلفه‌های اول مساوی و مؤلفه‌های دوم غیرمساوی نداشته باشیم، پس:

۲۱- تابع است، چون مؤلفه‌های اول زوج مرتب‌ها، همگی متفاوت‌اند.

۲۲- دو زوج مرتب (۳,۲) و $(\frac{6}{2},4)$ مؤلفه‌های اول مساوی دارند، ولی مؤلفه‌های دوم آن‌ها برابر نیستند *(عدد ۳ به دوتا عدد نظیر شده)*، پس مجموعهٔ داده‌شده، تابع نیست.

۲۳- تابع است، چون:

$\{(2,3),(0,-6),(0,-6),(2,3)\}=\{(2,3),(0,-6)\}$.

۲۴- تابع نیست. (a به عددهای ۱ و ۲- نظیر شده است.)

۲۵- رابطهٔ داده‌شده تابع است، پس اگر دو زوج مرتب، مؤلفه‌های اول مساوی داشته باشند، باید مؤلفهٔ دوم آن‌ها نیز برابر باشند، پس:

$\{(\frac{3}{5},-1),(0,a),(\frac{3}{5},b-1),(0,1)\} \Rightarrow b-1=-1$

$\Rightarrow b=0, a=1$

۲۶- $\{(3,a-b),(7,a+b),(\overbrace{\frac{6}{2}}^{3},4),(\overbrace{\sqrt{49}}^{7},-1)\}$

$\Rightarrow \begin{cases} a-b=4 \\ a+b=-1 \end{cases}$

$2a=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2} \Rightarrow b=-\frac{5}{2}$

۲۷- $\{(a-1,2),(5,a-2),(a-2,b+1),(3,5),(5,3)\}$

$\Rightarrow a-2=3 \Rightarrow a=5$

در همهٔ زوج مرتب‌ها $a=5$ قرار می‌دهیم، پس:

$\{(4,2),(5,3),(3,b+1),(3,5),(5,3)\}$

حالا $b+1=5$ و لذا $b=4$ به دست می‌آید.

۲۸- مؤلفه‌های اول دو زوج (۲,۱-) و (۲-,a+۵) مساوی هستند، پس باید $a+5=1$ و لذا $a=-4$ به دست آید. با قراردادن $a=-4$ در زوج‌های مرتب، داریم:

$\{(-4,1),(-2,1),(-3,5),(-2,b+1),$
$(-2,1),(1,-2),(b+1,c)\}$

پس $b+1=1$ و لذا $b=0$ به دست می‌آید. حالا دو زوج $(\underbrace{b+1}_{1},c)$ و (۲-,۱) مؤلفه‌های اول مساوی دارند، پس $c=-2$ خواهد بود.

۲۹- $a^2=4$

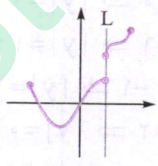
$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow \{(\frac{1}{2},4),(2,5),(\frac{1}{2},4),(2,-1)\} \text{ تابع نیست.} \\ a=-2 \Rightarrow \{(\frac{1}{2},4),(-2,5),(\frac{1}{2},4),(2,-1)\} \\ =\{(\frac{1}{2},4),(-2,5),(2,-1)\} \text{ تابع است.} \end{cases}$

بنابراین $a=-2$ قابل قبول خواهد بود.

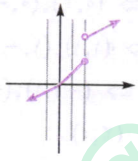
۳۰- $a^2+1=5$

$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \Rightarrow \{(-3,5),(2,1),(-2,3),(2,b+1)\} \\ \Rightarrow b+1=1 \Rightarrow b=0 \\ a=-2 \Rightarrow \{(-3,5),(-2,1),(-2,3),(2,b+1)\} \text{ تابع نیست.} \end{cases}$

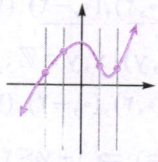
● نمودار داده‌شده در صورتی می‌تواند نمودار تابع باشد که هر خط عمودی، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند *(یعنی یا قطع نکنه یا فقط تو یه نقطه قطع کنه)*.



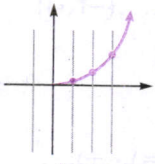
۳۱- خط L در دو نقطه نمودار را قطع کرده است، پس تابع نیست.



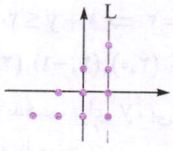
۳۲- تابع است.



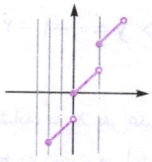
۳۳- تابع است.



۳۴- تابع است.

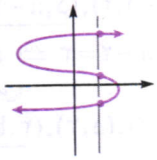


۳۵- تابع نیست، چون L، نمودار را در ۴ نقطه قطع کرده است.

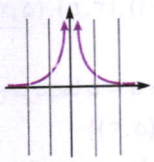


۳۶- هر خط عمودی، نمودار را حداکثر در یک نقطه، قطع می‌کند، پس تابع است.

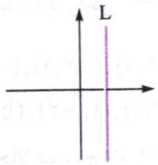
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria



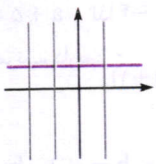
۳۷- تابع نیست.



۳۸- تابع است.



۳۹- اگر خط L را روی خود نمودار بکشیم، در بی‌شمار نقطه آن را قطع می‌کند، پس تابع نیست.



۴۰- تابع است.

● در هر قسمت، زوج مرتب‌های مجموعهٔ داده‌شده را مشخص می‌کنیم:

۴۱- x و y دو عدد طبیعی هستند. از $x=1$ شروع می‌کنیم:
(شبیه همین، x عدد فرد نمی‌تواند باشد، چون جمع فرد با زوج، زوج نمی‌شود.)

$x=1 \Rightarrow 1+2y=8 \Rightarrow y=\frac{7}{2}\notin \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow 2+2y=8 \Rightarrow y=3 \Rightarrow (2,3) \\ x=4 \Rightarrow 4+2y=8 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (4,2) \\ x=6 \Rightarrow 6+2y=8 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (6,1) \\ x=8 \Rightarrow 8+2y=8 \Rightarrow y=0\notin \mathbb{N} \\ x>8 \Rightarrow \text{y منفی درمی‌آید} \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \{(2,3),(4,2),(6,1)\}$ تابع است.

۴۲- واضح است که $x>2$ یا $x<-2$ نمی‌تواند باشد، چون در آن صورت $|y|$ منفی خواهد شد، پس:

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow |y|=2 \Rightarrow y=\pm 2 \Rightarrow (0,2),(0,-2) \\ x=1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow (1,1),(1,-1) \\ x=-1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow (-1,1),(-1,-1) \\ x=2 \Rightarrow |y|=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (2,0) \\ x=-2 \Rightarrow |y|=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow (-2,0) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}, |x|+|y|=2\}$
$=\{(0,2),(0,-2),(1,1),(1,-1),\dots,(-2,0)\}$ تابع نیست.

۴۳- $\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{Z}, x^2+y^2=4\}$
$=\{(0,2),(0,-2),(2,0),(-2,0)\}$ تابع نیست.

۴۴-
$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow 1+y\le 2 \quad y\le 1 \Rightarrow y=1,0,-1,\dots \\ \Rightarrow (1,1),(1,0),(1,-1),\dots \\ x=2 \Rightarrow 2+y\le 2 \Rightarrow y\le 0 \Rightarrow y=0,-1,-2,\dots \\ \Rightarrow (2,0),(2,-1),(2,-2),\dots \end{cases}$$

به صورت مشابه، به x هر عدد صحیحی که بدهیم، برای y، بی‌شمار جواب صحیح به دست می‌آید، بنابراین رابطه تابع نیست.

۴۵- به ازای هر $-1\le x\le 1$ بی‌شمار زاویهٔ y° وجود دارد که $x=\sin y^\circ$ شود. مثلاً اگر x برابر ۰ باشد $y=0^\circ$، $y=360^\circ$، $y=720^\circ$ و ... می‌تواند باشد؛ پس تابع نیست.

۴۶- $|u|$ و u^2 عبارت‌های نامنفی هستند. حالا جمع آن‌ها برابر صفر شده است؛ پس چاره‌ای نیست جز این‌که هر دو $y-1$ و $x+1$ برابر صفر باشند، یعنی $x=-1$ و $y=1$. این یعنی فقط یک زوج مرتب $\{(-1,1)\}$ در آن رابطه درست درمی‌آید؛ پس تابع هست.

۴۷- برد $=\{4\}$، پس برد آن یک عضو دارد.

۴۸- وجود ندارد. اگر با نمودار پیکانی امتحان کنیم، حتماً از یکی از عضوهای A بیشتر از یک پیکان خارج می‌شود و لذا تابع نخواهد بود.

۴۹- تعداد عضوهای دامنه همواره بزرگ‌تر یا مساوی تعداد عضوهای برد است.

۵۰- دامنهٔ تابع

۵۱- $f(1)=1$، $f(2)=3$، $f(3)=5$ و ... . در حالت کلی $f(n)=2n-1$. (خروجی‌ها اعداد فرد هستند.)

۵۲- خط‌های عمودی با معادلهٔ $x=k$ را نمی‌توان به عنوان تابع در نظر گرفت.

۵۳- $(-1,5)$

۵۴- $f(2)=-1$

۵۵- $f(x)=3x$

۵۶- $f(t)=0/1t$

۵۷- $g=\{(2,-1),(-1,2),(0,2)\}$

۵۸- زوج مرتب‌های تابع برابر $f=\{(0,1),(1,3),(2,1),(3,-1)\}$ است، پس:

$f(1)=3$ $\qquad$ $f(0)=1$

$f(3)=-1$ $\qquad$ $f(2)=1$

$f(2)\times f(3)=1\times(-1)=-1$ $\qquad$ $f(1)+f(2)=3+1=4$

$2f(1)-3f(2)=2\times 3-3\times 1=3$ $\qquad$ $\frac{5f(1)}{f(0)}=\frac{5\times 3}{1}=15$

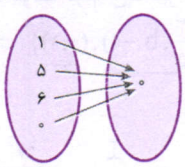
۵۹- مجموعهٔ مؤلفه‌های اول = دامنه $=\{3,-1,2,-2\}$

۶۰- مجموعهٔ طول نقاط = دامنه $=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$

و $g=\{(-3,-2),(-2,0),(-1,-1),(0,0),(1,1),(2,2),(3,1)\}$

۶۱- $f=\{(1,0),(2,1),(3,0),(4,1),\dots\}$
$\Rightarrow$ دامنه = اعداد طبیعی $=\mathbb{N}$

۶۲- دامنه = A مجموعهٔ $=\{a,b,c,d\}$



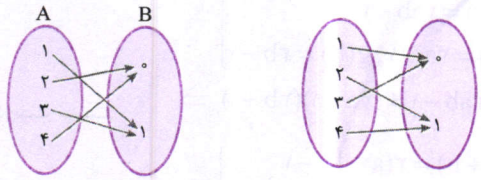
۶۳- $\{(1,2)\}$ $\qquad$ ۶۴- $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

۶۵- $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),\dots\}$

۶۶- $f(n)=0$ (n عددی طبیعی است.)

۶۷- دامنهٔ هر دو تابع مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ و برد آن‌ها نیز مجموعهٔ $\{0,1\}$ است ولی دو تابع مختلف‌اند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

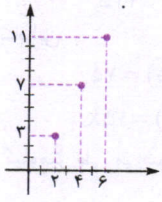


(اعداد فرد به صفر و اعداد زوج به یک می‌روند.) (اعداد فرد به یک و اعداد زوج به صفر می‌روند.)

۶۸- $g(۲)=۰,\ g(۴)=۱,\ g(۶)=۲,\ g(۸)=۳,\ldots$

$\Rightarrow$ برد $=\{۰,۱,۲,۳,\ldots\}$

۶۹-



$f(۲)=۳ \Rightarrow (۲,۳)$

$f(۴)=۷ \Rightarrow (۴,۷)$

$f(۶)=۱۱ \Rightarrow (۶,۱۱)$

$\vdots$

۷۰- (می‌تونستی چیزهای دیگه هم مثال بزنی) که n اعداد طبیعی فرد است.

$f=\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۶),(۷,۸),\ldots\} \Rightarrow f(n)=n+۱$

۷۱-

$$\left.\begin{array}{l} x=۱ \Rightarrow y=\frac{۱}{۲}-۱=\frac{-۱}{۲} \Rightarrow (۱,-\frac{۱}{۲}) \\ x=۲ \Rightarrow y=\frac{۲}{۲}-۱=۰ \Rightarrow (۲,۰) \\ x=۳ \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}-۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (۳,\frac{۱}{۲}) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow f=\{(۱,\frac{-۱}{۲}),(۲,۰),(۳,\frac{۱}{۲})\}$

۷۲- $g(۲)=\frac{۲}{۲}-۵=-۴ \Rightarrow [g(۲)]^۲=(-۴)^۲=۱۶$

۷۳- $\frac{g(۶)}{۲}\times f(\frac{۱}{۲})=(\frac{\frac{۶}{۲}-۵}{۲})\times(۲(\frac{۱}{۲})+۵)=-۱\times ۶=-۶$

۷۴- $\frac{g(۰)}{۲f(۳)-f(۴)}=\frac{-۵}{۲(۱۱)-۱۳}=\frac{-۵}{۹}$

۷۵- برای محاسبهٔ $f(g(۲))$ ابتدا $g(۲)$ را به دست می‌آوریم و سپس حاصل را در y قرار می‌دهیم:

$g(۲)=-۴ \Rightarrow f(g(۲))=f(-۴)=-۸+۵=-۳$

۷۶- $f(\frac{۱}{۴})=۲(\frac{۱}{۴})+۵=\frac{۱۱}{۲} \Rightarrow g(f(\frac{۱}{۴}))$

$=g(\frac{۱۱}{۲})=\frac{\frac{۱۱}{۲}}{۲}-۵=\frac{۱۱}{۴}-۵=\frac{-۹}{۴}$

۷۷- $f(۱)=۷ \Rightarrow g(۲\times f(۱))=g(۲\times ۷)=g(۱۴)=۲$

۷۸- تابع خطی را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. حالا:

$$\left.\begin{array}{l} f(۱)=۵ \Rightarrow a+b=۵ \\ f(-۱)=۳ \Rightarrow -a+b=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲b$$

$\Rightarrow b=۴,\ a=۱ \Rightarrow f(x)=x+۴$

۷۹- تابع را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. نقاط $(۱,۰)$ و $(-۲,۴)$ روی تابع هستند، پس $f(۱)=۰$ و $f(-۲)=۴$.

$$\begin{array}{l} f(۱)=۰ \Rightarrow a+b=۰ \\ f(-۲)=۴ \Rightarrow -۲a+b=۴ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -a-b=۰ \\ -۲a+b=۴ \end{cases}$$

$-۳a=۴ \Rightarrow a=-\frac{۴}{۳}$

$\Rightarrow b=\frac{۴}{۳} \Rightarrow f(x)=-\frac{۴}{۳}x+\frac{۴}{۳}$

۸۰- می‌توانیم ضابطهٔ تابع را $f(x)=ax+b$ در نظر گرفته و با استفاده از دو نقطه، a و b را به دست آوریم.

اما ساده‌تر هم می‌توان با کمی جست‌وجو، رابطهٔ بین x و y را به دست آورد. در تابع الف، هر x، ضرب در ۳ شده و با یک، جمع می‌شود تا y به دست آید، پس $y=۳x+۱$ خواهد بود. در تابع ب، هر x تقسیم بر ۲ شده و ۲ واحد از آن کم می‌شود، پس $y=\frac{x}{۲}-۲$ ضابطهٔ جبری تابع خطی خواهد بود.

۸۱- $g(a)=g(-۱)+g(۰)=۲+۳=۵ \Rightarrow g(a)=۵$

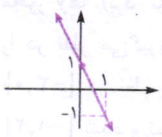
$\Rightarrow a+۳=۵ \Rightarrow a=۲$

۸۲- $g(m)+g(۲m)=۹ \Rightarrow m+۳+۲m+۳=۹$

$\Rightarrow ۳m=۳ \Rightarrow m=۱$

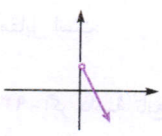
۸۳- تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$

x	۰	۱
y	۱	-۱



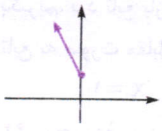
چون دامنه $\mathbb{R}$ است، دو نقطه را به هم وصل کرده و امتداد می‌دهیم.

۸۴- تابع با دامنهٔ اعداد حقیقی مثبت



قسمت‌هایی از نمودار الف قابل قبول است که طول (x) نقاط مثبت هستند.

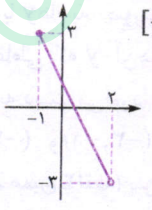
۸۵- تابع با دامنهٔ $(-\infty,۰]$



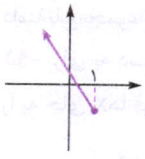
قسمت‌هایی از نمودار الف قابل قبول است که طول (x) نقاط منفی یا صفر هستند.

۸۶- تابع با دامنهٔ $[-۱,۲)$

x	-۱	۲
y	۳	-۳

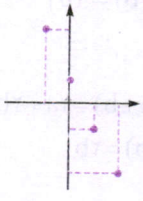


۸۷- تابع با دامنهٔ $(-\infty,۱]$



۸۸- تابع با دامنهٔ داده‌شده. همین ۴ نقطه خواهد بود.

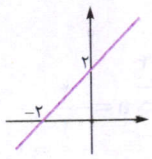
x	-۱	۰	۱	۲
y	۳	۱	-۱	-۳



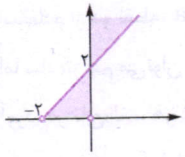
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۸۹- تابع خطی $f(x)=x+2$ را در حالت کلی رسم می‌کنیم. برای این کار، کافی است دو نقطه از خط را به دست آورده، آن‌ها را به هم وصل کرده و امتداد دهیم. دامنه و برد تابع در این حالت، برابر $\mathbb{R}$ است.

x	0	-2
y	2	0

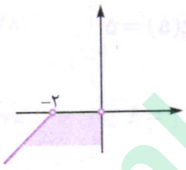


۹۰- برد تابع، مجموعه اعداد حقیقی مثبت یا بازهٔ $(0,+\infty)$ است. برد، همان تصویر نمودار روی محور yها است. اگر دامنهٔ تابع را بازهٔ $(-2,+\infty)$ در نظر بگیریم، تصویر نمودار روی محور yها، اعداد حقیقی مثبت می‌شود، بنابراین نمودار تابع $f(x)=x+2$ با برد اعداد حقیقی مثبت، به صورت مقابل بوده و دامنهٔ آن $(-2,+\infty)$ خواهد بود.

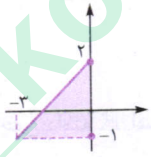


$y=0 \Rightarrow 0=x+2 \Rightarrow x=-2$

۹۱- بخش‌هایی از نمودار را در نظر می‌گیریم که تصویر آن روی محور yها (برد تابع)، مجموعه اعداد حقیقی منفی یا بازه $(-\infty,0)$ باشد. اگر دامنهٔ تابع را بازهٔ $(-\infty,-2)$ در نظر بگیریم، برد تابع مجموعه اعداد حقیقی منفی شده و نمودار به صورت بالا خواهد بود:



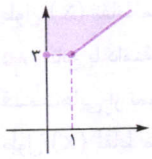
۹۲- بخش‌هایی از نمودار که تصویر آن روی محور yها (برد تابع) بازهٔ $[-1,2]$ می‌شود را در نظر می‌گیریم. اگر دامنهٔ تابع را بازهٔ $[-3,0]$ در نظر بگیریم، برد تابع مجموعهٔ $[-1,2]$ شده و نمودار تابع خطی به صورت مقابل است:



$y=-1 \Rightarrow x+2=-1 \Rightarrow x=-3$

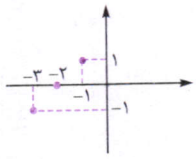
$y=2 \Rightarrow x+2=2 \Rightarrow x=0$

۹۳- اگر دامنهٔ تابع را بازهٔ $[1,+\infty)$ در نظر بگیریم، برد تابع بازهٔ $[3,+\infty)$ بوده و نمودار تابع به صورت مقابل به دست می‌آید:



$y=3 \Rightarrow x+2=3 \Rightarrow x=1$

۹۴- مجموعهٔ برد تابع یا yها به صورت $\{-1,0,1\}$ است: طول نقاطی که y آن‌ها، مجموعهٔ داده‌شده است را به دست می‌آوریم: پس نقاط $(-1,1)$، $(-2,0)$ و $(-3,-1)$، قابل قبول خواهند بود. *(فقط همین ۳ نقطه)* پس دامنهٔ تابع مجموعهٔ $\{-3,-2,-1\}$ خواهد بود.



۹۵- برای به دست آوردن مقدار تابع به ازای هر عدد، کافی است آن را به جای xها قرار دهیم، پس:

$$\left.\begin{array}{l} f(ab)=2ab \\ f(a)=2a\,,\ f(b)=2b \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{2ab}_{f(ab)} \neq \underbrace{(2a)}_{f(a)}\underbrace{(2b)}_{f(b)} \Rightarrow$$

رابطه درست نیست.

۹۶-

$$\left.\begin{array}{l} f(a+b)=2(a+b)=2a+2b \\ f(a)=2a\,,f(b)=2b \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+2b=2a+2b \Rightarrow$$

رابطه درست است.

۹۷-

$$\left.\begin{array}{l} g(ab)=3ab-1 \\ g(a)=3a-1\,,\ g(b)=3b-1 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 3ab-1 \neq (3a-1)(3b-1) \Rightarrow$ رابطه درست نیست.

۹۸-

$$\left.\begin{array}{l} g(a+b)=3(a+b)-1 \\ g(a)=3a-1\,,\ g(b)=3b-1 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow 3(a+b)-1 \neq 3a-1+3b-1 \Rightarrow$ رابطه درست نیست.

۹۹- تابع خطی را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. با توجه به جدول

x	0	5	10	15
y	0	75	150	225

، $f(0)=0$ و $f(5)=75$، بنابراین:

الف) $f(0)=0 \Rightarrow 0+b=0 \Rightarrow b=0\,,\ f(5)=75$

$\Rightarrow 5a+0=75 \Rightarrow a=15 \Rightarrow f(x)=15x$

ب) $x=36 \Rightarrow f(36)=15\times 36=540$ کیلومتر طی می‌شود.

پ) $y=325 \Rightarrow 325=15x \Rightarrow x=\frac{325}{15}\simeq 21/6$ بنزین مصرف می‌شود.

ت) x همان بنزین مصرفی است، چون $0\le x\le 40$ است، پس دامنهٔ تابع بازهٔ $[0,40]$ خواهد بود.

۱۰۰- **الف)**

x	0	1	2	10	x
y	200	200+75	200+2(75)	200+10(75)	200+x(75)

$\Rightarrow y=200+75x$

ب) x کیلومتر طی شده است، پس $x=27$ قرار می‌دهیم:

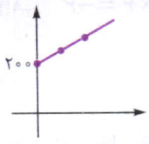
$y=200+75(27)=2225$ تومان

پ) y همان کرایهٔ تاکسی است، پس $y=1800$ قرار می‌دهیم:

$1800=200+75x \Rightarrow x=\frac{1600}{75}\simeq 21/3$

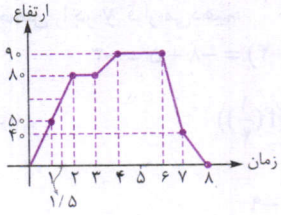
حدوداً ۲۱/۳ کیلومتر را می‌توان طی نمود.

ت) دامنهٔ تابع بازهٔ $[0,+\infty)$ است (X *کیلومتر طی‌شده است که منفی نمی‌تونه باشه)*



۱۰۱- **الف)** نمودار به صورت مقابل است.

ب) در هر زمان، ارتفاع بالن فقط یک عدد خواهد بود، پس رابطه تابع است.



پ) $[0,8]=$ دامنه و $[0,90]=$ برد

ت) از شروع حرکت تا پایان ساعت دوم، بین ساعت‌های سوم تا چهارم

ث) بین ساعت‌های دوم تا سوم و بین ساعت‌های چهارم تا ششم

ج) با استفاده از نمودار، بالن ۱/۵ پس از شروع پرواز، حدوداً در ارتفاع ۶۵ متری بوده است.

۱۰۲-

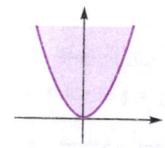
$$\left.\begin{array}{l} \text{دامنه}=\{2a-b,-1,2,1\}=\{-1,2,4,1\} \Rightarrow 2a-b=4 \\ \text{برد}=\{3,4,7,a+2b\}=\{3,4,7,-8\} \Rightarrow a+2b=-8 \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow a=0\,,\ b=-4$

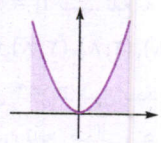
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

دامنهٔ تابع، تصویر نمودار روی محور xها و برد تابع تصویر روی محور yها است.

۱۰۳-

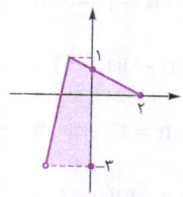


برد $= R = [0, +\infty)$

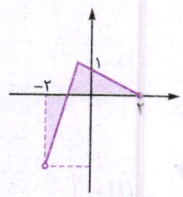


دامنه $= D = \mathbb{R}$

۱۰۴-

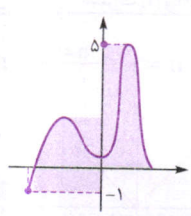


برد $= R = (-3, 1]$

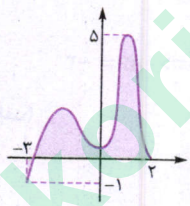


دامنه $= D = (-2, 2]$

۱۰۵-

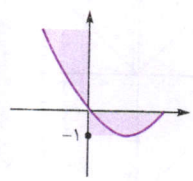


برد $= R = [-1, 5]$

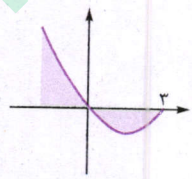


دامنه $= D = [-3, 2]$

۱۰۶-

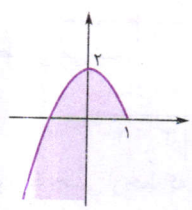


برد $= R = [-1, +\infty)$

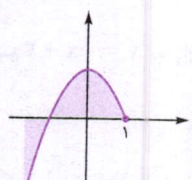


دامنه $= D = (-\infty, 3]$

۱۰۷-



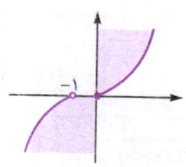
برد $= R = (-\infty, 2]$



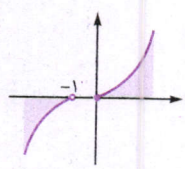
دامنه $= D = (-\infty, 1]$

دامنهٔ تابع، تصویر نمودار روی محور xها و برد تابع تصویر روی محور yها است.

۱۰۸-



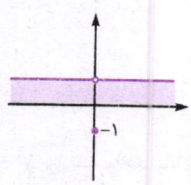
برد $= R = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$



دامنه $= D = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$

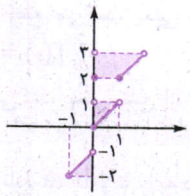
۱۰۹-

برد $= R = \{-1, 1\}$

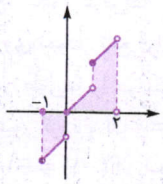


دامنه $= D = \mathbb{R}$

۱۱۰-

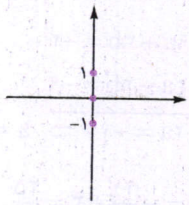


برد $= R$
$= [-2, -1) \cup [0, 1) \cup [2, 3)$

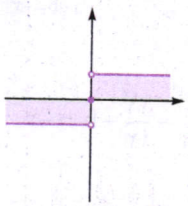


دامنه $= D = [-1, 2)$

۱۱۱- (تصویر روی محور yها این‌جوری می‌شه)

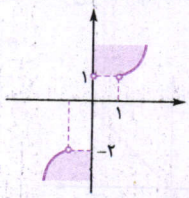


برد $= R = \{-1, 0, 1\}$

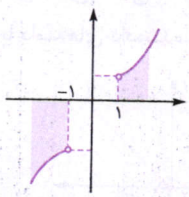


دامنه $= D = \mathbb{R}$

۱۱۲-

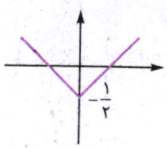


برد $= R = (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$



دامنه $= D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

۱۱۳- نمودار تابع به صورت مقابل است. چون دامنه داده نشده، بزرگ‌ترین مجموعهٔ اعداد ممکن که می‌توانیم به جای x قرار دهیم را در نظر می‌گیریم، به ازای هر عدد حقیقی که به جای x قرار دهیم، عدد حقیقی برای y به دست می‌آید.



پس دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ و برد تابع $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ است.

۱۱۴- $f(1) = 1, f(0) = \frac{1}{2}, f(-2) = 2 - (-2) = 4$

$\Rightarrow f(1) + f(0) + f(-2) = \frac{11}{2}$

و $f(\underbrace{f(-1)}_{3}) = 3$

۱۱۵- شعاع کره

۱۱۶- $\{1\}$ = برد است، پس برد تابع f یک عضو داشته و تابع ثابت است.

۱۱۷- اگر $x \geq 0$ باشد، $|x| = x$ و اگر $x < 0$ باشد، $|x| = -x$ می‌شود (مثلاً $|-2| = -(-2) = 2$)، پس تابع قدرمطلق به صورت $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ نیز نمایش داده می‌شود.

۱۱۸- تابع ثابت است، پس $f(x) = k$ است که k عددی حقیقی است. حالا چون $f(1) = 5$، پس ضابطه $f(x) = 5$ خواهد بود.

۱۱۹- $y = \frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x$؛ پس تابع همانی (البته $(x \neq 1)$ هستش) است.

۱۲۰- f تابع همانی است؛ پس $f(x) = x$ یعنی $f(2) = 2$ و $f(1) = 1$.
از طرفی g تابع ثابت است؛ پس برای هر x، $g(x) = k$؛ بنابراین داریم: $\frac{6+k}{2k+1} = \frac{10}{9} \Rightarrow 54 + 9k = 20k + 10 \Rightarrow k = 4$
پس $g(0) = k = 4$ می‌شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۲۱- تابع، محور عرض‌ها را در نقطهٔ ۲ قطع می‌کند، یعنی نقطهٔ $(0,3)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس $f(0)=2$.

تابع محور طول‌ها را در نقطهٔ ۳ قطع می‌کند، یعنی تابع از نقطهٔ $(3,0)$ عبور کرده و لذا $f(3)=0$.

هم‌چنین $f(-1)=-1$. با جای‌گذاری در تابع a، b و c را به دست می‌آوریم:

$$f(0)=2 \Rightarrow f(0)=0+0+c \Rightarrow 2=c$$

$$f(3)=0 \Rightarrow f(3)=9a+3b+2 \Rightarrow 9a+3b+2=0$$

$$f(-1)=-1 \Rightarrow f(-1)=a-b+2 \Rightarrow \underbrace{a-b+2=-1}_{a-b=-3}$$

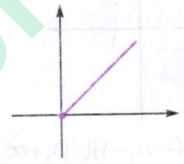
$$\Rightarrow \begin{cases} 9a+3b=-2 \\ 3a-3b=-9 \end{cases}$$

$$12a=-11 \Rightarrow a=-\frac{11}{12} \Rightarrow -\frac{11}{12}-b=-3$$

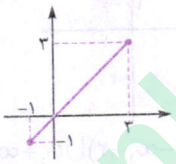
$$\Rightarrow b=-\frac{11}{12}+3=\frac{25}{12}$$

۱۲۲- ضابطهٔ تابع همانی $y=x$ (نیمساز ناحیهٔ اول و سوم) است. این تابع را با دامنه‌های داده‌شده، رسم می‌کنیم:

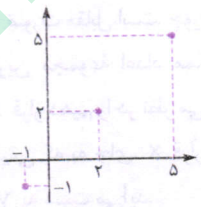
الف)



ب)



پ)



۱۲۳- $f(x)=x$ و $g(x)=k$ را در نظر می‌گیریم؛ پس از رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$\frac{3(2)+k}{2k+1}=\frac{10}{9} \Rightarrow 54+9k=20k+10$$

$$\Rightarrow 11k=44 \Rightarrow k=4$$

پس به ازای هر x ورودی، خروجی تابع g برابر ۴ است؛ بنابراین $g(0)=4$.

۱۲۴- روش اول: ضابطهٔ تابع f باید ساده شده و به صورت $f(x)=k$ شود یعنی:

$$f(x)=abx-ax^2+2b-2x-7x^2$$

$$=(-a-7)x^2+(ab-2)x+2b$$

باید کاری کنیم تا جملات x^2 و x از بین برود؛ پس ضرایب آن‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$-a-7=0 \Rightarrow -a=7 \Rightarrow a=-7$$

$$ab-2=0 \Rightarrow -7b-2=0 \Rightarrow 7b=-2 \Rightarrow b=\frac{-2}{7}$$

$$\Rightarrow f(x)=2b=2\times(-\frac{2}{7})=-\frac{4}{7} \Rightarrow R_f=\left\{-\frac{4}{7}\right\}$$

۱۲۵- تابع ثابت است؛ پس عضوهای دوم زوج مرتب‌ها همگی برابرند:

$$\begin{cases} 3m+2=8 \Rightarrow 3m=6 \Rightarrow m=2 \\ t=8 \\ n^2-2n=8 \Rightarrow n^2-2n-8=0 \Rightarrow (n-4)(n+2)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=4 \\ n=-2 \end{cases}$$

اگر $n=-2$ باشد، تابع به صورت زیر می‌شود: (که چهارعضوی بوده و قابل قبول نیست.)

$$f=\{(3,8),(2,8),(-9,8),(4,8)\}$$

ولی اگر $n=4$ باشد، تابع به صورت $f=\{(3,8),(2,8),(3,8),(4,8)\}$ که با حذف عضو تکراری، ۳عضوی است؛ پس $n=4$ قبول بوده و داریم: $m+n+t=2+4+8=14$

۱۲۶- در تابع همانی، هر ورودی با خروجی مساوی است؛ پس مولفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب مساوی‌اند:

$$n^2-3n=4 \Rightarrow n^2-3n-4=0$$

$$\Rightarrow (n+1)(n-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=-1 \\ n=4 \end{cases} \quad (I)$$

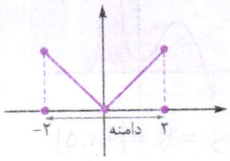
$$n^2+n=20 \Rightarrow n^2+n-20=0$$

$$\Rightarrow (n-4)(n+5)=0 \Rightarrow \begin{cases} n=4 \\ n=-5 \end{cases} \quad (II)$$

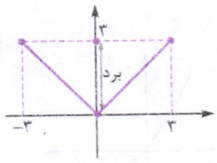
$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I) و (II)}} n=4$$

$$m+n=1 \xrightarrow{n=4} m+4=1 \Rightarrow m=-3$$

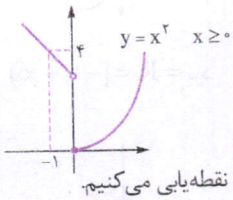
۱۲۷- الف)



ب)



۱۲۸-

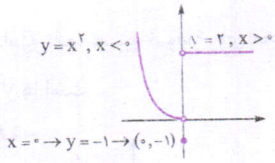


برای رسم $y=-x+3$ به ازای $x<0$، نقطه‌یابی می‌کنیم:

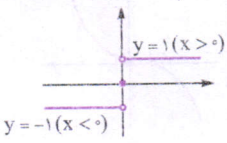
x	۰	-۱
y	۳	۴

چون $x<0$ است نقطهٔ مرزی توخالی شده و فقط بخشی از خط که $x<0$ است، قبول می‌شود.

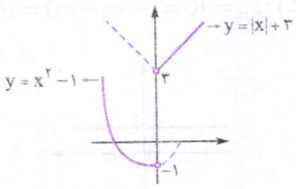
۱۲۹-



۱۳۰-



۱۳۱-

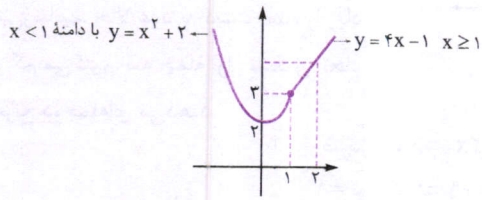


$y=|x|$ را سه واحد بالا می‌بریم تا $y=|x|+3$ به دست آید. چون $x>0$ است، فقط شاخهٔ راست قبول است.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

$y=x^2$ را یک واحد پایین می‌آوریم تا $y=x^2-1$ رسم شود. چون $x<0$ است، فقط شاخهٔ چپ قبول است.

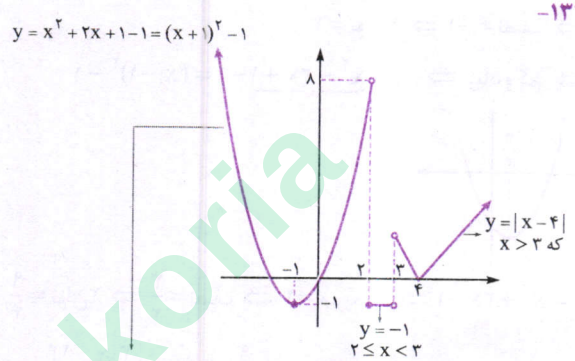
۱۳۲-



برای رسم $y=4x-1$، نقطه‌یابی می‌کنیم. یک بار مرز دامنه و بار دیگر عددی بیشتر از یک می‌دهیم:

x	۱	۲
y	۳	۷

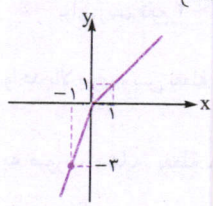
۱۳۳-



$y=x^2$ را یک واحد به چپ و یک واحد پایین می‌بریم. قسمتی از آن که $x<2$ است، قابل قبول است.

۱۳۴- شرط گذاشته و قدرمطلق را برمی‌داریم:

$$y=2x-|x|=\begin{cases}2x-x & x\geq 0\\ 2x+x & x<0\end{cases}=\begin{cases}x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases}$$

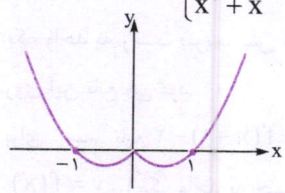


x	۰	۱
y	۰	۱

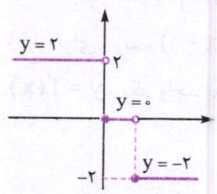
x	۰	-۱
y	۰	-۳

۱۳۵-

$$y=x^2-|x|=\begin{cases}x^2-x & x\geq 0\\ x^2+x & x<0\end{cases}$$

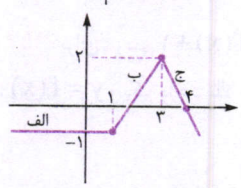


۱۳۶- معادلهٔ خطوط افقی $y=k$ است. هر خط را در دامنه‌اش (محدودهٔ x ها) می‌نویسیم تا ضابطهٔ تابع مشخص شود. پس:



$$y=\begin{cases}2 & x<0\\ 0 & 0\leq x<1\\ -2 & x\geq 1\end{cases}$$

۱۳۷- تابع مقابل از سه قطعهٔ الف، ب و ج تشکیل شده است. قطعهٔ الف که خط افقی x با دامنهٔ $x\leq 1$ است اما قطعهٔ ب، خطی است که از نقطه‌های $(1,-1)$ و $(3,2)$ عبور کرده و دامنهٔ آن $1\leq x\leq 3$ است.



خط را به صورت $y=ax+b$ در نظر می‌گیریم. با جای‌گذاری دو نقطه داریم: $-1=a+b$ و $2=3a+b$.

با حل دستگاه $a=\frac{3}{2}$ و $b=-\frac{5}{2}$ به دست می‌آید، پس معادلهٔ خط $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$ به دست می‌آید.

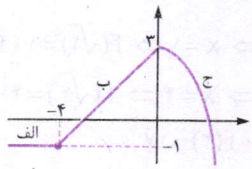
قطعهٔ ج نیز خطی است که از نقطه‌های $(3,2)$ و $(4,0)$ عبور می‌کند. شبیه قطعهٔ ب، خط را به صورت $y=ax+b$ در نظر می‌گیریم. با جای‌گذاری نقطه‌ها داریم: $2=3a+b$ و $0=4a+b$ و لذا $a=-2$ و $b=8$ به دست می‌آید. بنابراین ضابطهٔ تابع قطعه‌ای می‌شود:

(توجه داشته باشید که اگر در ضابطهٔ دوم $1\leq x\leq 3$ بنویسید تابع تغییری نمی‌کند.)

$$y=\begin{cases}-1 & x\leq 1\\ \frac{3}{2}x-\frac{5}{2} & 1<x<3\\ -2x+8 & x\geq 3\end{cases}$$

۱۳۸-

الف: $y=-1 \quad x\leq -4$



ب: معادلهٔ خطی که از نقاط $(-4,-1)$ و $(0,3)$ می‌گذرد

$$\xrightarrow{\text{شبیه قسمت ب}} y=x+3\ ,\ -4\leq x\leq 0$$

ج: $y=-x^2+3 \quad x\geq 0$

پس ضابطهٔ تابع، $y=\begin{cases}-1 & x\leq -4\\ x+3 & -4\leq x\leq 0\\ -x^2+3 & x\geq 0\end{cases}$ خواهد بود. توجه دارید که مساوی‌ها را می‌توانید در یکی از ضابطه‌ها یا هر دو قرار دهید. چون به ازای $x=-4$، ضابطهٔ اول و دوم یکی می‌شوند، یا به ازای $x=0$ ضابطهٔ دوم و سوم مقدارهای یکسانی دارند.

۱۳۹- معادله‌ای تابع است که به ازای هر x، بیشتر از یک y نداشته باشد. در معادلهٔ الف، به ازای $x>0$ از ضابطهٔ بالا و به ازای $x<0$ از ضابطهٔ پایین استفاده می‌شود. واضح است که به ازای هر کدام از این x ها، فقط یک y به دست می‌آید اما به ازای $x=0$ از هر دو ضابطه می‌توانیم استفاده کنیم. پس

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases}y=2(0)+1=1\\ y=1-0=1\end{cases}$$

بنابراین به ازای $x=0$ نیز، فقط یک y به دست می‌آید. پس رابطه یا معادلهٔ داده‌شده، تابع است. اما در قسمت ب، به ازای $x=0$، در ضابطهٔ بالا $y=1$ و در ضابطهٔ پایین $y=0$ به دست می‌آید. بنابراین تابع نخواهد بود.

۱۴۰- به جای x، $x-1$ قرار می‌دهیم.

$$f(x)=5x+3 \Rightarrow f(x-1)=5(x-1)+3=5x-2$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{5(2+h)+3-13}{h}=\frac{5h}{h}=5$$

۱۴۱- تابع خطی را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. چون $f(x+1)=a(x+1)+b$ است، با جای‌گذاری در رابطهٔ $f(x+1)=f(x)+1$ داریم:

$$a(x+1)+b=ax+b+1 \Rightarrow ax+a+b=ax+b+1$$

رابطهٔ به دست آمده وقتی برقرار است که $a+b=b+1$ باشد، پس $a=1$ و b هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. به عبارت دیگر، تابع‌های خطی $f(x)=x+b$ در رابطهٔ داده‌شده، همواره صدق می‌کنند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۴۲- نقطهٔ $A=(-1,-2)$ روی تابع $y=x+2a$ قرار دارد، پس مختصات آن را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم: $-2=-1+2a$ و لذا $a=-\frac{1}{2}$ به دست می‌آید. از طرفی طول نقطهٔ B، برابر ۴ است. با جای‌گذاری در تابع $y=x+2a$ عرض آن به دست می‌آید: $y=4+2(-\frac{1}{2})=3$، بنابراین $B=(4,3)$ خواهد بود. نقطهٔ B روی سهمی است، بنابراین با جای‌گذاری در معادلهٔ سهمی داریم:

$$3=4(4)^2+2b(4)+27 \Rightarrow -88=8b \Rightarrow b=-11$$

۱۴۳- ابتدا $f(2)$ را به دست می‌آوریم، پس در رابطهٔ داده‌شده، $x=2$ قرار می‌دهیم:

$$x=2 \Rightarrow f(2)+2f(2)=5 \Rightarrow 3f(2)=5$$

$$\Rightarrow f(2)=\frac{5}{3} \Rightarrow f(x)+x(\frac{5}{3})=x^2+1$$

حالا:

$$x=1 \Rightarrow f(1)+\frac{5}{3}=2 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{3}$$

۱۴۴-

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(\sqrt{1})=1+4 \Rightarrow f(1)=5\\ \sqrt{x}=2 \Rightarrow x=4 \Rightarrow f(\sqrt{4})=4+4\sqrt{4} \Rightarrow f(2)=12\end{array}\right\}$$

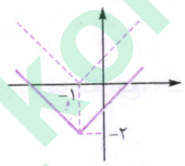
$$\Rightarrow f(1)+f(2)=17$$

۱۴۵- ۳ واحد چپ

۱۴۶- دامنه

۱۴۷- برد

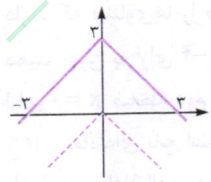
۱۴۸-



$y=\overbrace{|x+1|}^{\text{یکی چپ}}\overset{\text{دوتاپایین}}{-2}$

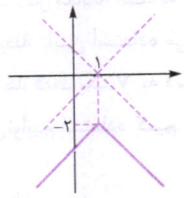
برد = تصویر روی yها = $[-2,+\infty)$

۱۴۹- نمودار $y=|x|$ را نسبت به محور xها قرینه و ۳ واحد بالا می‌بریم.



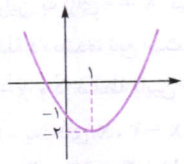
برد $=(-\infty,3]$

۱۵۰- نمودار $y=|x|$ را یک واحد به راست، قرینه نسبت به محور xها و ۲ واحد پایین می‌بریم. *(ترتیب مهمه)*



برد $=(-\infty,-2]$

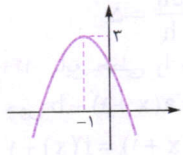
۱۵۱- کافی است نمودار $y=x^2$ را یک واحد به راست و ۲ واحد پایین ببریم.



برد $=[-2,+\infty)$

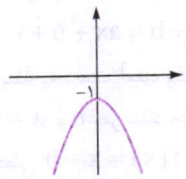
$y=\overset{\text{قرینه}}{-}\overbrace{|x-1|}^{\text{یکی راست}}\overset{\text{دوتاپایین}}{-2}$

۱۵۲- کافی است نمودار $y=x^2$ را به ترتیب، یک واحد به چپ، قرینه نسبت به محور xها و ۳ واحد بالا ببریم.



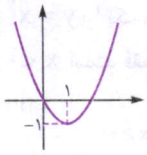
برد $=(-\infty,3]$

۱۵۳- کافی است نمودار $y=x^2$ را قرینه نسبت به محور xها و یک واحد پایین ببریم.



برد $=(-\infty,-1]$

۱۵۴- برای مربع کامل کردن، ضریب x را نصف کرده و سپس آن را به توان ۲ می‌رسانیم. حالا عدد به دست آمده را زیاد و کم می‌کنیم. سه جملهٔ اول تشکیل اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌دهند.



$y=x^2-2x \Rightarrow$ ضریب x $=-2$

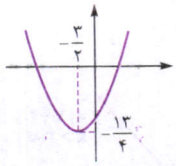
$\Rightarrow$ نصف $=-1 \Rightarrow$ توان۲ $=1$

$\Rightarrow$ زیاد و کم $\Rightarrow y=\underbrace{x^2-2x+1}-1=(x-1)^2-1$

$y=x^2-2x \Rightarrow$ ضریب x $=-2$

$\Rightarrow$ نصف $=-1 \Rightarrow$ توان۲ $=1$

$\Rightarrow$ زیاد و کم $\Rightarrow y=\underbrace{x^2-2x+1}-1=(x-1)^2-1$



$y=x^2+3x-1 \Rightarrow$ ضریب x $=3 \Rightarrow$ نصف $=\frac{3}{2} \Rightarrow$ توان۲ $=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow$ زیاد و کم $\Rightarrow y=\underbrace{x^2+3x+\frac{9}{4}}-\frac{9}{4}-1=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}$

با توجه به نمودار، برد تابع $y=x^2-2x$ بازهٔ $[-1,+\infty)$ و برد تابع $y=x^2+3x-1$، بازهٔ $[-\frac{13}{4},+\infty)$ به دست می‌آید.

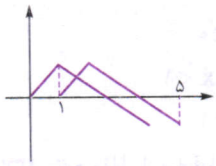
۱۵۵- برای رسم تابع $y=f(x)+2$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را ۲ واحد بالا ببریم، پس نقطهٔ داده‌شده تبدیل به نقطهٔ $A'=\begin{bmatrix}-1\\5\end{bmatrix}$ می‌شود.

به صورت مشابه، نقطهٔ A تبدیل به نقطهٔ $B'=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ روی نمودار $y=f(x)-1$ می‌شود.

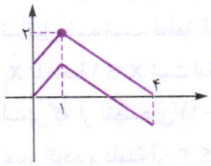
برای رسم تابع $y=f(x-1)$ نیز کافی است نمودار $y=f(x)$ را یک واحد به راست ببریم، پس نقطهٔ A تبدیل به نقطهٔ $C'=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$ روی این تابع می‌شود.

برای رسم تابع $y=f(x+1)-2$ نیز کافی است نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به چپ و دو واحد پایین ببریم، پس نقطهٔ A، تبدیل به نقطهٔ $D'=\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ می‌شود.

۱۵۶- برای رسم $y=f(x-1)$، نمودار $y=f(x)$، یک واحد به راست می‌رود.

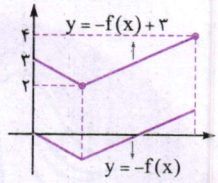


۱۵۷- برای رسم $y=f(x)+1$، نمودار $y=f(x)$، یک واحد بالا می‌رود.

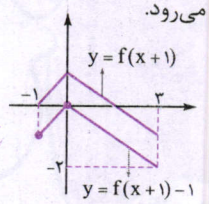


بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۵۸- نمودار اصلی قرینه نسبت به محور xها و ۳ تا بالا می‌رود.



۱۵۹- نمودار اصلی یکی به چپ و یکی پایین می‌رود.



۱۶۰- اگر در ضابطهٔ تابع به جای x قرار دهیم $x-۳$ نمودار ۳ واحد به طرف جلو می‌رود:

$$y=-(x-۳)^۲+۲(x-۳)+۵=-(x^۲-۶x+۹)$$
$$+۲x-۶+۵=-x^۲+۸x-۱۰$$

اگر تابع جدید را ۲- کنیم نمودار آن دو واحد پایین می‌رود پس ضابطهٔ نمودار جدید $y=-x^۲+۸x-۱۲$ است. معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول $y=x$ است پس باید نامعادلهٔ $-x^۲+۸x-۱۲>x$ را حل کنیم:

$$-x^۲+۷x-۱۲>۰$$
$$\Rightarrow x^۲-۷x+۱۲<۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x-۴)<۰$$

	۳		۴	
+		−		+
		ج		

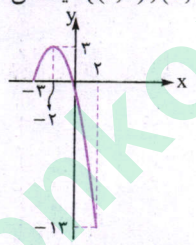
پس تابع در بازهٔ (۳,۴) بالای نیمساز ناحیهٔ اول می‌شود.

پاسخ آزمون جمع بندی فصل پنجم

۱- **الف)** نادرست است (دامنه برابر $\mathbb{R}$ و برد آن $[-۱,+\infty)$ است.).

ب) نادرست است (مثلاً دامنه و برد تابع $\{(۱,۲),(۲,۱)\}$ یکسان است ولی تابع همانی نیست.)

پ) نادرست است (برد تابع $[-۱۳,۳]$ است.)



ت) نادرست است (برد تابع مجموعهٔ $\{۲,-۱\}$ است که دو عضو دارد.)

۲- $a^۲-۲=۷ \Rightarrow a^۲=۹ \Rightarrow a=\pm۳$

$a=۳ \Rightarrow f=\{(۳,۵),(۶,۷),(۳,-۲),(۶,۷),(۳,b)\}$

نمی‌تواند تابع باشد.

$a=-۳ \Rightarrow f=\{(-۳,۵),(۶,۷),(۳,-۲),(۶,۷),(۳,b)\}$
$\Rightarrow b=-۲$

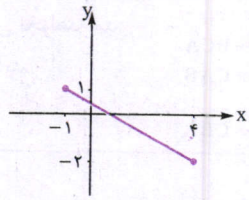
پس $a=-۳$ و $b=-۲$ باید باشد. داریم:

$$\frac{f(-۳)+f(۳)}{f(۶)}=\frac{۵+(-۲)}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

۳- **الف)** چنین تابعی وجود ندارد. (حتی اگر هر چهار عضو دامنه به چهار عضو مختلف نظیر شوند برد ۴ عضو دارد.)

ب) در تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$ داریم $D_f=R_f=\{۱,۲\}$ ولی هر عضو به خودش نظیر نمی‌شود پس تابع همانی نیست.

پ) نمودار تابع خطی به صورت مقابل است، تابع را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم:

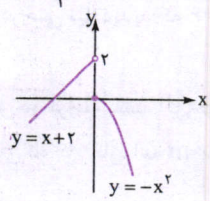


$$f(-۱)=۱ \Rightarrow -a+b=۱$$
$$f(۴)=-۲ \Rightarrow ۴a+b=-۲$$
$$۵a=-۳$$
$$\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵} \Rightarrow b=\frac{۲}{۵}$$

۴- f همانی است، پس $f(x)=x$ و g تابعی ثابت است، پس:

$$g(\frac{\sqrt{۲}}{۲})-۳f(-۸)=-۴-۳(-۸)=۲۰$$

۵- نمودار تابع:



$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=(-\infty,۲)$

۶- $-۱<۰$ پس باید آن را در ضابطهٔ بالا جای‌گذاری کنیم:

$$-a-۳=۳ \Rightarrow -a=۶ \Rightarrow a=-۶$$

$۲\geq ۰$ پس آن را در ضابطهٔ پایین جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲b(۲)^۲+۷=۵ \Rightarrow ۸b=-۲ \Rightarrow b=-\frac{۱}{۴}$$

۷- معادلهٔ سهمی را به صورت $f(x)=ax^۲+bx+c$ در نظر می‌گیریم. داریم:

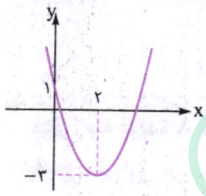
$$f(۰)=۱ \Rightarrow c=۱$$
$$f(۱)=-۲ \Rightarrow a+b+۱=-۲ \Rightarrow a+b=-۳$$
$$f(۲)=-۳ \Rightarrow ۴a+۲b+۱=-۳ \Rightarrow ۴a+۲b=-۴$$
$$\xrightarrow{\times(-۲)} \begin{cases}-۲a-۲b=۶\\ ۴a+۲b=-۴\end{cases}$$
$$۲a=۲ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow b=-۴$$

پس ضابطهٔ سهمی به صورت $f(x)=x^۲-۴x+۱$ است.

با استفاده از روش مربع کامل داریم:

$$f(x)=x^۲-۴x+۴-۴+۱=(x-۲)^۲-۳$$

برای رسم کافی است $y=x^۲$ را دو واحد به راست و ۳ واحد پایین ببریم:

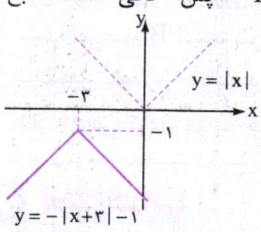


$D_f=\mathbb{R}$

$R_f=[-۳,+\infty)$

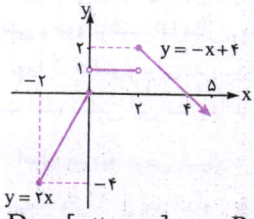
۸- معادلهٔ جدید تابع به‌صورت $f(x)=|x+۲|+۱$ می‌شود.

الف) $-f(۱+x)=-(|۱+x+۲|+۱)$ پس کافی است تابع $y=-|x+۳|-۱$ را رسم کنیم:



ب) $f(-۳)=|-۳+۲|+۱=۲$

۹- **الف)**

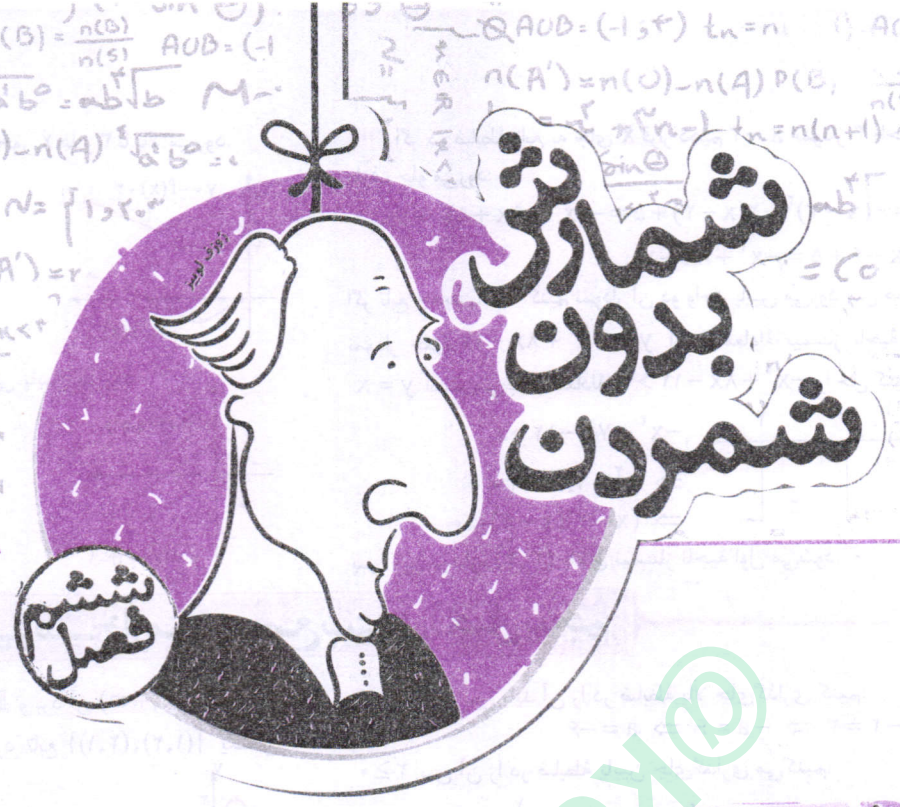


$$f(x)=\begin{cases}-x+۴ & x\geq ۲\\ ۱ & ۰<x<۲\\ ۲x & -۲\leq x\leq ۰\end{cases}$$

ب) $D_f=[-۲,+\infty]$ $\quad R_f=[-۴,۲]$

شمارش بدون شمردن

فصل ششم



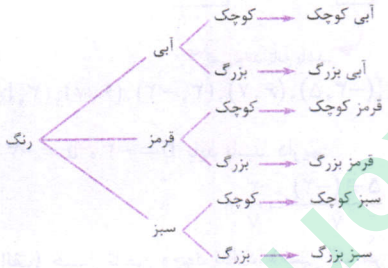
درس ۱ شمارش

شمارش با استفاده از جدول یا نمودار درختی

فرض کنید یک شرکت تولیدی لباس‌های ورزشی، پیراهن‌هایی با رنگ‌های آبی، قرمز و سبز در سایزهای کوچک و بزرگ، تولید می‌کند. به نظر شما این شرکت، چند پیراهن ورزشی مختلف تولید می‌کند؟ جدول ۲×۳ مقابل را در نظر بگیرید. جدول، ۶ خانه دارد، بنابراین شرکت، ۶ پیراهن ورزشی در رنگ و سایزهای مختلف تولید می‌کند.

	بزرگ	کوچک
آبی	آبی بزرگ	آبی کوچک
قرمز	قرمز بزرگ	قرمز کوچک
سبز	سبز بزرگ	سبز کوچک

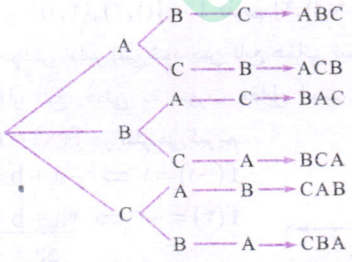
پاسخ بالا را می‌توانستیم با یک نمودار دیگر که به آن **نمودار درختی** می‌گوییم نیز به دست آوریم.



مثال **سه دوندهٔ A ، B و C در یک مسابقه شرکت کرده‌اند. با استفاده از نمودار درختی، حالت‌های نفرات اول تا سوم را مشخص کنید.**

پاسخ نفر اول هر یک از سه دونده می‌تواند باشد، بنابراین برای آن، سه شاخه در نظر می‌گیریم. حالا فرض کنید نفر A اول شده باشد، پس نفر دوم می‌تواند B یا C باشد، پس دو شاخه از A بیرون می‌آوریم. اگر نفر دوم B باشد، نفر سوم C و اگر نفر دوم C باشد، نفر سوم B است، پس از هر کدام از شاخه‌های آخر یکی بیشتر بیرون نخواهد آمد. با تکمیل نمودار، ۶ حالت برای به خط پایان رسیدن دونده‌ها به دست می‌آید.

(البته فرض کردیم دو نفر هم‌زمان نمی‌رسند.)



اصل ضرب

در مثال قبل، پیراهن‌ها در سه رنگ مختلف و در دو سایز می‌توانند تولید شوند. همان‌گونه که دیدید ۶ = ۲ × ۳ حالت برای تولید پیراهن‌های ورزشی وجود داشت. اما مثال دونده‌ها نیز از سه قسمت تشکیل یافته بود. نفر اول که سه حالت داشت و با توجه به این‌که یک نفر اول می‌شود، برای نفر دوم، ۲ حالت و برای نفر سوم نیز ۱ حالت بیشتر باقی نخواهد ماند. با نمودار درختی نیز دیدید که ۶ = ۱ × ۲ × ۳ حالت برای مقام‌های نفرات به دست آمد. تمامی این مثال‌ها ما را به اصل مهم صفحهٔ بعد می‌رسانند:

اصل ضرب: فرض کنید کاری از دو جزء تشکیل شده باشد یا انجام آن شامل دو مرحله باشد. اگر جزء اول، به n روش مختلف قابل انجام بوده و به ازای هر کدام از حالت‌ها، جزء دوم به m روش قابل انجام باشد، آن‌گاه کل کار را به $n \times m$ طریق می‌توان انجام داد.

@ketab_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته

۱ اگر کل کار به جای دو جزء از چندین جزء هم تشکیل یافته باشد، برای انجام کل کار باید حالت‌های مختلف اجزا را در هم ضرب کنید.

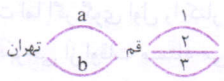
۲ برای اصل ضرب [illegible] استفاده می‌شود (این جزء و اون جزء).

مثال بین شهرهای تهران تا قم دو مسیر و [illegible] قم تا اصفهان ۳ مسیر وجود دارد. فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان مسافرت کند. او به چند طریق مختلف می‌تواند:

الف) از تهران به اصفهان برود؟

ب) از تهران به اصفهان رفته و به تهران بازگردد؟

پاسخ **الف** کاری که این فرد قصد انجام آن را دارد، مسافرت از تهران به اصفهان است. این کار از دو جزء (دو مرحله) تشکیل یافته است. او از ۲ مسیر می‌تواند به قم برود و از آن‌جا از ۳ مسیر به اصفهان برود. بنابراین طبق اصل ضرب $۲ \times ۳ = ۶$ مسیر مختلف برای مسافرت از تهران به اصفهان وجود دارد.



ب این بار کار او از ۴ مرحله، تشکیل یافته است. اول باید از تهران به قم برود که ۲ حالت دارد. از قم به اصفهان ۳ حالت، دوباره از اصفهان به قم ۳ حالت و در آخر باید از قم به تهران بیاید که ۲ حالت دارد. بنابراین او به $۲ \times ۳ \times ۳ \times ۲ = ۳۶$ روش، می‌تواند به اصفهان رفته و به تهران بازگردد.

مثال **با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵:**

الف) چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت؟

ب) چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

پاسخ **الف** عدد سه رقمی از سه جزء تشکیل شده است. بنابراین ۳ خانه در نظر می‌گیریم. رقم یکان، دهگان و صدگان هر کدام، ۵ حالت دارند؛ بنابراین طبق اصل ضرب، ۱۲۵ عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت. حواستان باشد که اعداد، رقم‌های تکراری نیز می‌توانند داشته باشند، مثلاً ۱۲۲ یا ۳۳۳ هم قبول است.

$$\underset{\text{صدگان}}{\underline{۵}} \times \underset{\text{دهگان}}{\underline{۵}} \times \underset{\text{یکان}}{\underline{۵}} = ۱۲۵$$

ب دوباره سه جای خالی در نظر می‌گیریم. همهٔ ارقام می‌توانند در صدگان قرار بگیرند. درست است که رقم صدگان ۵ حالت دارد اما بالاخره یکی از پنج رقم در آن به کار می‌رود، (مثلاً ۲) بنابراین برای پرکردن رقم دهگان، ۴ رقم دیگر باقی می‌ماند (چون تکراری نباید باشد). به همین ترتیب رقم یکان را می‌توان با ۳ حالت پر نمود. پس طبق اصل ضرب ۶۰ عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت.

$$\underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۶۰$$

توجه در اصل ضرب اگر جزء یا مرحله‌ای محدودیت داشته باشد، از آن شروع می‌کنیم.

مثال **چند عدد سه‌رقمی زوج، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان ساخت؟**

پاسخ باز هم سه جای خالی می‌گیریم، درمثال قبل این‌که از یکان یا صدگان برای پرکردن شروع کنیم، تفاوتی ندارد. این‌جا چه‌طور؟ عددی زوج است که رقم یکان آن زوج باشد، بنابراین رقم یکان محدودیت داشته و هر عددی را که دلمان بخواهد، نمی‌توانیم در یکان قرار دهیم. رقم یکان می‌تواند یکی از اعداد ۲ یا ۴ باشد، پس دو حالت دارد. توجه کنید که یکی از رقم‌ها در یکان به کار می‌رود، پس ۴ رقم دیگر باقی می‌ماند. چون عدد ساخته‌شده نباید رقم تکراری داشته باشد، برای دهگان و صدگان به ترتیب ۴ و ۳ رقم باقی می‌ماند، پس $۳ \times ۴ \times ۲ = ۲۴$ عدد سه‌رقمی زوج ساخته می‌شود.

$$\underline{۳} \times \underline{۴} \times \underset{\{۲,۴\}}{\underline{۲}} = ۲۴$$

مثال **فردی در یک آزمون ۱۰ سؤالی شرکت می‌کند. هر سؤال ۴ گزینه دارد. او به چند طریق می‌تواند به پرسش‌ها پاسخ دهد، هرگاه:**

الف) به همهٔ سؤال‌ها بخواهد پاسخ دهد.

ب) ممکن است به برخی از سؤال‌ها پاسخ ندهد؟

پ) مجبور باشد به ۳ سؤال اول پاسخ دهد ولی به بقیهٔ سؤال‌ها ممکن است پاسخ ندهد؟

پاسخ **الف** هر سؤال ۴ گزینه برای پاسخ دارد، پس به $\underbrace{۴ \times ۴ \times \cdots \times ۴}_{\text{۱۰ بار}} = ۴^{۱۰}$ روش می‌تواند پاسخ دهد. *(به عبارت دیگه تو این حالت، این قدر پاسخ‌نامهٔ مختلف ممکنه به وجود بیاد.)*

ب برای هر سؤال، ۵ امکان وجود دارد. ۴ گزینه به همراه این‌که ممکن است به سؤال پاسخ هم ندهد، پس $\underbrace{۵ \times ۵ \times \cdots \times ۵}_{\text{۱۰ بار}} = ۵^{۱۰}$ روش می‌تواند به سؤال‌ها پاسخ دهد.

پ ۳ سؤال اول، هر کدام ۴ حالت و ۷ سؤال باقی‌مانده، هر کدام، ۵ حالت دارند، پس به $۴ \times ۴ \times ۴ \times \underbrace{۵ \times ۵ \times \cdots \times ۵}_{\text{۷ بار}} = ۴^{۳} \times ۵^{۷}$ طریق مختلف می‌تواند پاسخ دهد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

تکرار یا عدم تکرار، مسئله این است.

یکی از چیزهایی که در حل مسئله‌های ضرب باید به آن توجه داشته باشید، این است که آیا تکرار در اشیای داده‌شده مجاز هست یا نیست، پس اول باید تکلیف این قضیه را روشن کرده و بعد شروع به شمارش کنیم.

۱ در بسیاری از مواقع خود مسئله می‌گوید که تکرار مجاز هست یا نیست. این‌جا که خدا پدر طراح سؤال را بیامرزد.

۲ اگر در مسئله صحبتی از تکرار یا عدم تکرار نشده باشد، فرض کنید تکرار مجاز باشد *(مثال قبل قسمت الف)* البته به شرط آن‌که بتوانید اشیا را تکرار کنید، مانند ارقام. اما در مثال رقابت دونده‌ها، تکرار معنی ندارد. چون فرض طراح بر این است که خود شما این مطلب را متوجه می‌شوید، تأکیدی روی تکرار یا عدم تکرار نمی‌کند.

۳ برخی از اوقات باید از صورت مسئله متوجه بشوید که تکرار مجاز هست یا نیست. مثلاً سه گوی با شماره‌های ۱ تا ۳ دارید. با برداشتن یکی‌یکی آن‌ها از کیسه می‌خواهید عدد بسازید. اگر با دیدن گوی اول آن را به درون کیسه برگردانید، گوی دوم ممکن است همان اولی باشد و لذا تکرار مجاز است اما اگر گوی اول را کنار بگذارید، دیگر رقم بعدی تکراری نمی‌شود.

۴ برخی از اوقات مسئله می‌گوید، با رقم‌های ۱، ۲ و ۳ عدد فلان‌رقمی بسازید. این‌جا چه‌طور؟ علت این‌که ۱ را دو بار تکرار کرده این است که بگوید، رقم ۱ فقط دو بار می‌تواند تکرار شود ولی ۲ و ۳ دیگر تکراری نیستند. مثلاً ۱۱۲ قبول است ولی ۲۲۳ قبول نیست. یعنی اعداد حداکثر به همان تعدادی که نوشته شده‌اند، قابل تکرار هستند.

اصل جمع

پایهٔ دهم مدرسه‌ای سه کلاس دارد. کلاس اول، ۲۰ دانش‌آموز، کلاس دوم، ۲۷ دانش‌آموز و کلاس سوم، ۲۴ دانش‌آموز دارد. این مدرسه چند دانش‌آموز پایهٔ دهم دارد؟ *(آقا گرفتی ما رو!)* واضح است که ۷۱ = ۲۴ + ۲۷ + ۲۰ دانش‌آموز در پایهٔ دهم وجود دارد. چرا تعداد دانش‌آموزان هر کلاس را در یکدیگر ضرب نمی‌کنیم؟

دانش‌آموزان پایهٔ دهم از سه بخش مجزا تشکیل شده‌اند. کار ما شمارش دانش‌آموزان پایهٔ دهم است. هر دانش‌آموز کلاس اولی یا کلاس دومی یا کلاس سومی است *(به «یا» دقت کن)*. این حالت‌های مطلوب به یکدیگر ارتباطی نداشته و اجزا یا مراحل پشت سر هم یک کار نیستند، بلکه هر کدام تعدادی حالت مورد قبول هستند، بنابراین طبق اصل جمع (نه ضرب)، کافی است آن‌ها را با یکدیگر جمع کنیم.

اصل جمع: فرض کنید کاری را بتوان به دو روش مجزا انجام داد. اگر در روش اول، m انتخاب و در روش دوم، n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار موردنظر m + n انتخاب وجود دارد.

نکته

۱ در اصل جمع همهٔ m حالت و n حالت مطلوب بوده و در صورت انجام هر کدام، کار موردنظر انجام می‌گیرد. اما در اصل ضرب کار از دو مرحله یا دو جزء تشکیل یافته است که بدون انجام هر کدام از آن‌ها، هنوز کار پایان نیافته است. (در اصل جمع «یا» به کار برده می‌شود.)

۲ برای به کار بردن اصل جمع، مسئله را طوری به حالت‌های مجزا تقسیم می‌کنیم که همهٔ حالت‌های ممکن را پوشش دهد. حالا برای انجام کار، کافی است حالت‌های مطلوبی که در هر مرحله محاسبه شده است را با هم جمع کنیم.

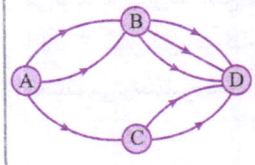
مثال **فرض کنید مغازه‌ای سه نوع بستنی و ۴ نوع آبمیوه دارد. به دلیل صرفه‌جویی در جیب مبارک! می‌خواهید دوست خود را فقط بستنی یا آبمیوه مهمان کنید. به چند روش می‌توانید این کار را انجام دهید؟**

پاسخ مسئله را به دو قسمت مجزا تقسیم کنید. خرید بستنی یا *(به «یا» دقت کن)* خرید آبمیوه. طبق اصل جمع، به ۷ = ۴ + ۳ روش می‌توانید از دوست خود پذیرایی کنید. توجه دارید که در صورت خرید هر بستنی یا آبمیوه کار به درستی انجام شده است. خرید آبمیوه یا بستنی، با هم صورت نمی‌گیرد و این‌ها اجزای کار که پشت سر هم و در دو مرحله صورت بگیرند نیستند. باز هم تأکید می‌کنم که می‌خواستید بستنی یا آبمیوه بخرید. *(بازم به «یا» دقت کن)*

مثال **فرض کنید در مثال بالا به دلیل علاقه‌ای که به دوستتان دارید می‌خواهید برای او، هم بستنی و هم آبمیوه بخرید. این کار به چند روش قابل انجام است؟**

پاسخ کار شما خرید بستنی و آبمیوه است. مرحلهٔ اول، خرید بستنی و مرحلهٔ دوم خرید آبمیوه است. *(به «و» دقت کن)* آیا با خرید بستنی کار شما به اتمام رسیده است؟ مسلماً خیر. خرید بستنی به ۳ روش و خرید آبمیوه به ۴ روش امکان‌پذیر است بنابراین طبق اصل ضرب، کار خرید بستنی و آبمیوه به ۱۲ = ۳ × ۴ روش قابل انجام است. این‌جا هم تأکید می‌کنم که بستنی و آبمیوه می‌خواستید بخرید *(بازم به «و» دقت کن)*

مثال **چهار شهر A، B، C و D و خطوط ارتباطی یک‌طرفه بین آن‌ها به صورت زیر است. یک مسافر به چند طریق می‌تواند از شهر A به D مسافرت کند؟**



پاسخ مسئله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. این مسافر یا باید اول به B یا این‌که اول به C مسافرت کند. *(این همون یایی که بعداً باعث می‌شه بین جواب‌ها جمع بذاریم)*. او می‌تواند به ۲ طریق از A به B و به سه طریق از B به D برود، پس به ۶ = ۳ × ۲ روش می‌تواند از مسیر A به D برود. به طور مشابه به ۲ × ۱ روش، می‌تواند از C به D برسد، بنابراین طبق اصل جمع به ۸ = ۲ + ۶ روش می‌تواند از A به D برود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال **با استفاده از رقم‌های ۱,۲,۳,۴ چند عدد حداکثر سه‌رقمی، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان ساخت؟**

پاسخ مسئله را به ۳ بخش مجزا تقسیم می‌کنیم. عدد ساخته‌شده یک‌رقمی یا دورقمی یا سه‌رقمی است. طبق اصل جمع، حالت‌های هر بخش مطلوب بوده و ارتباطی به هم ندارند، بنابراین بعد از به دست آوردن تعداد هر کدام، آن‌ها را با یکدیگر جمع می‌کنیم.

عددهای یک رقمی = ۴

عددهای دو رقمی بدون تکرار = $۴\times۳=۱۲$

عددهای سه رقمی بدون تکرار = $۴\times۳\times۲=۲۴$

$\Rightarrow$ کل عددهای حداکثر سه‌رقمی $=۴+۱۲+۲۴=۴۰$

مثال **رمز دستگاهی از ارقام ۱ تا ۹ یا حروف A,B,C,D تشکیل می‌شود. در هر حالت، تعداد رمزهای ممکن برای این دستگاه را مشخص کنید.**

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده باشد.

ب) رمز از دو گزینه تشکیل شده باشد که گزینهٔ اول حرفی و گزینهٔ دومی یک عدد است؟

پ) رمز از دو گزینه، تشکیل شده باشد که یکی از آن‌ها عدد و دیگری حرف است.

پاسخ **الف** واضح است که رمز، یکی از ارقام ۱ تا ۹ یا یکی از حروف A,B,C,D است. بنابراین $۹+۴=۱۳$ رمز، طبق اصل جمع وجود دارد.

ب کل کار دو جزء دارد. گزینهٔ اول و گزینهٔ دوم. گزینهٔ اول ۴ حالت و گزینهٔ دوم ۹ حالت دارد. طبق اصل ضرب $۹\times۴=۳۶$ رمز، برای رمز این دستگاه وجود دارد.

پ مسئله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. یا اولی عدد و دومی حرف است یا اولی حرف و دومی عدد است. *(به «و»، «یا» دقت کن)* بنابراین:

$$\underbrace{(۹\times۴)}_{\text{اولی عدد و دومی حرف}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{(۴\times۹)}_{\text{اولی حرف و دومی عدد}}=۷۲$$

مسئله‌های درگیر

اجزا یا مراحل مختلف که در اصل ضرب بیان کردیم، مستقل از یکدیگرند، یعنی حالت‌های یک جزء یا مرحله ارتباطی به این‌که چه اتفاقی در مرحلهٔ دیگر افتاده، ندارد. اما در برخی از مسئله‌ها، حالت‌های یک جزء، درگیر اتفاقی است که در جزء دیگر، رخ داده است. در این‌گونه مواقع:

۱ مسئله را به چند بخش مجزا تقسیم می‌کنیم.

۲ حالت‌های هر بخش را با اصل ضرب به دست می‌آوریم.

۳ با استفاده از اصل جمع، حالت‌های مطلوب یا حالت‌های هر بخش را با هم جمع می‌کنیم.

مثال **چند عدد ۴ رقمی زوج با رقم‌های ۰,۱,۲,۳,۴,۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟**

پاسخ چهار جای خالی درنظر می‌گیریم. رقم یکان باید زوج باشد، پس یکی از اعداد ۰، ۲ یا ۴ می‌تواند در رقم یکان به کار رود. *(بلا می‌ریم سراغ خونهٔ صدگان چون صفر نمی‌تونه باشه و شرط داره)* برای پرکردن آخرین خانهٔ سمت چپ، نمی‌دانیم که آیا رقم صفر در یکان به کار رفته است یا نه؟ اگر رقم یکان صفر باشد، خانهٔ آخر، ۵ حالت و در غیر این صورت، ۴ رقم برای خانهٔ آخر باقی می‌ماند. بنابراین حالت‌های خانهٔ آخر، درگیر رقم یکان است *(خونهٔ اول و آخر مستقل نیستن)*. این خود نشان می‌دهد که باید مسئله را به دو بخش تقسیم کنیم:

۱ رقم یکان صفر باشد: $\underset{\boxed{۱,۲,\ldots,۵}}{۵}\times\underset{}{۴}\times\underset{}{۳}\times\underset{\boxed{۰}}{۱}=۶۰$

۲ رقم یکان صفر نباشد: $\underset{\substack{\downarrow\\ \text{(یکی از ۲ و ۴ در یکان به‌کار رفته}\\ \text{و صفر هم نمی‌تونه باشه)}}}{۴}\times\underset{\substack{\downarrow\\ \text{(دو رقم مصرف شده)}}}{۴}\times۳\times\underset{\boxed{۲,۴}}{۲}=۹۶$

$\Rightarrow ۶۰+۹۶=۱۵۶$

اصل متمم

فرض کنید دانش‌آموزی در امتحان پایان‌ترم خود، یک ۰/۵ نمره و یک ۰/۲۵ غلط داشته است. برای به دست آوردن نمرهٔ دانش‌آموز، کافی است ۰/۷۵ غلط او را از کل نمره، یعنی ۲۰ کم کنیم؛ پس نمرهٔ این دانش‌آموز $۲۰-۰/۷۵=۱۹/۲۵$ خواهد بود. این همان اصل متمم است.

اصل متمم: در برخی از مسئله‌ها، شمارش مستقیم حالت‌ها، دشوار است. در این مواقع بهتر است، حالت‌های نامطلوب را از کل، کم کنیم.

مثال **با استفاده از حروف a,b,c,d,e کلمه‌های چهارحرفی می‌سازیم. در چندتا از این کلمه‌ها، حرف تکراری دیده می‌شود؟**

پاسخ حتماً حرف تکراری باید باشد. مثلاً یکی از این کلمه‌ها abac است. دیگری abba است. کدام حرف تکرار و چگونه تکرار شود؟ واضح است که شمارش به صورت مستقیم، مشکل خواهد بود اما حالت‌های نامطلوب چه می‌شود؟ کلمه‌های ۴ حرفی که حرف تکراری ندارند. این مسئله آشناست و قبلاً آن را با اصل ضرب حل کرده‌ایم، پس با استفاده از اصل متمم می‌توان گفت:

۴ حرفی بدون تکرار − کل کلمه‌های ۴ حرفی = ۴ حرفی دارای حرف تکراری $=۵\times۵\times۵\times۵-۵\times۴\times۳\times۲=۵(۱۲۵-۲۴)=۵۰۵$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال در چند زیرمجموعه از مجموعهٔ $\{1,2,3,\ldots,10\}$ حتماً عدد زوج وجود دارد؟

پاسخ حتماً باید عدد زوج داشته باشیم. حالا کدام عدد و چندتا بماند. شمارش مستقیم مسئله باز هم مشکل است. اما حالت‌های نامطلوب می‌شود: تعداد زیرمجموعه‌هایی که عدد زوج در آن‌ها وجود ندارد. یعنی زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{1,3,5,7,9\}$، این مجموعه، $2^5 = 32$ زیرمجموعه دارد که باید آن را از کل زیرمجموعه‌ها یعنی $2^{10} = 1024$ تا کم کنیم. پس $1024 - 32 = 992$ زیرمجموعه که حتماً عدد زوج در آن باشد، وجود دارد.

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ اصل ضرب: اجزای کار را در نظر گرفته و تعداد حالت‌ها را درهم ضرب می‌کنیم. حواستان باشد تا کار تمام نشده است بین اجزا ضرب است. اگر جزئی شرط یا محدودیت (عدد زوج یا فرد، صفر در شروع نمی‌تواند باشد و ...) داشته باشد، از آن خانه شروع می‌کنیم.

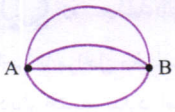
حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱ تا ۶

تیپ۲ برای انجام کار باید مسئله را به چند حالت (اصل جمع) تقسیم کنیم. با اصل ضرب تعداد حالت‌های هر کدام را به دست آورده و در پایان جمع می‌کنیم. حواستان باشد اگر اعداد زوج را بخواهید و صفر هم در بین ارقام باشد، باید مسئله را به دو قسمت تقسیم کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۷ تا ۲۵

سؤال‌های امتحانی

● جای خالی را با عبارت یا عددهای مناسب تکمیل کنید.



۱- در شکل مقابل، تعداد راه‌های حرکت از A به B با استفاده از اصل ..... برابر ۴تاست.

۲- بخواهیم تنها بستنی یا آبمیوه بخوریم، ..... انتخاب داریم.

۳- یک مغازه، سه نوع آبمیوه و ۴ نوع بستنی دارد. در صورتی که هر دو را بخواهیم، ..... انتخاب وجود دارد.

۴- همهٔ اعداد دورقمی که با استفاده از رقم‌های $\{1,3,8\}$ ساخته می‌شود را با نمودار درختی بنویسید.

● رستورانی ۲ نوع غذا (کباب ـ خورشت)، ۳ نوع سالاد و ۵ نوع دسر برای مشتریان خود ارائه می‌کند. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

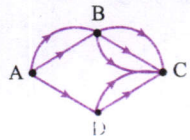
۵- به چند طریق می‌توان یک نوع غذا و یک نوع سالاد و یک نوع دسر سفارش داد؟

۶- به چند طریق می‌توان کباب، همراه با یک نوع سالاد و یک نوع دسر سفارش داد؟

۷- به چند طریق می‌توان تنها یکی از انواع غذا، سالاد و دسر را سفارش داد؟

۸- به چند طریق می‌توان غذا همراه با یکی از انواع سالاد یا دسر سفارش داد؟

● شهرهای A، B، C و D توسط راه‌هایی یک‌طرفه به صورت مقابل با یکدیگر ارتباط دارند. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



۹- چند مسیر از A به C به طوری که حتماً از B عبور کند، وجود دارد؟

۱۰- چند مسیر از A به C وجود دارد؟

● آزمونی دارای سه دسته سؤال به صورت زیر است. تعداد حالت‌های ممکن برای پاسخ‌نامه را در هر قسمت به دست آورید.

A	B	C
۱- بلی ☐ خیر ☐	۱- کم ☐ متوسط ☐ زیاد ☐	۱- الف ☐ ب ☐ ج ☐ د ☐
۲- بلی ☐ خیر ☐	۲- کم ☐ متوسط ☐ زیاد ☐	۲- ☐ ☐ ☐ ☐
۳- بلی ☐ خیر ☐	۳- کم ☐ متوسط ☐ زیاد ☐	۳- ☐ ☐ ☐ ☐

۱۱- پاسخ به همهٔ سؤال‌ها اجباری باشد.

۱۲- فقط مجاز به پاسخگویی به سؤال‌های یکی از دسته‌ها باشیم. (همه سؤال‌های آن دسته را باید پاسخ دهیم)

۱۳- پاسخ به سؤال‌های دستهٔ C اجباری ولی پاسخ به سؤال‌های دیگر اختیاری باشد.

۱۴- فقط مجاز به پاسخگویی به سؤال‌های ۲ تا از دسته‌ها باشیم. (به همهٔ سؤال‌های آن دو دسته باید جواب بدهیم.)

۱۵- با استفاده از رقم‌های ۹,۶,۵,۳,۲,۱ چند عدد چهاررقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت که: *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

الف) رقم صدگان آن ۵ باشد. ب) فرد باشد.

پ) زوج باشد. ت) مضرب ۵ نباشد. ث) بزرگ‌تر از ۵۰۰۰ باشد. ج) کوچک‌تر از ۳۰۰۰ باشد.

چ) یکان و دهگان از بین اعداد $\{1,2\}$ انتخاب شوند. ح) شامل رقم ۲ باشد.

۱۶- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۷,۵,۴,۲,۱,۰ و بدون تکرار می‌توان ساخت که: *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

الف) زوج باشد. ب) مضرب ۵ باشد. پ) بزرگ‌تر از ۵۴۰۰ باشد. ت) کوچک‌تر از ۴۲۰۰ باشد.

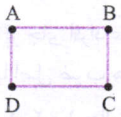
ث) فرد و بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ باشد.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۷- فردی قصد دارد برای به دست‌آوردن آماری به صورت تصادفی به یک بیمار مراجعه کند. او برای این کار به بیمارستانی می‌رود. در این بیمارستان، ۴ طبقه، در هر طبقه بین ۲ تا ۵ بخش و در هر بخش بین ۷ تا ۱۰ اتاق و در هر اتاق بین ۳ تا ۴ مریض وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد انتخاب‌های او چند تاست؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۸- در چند عدد ۶ رقمی، دقیقاً ۴ رقم متوالی برابر ۲ وجود دارد؟



۱۹- می‌خواهیم با ۳ رنگ آبی، قرمز و زرد رأس‌های مستطیل روبه‌رو را رنگ کنیم. در هر قسمت تعداد روش‌های ممکن رنگ‌آمیزی را به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) دو سر اضلاع، رنگ‌های مختلفی داشته باشند.

ب) رأس‌های C و A رنگ‌های یکسان و مخالف B و D داشته باشند.

مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ و زیرمجموعهٔ B از آن را در نظر بگیرید. با توجه به این‌که هر عضو A، ممکن است در مجموعهٔ B باشد یا نباشد، تعداد حالت‌های هر قسمت را به دست آورید.

۲۰- چند زیرمجموعه مانند B از مجموعهٔ A وجود دارد؟

۲۱- چند زیرمجموعهٔ B از A وجود دارد که حتماً $a\in B$؟ چند زیرمجموعه وجود دارد که $a\notin B$؟

۲۲- چند زیرمجموعه از A وجود دارد که عضوهای آن در صورت وجود فقط صدادار هستند؟

۲۳- چند زیرمجموعهٔ غیرتهی از A وجود دارد که عضوهای آن همگی صدادار یا همگی بی‌صدا باشند؟

۲۴- در چند زیرمجموعه از A حداقل یک حرف صدادار وجود دارد؟

۲۵- با استفاده از رقم‌های ۱،۳،۷،۸ اعداد چهاررقمی می‌سازیم. در چندتا از این اعداد رقم تکراری دیده می‌شود؟

درس ۲ جایگشت

نماد فاکتوریل (!)

برای ساده‌سازی ضرب اعداد از ۱ تا n به کار می‌رود. !n به این معنی است که باید اعداد n، n−۱، n−۲ و ... را تا ۱ در هم ضرب کنید.

$$n!=n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 1$$

مثلاً $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$. قرارداد می‌کنیم که $0!=1$ باشد. حالا با هم چند ویژگی این نماد را بررسی می‌کنیم.

ویژگی ۱ توجه دارید که $5!=5\times\underbrace{4\times3\times2\times1}_{4!}=5\times4!$ یا $5!=5\times4\times3!$. در حالت کلی $n!=n(n-1)!$ یا $n!=n(n-1)(n-2)!$.

ویژگی ۲ اعداد فاکتوریلی قابل جمع و تفریق و ضرب و تقسیم نیستند و باید مستقیم حاصل هر کدام را به دست آورید. مثلاً حاصل $4!+3!$ برابر $7!$ نمی‌شود، بلکه:

$$3!+4!=3\times2\times1+4\times3\times2\times1=6+24=30$$

ویژگی ۳ برای ساده‌کردن کسرهای شامل اعداد فاکتوریلی، عدد بزرگ‌تر را تا جایی که به عدد کوچک‌تر برسید، باز کنید. مثلاً برای ساده‌کردن عبارت $\frac{10!}{7!}$ داریم:

$$\frac{10!}{7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!}=10\times9\times8=720$$

مثال ساده کنید.

الف) $(3!)(4!)=\overbrace{(3\times2\times1)}^{6}\overbrace{(4\times3\times2\times1)}^{24}=144$

ب) $\frac{7!}{5!}=\frac{7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}}=42$

پ) $\frac{10!}{3!\,7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3\times2\times7!}=\frac{10\times9\times8}{3\times2}=120$

ت) $\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=n$

ث) $\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{n(n-1)\,\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}=n(n-1)$

ج) $n!+(n-1)!=(n-1)!(n+1)$ (از $(n-1)!$ فاکتور گرفتیم)

چ) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}=\frac{(n+2)(n+1)(n)\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=(n+2)(n+1)(n)$

ح) $\frac{(n+k+1)!}{(n+k-1)!}=\frac{(n+k+1)(n+k)(n+k-1)!}{(n+k-1)!}=(n+k+1)(n+k)$

مثال ساده کنید. (با فاکتورگیری یا مخرج‌مشترک)

الف) $\frac{1}{6!}+\frac{2}{7!}=\frac{1}{6!}+\frac{2}{7\times6!}=\frac{7+2}{7!}=\frac{9}{7!}$

ب) $\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)+1}{(n+1)!}=\frac{n+2}{(n+1)!}$ $\times(n+1)$

پ) $(n+1)!-n!=n!((n+1)-1)=n(n!)$

ت) $15(15!+14!)=15(15\times14!+14!)=15(14!(15+1))=16\times15\times14!=16!$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

جایگشت

سه نفر A، B و C را در نظر بگیرید. از آن‌ها می‌خواهیم کنار هم ایستاده تا از آن‌ها عکس یادگاری بگیریم. ۶ حالت به صورت ABC، ACB، BAC، BCA، CBA و CAB برای ایستادن آن‌ها وجود دارد. به هر طریقهٔ ایستادن این افراد، یک جایگشت گفته می‌شود. همان‌طور که از اسمش هم پیداست، اگر جای افراد عوض شود، حالت‌های مختلفی درست می‌شود، **یعنی ترتیب بین آن‌ها مهم است.** به اصطلاح می‌گوییم ۳ شئ متمایز، ۶ یا !۳ جایگشت دارند. با اصل ضرب هم می‌توانستیم همین نتیجه را به دست آوریم. سه جای خالی ___ × ___ × ___ می‌گیریم. خانه‌های اول و دوم و سوم به ترتیب ۳، ۲ و ۱ حالت دارند، پس طبق اصل ضرب $۳ \times ۲ \times ۱ = ۳! = ۶$ جایگشت، برای سه شئ متمایز وجود دارد. فقط توجه کنید که اشیا متمایز هستند.

جایگشت: فرض کنید چند شئ متمایز داریم. به هر حالت چیدن اشیا کنار هم، یک جایگشت از آن‌ها می‌گوییم. در جایگشت‌ها، ترتیب قرارگرفتن اشیا اهمیت داشته و حالت‌های مختلفی محاسبه می‌شود.

تعداد جایگشت‌های n شئ متمایز

مثلاً ۶ نفر به !۶ طریق می‌توانند در یک صف بایستند، یا حروف کلمهٔ blue، !۴ جایگشت دارند.

تعداد جایگشت‌های n شئ متمایز $= n!$

مثال ۶ نفر به نام‌های A، B، C، D، E و F می‌خواهند در یک صف بایستند. B و A با هم برادرند. در هر قسمت تعداد حالت‌های ایستادن آن‌ها را به دست آورید.

الف) فرد C در ابتدای صف قرار گیرد.

ب) فرد B در ابتدا و A در انتهای صف باشد.

پ) دو برادر در ابتدا و انتهای صف قرار گیرند.

ت) بین دو برادر، دو نفر فاصله باشد.

ث) نفر A جلوتر از B قرار گیرد.

پاسخ الف) فرد C را در ابتدای صف قرار می‌دهیم. بقیهٔ افراد !۵ حالت جایگشت دارند، پس در کل به !۵ حالت می‌توانند در صف قرار گیرند.

ب) B را در ابتدای صف و A را در انتهای صف قرار می‌دهیم. ۴ فرد دیگر، !۴ جایگشت دارند پس این افراد به !۴ حالت می‌توانند در صف بایستند، به طوری که B در ابتدا و A در انتهای صف باشند.

$$\underline{A}\ \underbrace{\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱}}_{\text{محل قرارگیری افراد دیگر}}\ \underline{B}$$

پ) یا A در ابتدا و B در انتها یا A در انتها و B در ابتدای صف قرار دارند. به عبارت دیگر خود B و A، تعداد !۲ حالت جایگشت دارند. بقیهٔ افراد هم !۴ جایگشت دارند، پس در کل $۲! \times ۴!$ حالت قرارگیری در صف به طوری که دو برادر در ابتدا و انتهای صف باشند، وجود دارد.

ت) ابتدا باید ببینیم، دو برادر در چه مکان‌هایی می‌توانند قرار بگیرند که بین آن‌ها دو نفر فاصله باشد. توجه دارید که در هر قسمت جای خود B و A هم می‌تواند عوض شود، پس همهٔ آن‌ها در !۲ ضرب می‌شوند.

$\underline{A}\ \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{B}\ \underline{۲} \times \underline{۱}$ تعداد جایگشت‌ها $= ۲! \times ۴! = ۴۸$

$__\ \underline{A}\ __\ __\ \underline{B}\ __$ تعداد جایگشت‌ها $= ۲! \times ۴! = ۴۸$

$__\ __\ \underline{A}\ __\ __\ \underline{B}$ تعداد جایگشت‌ها $= ۲! \times ۴! = ۴۸$

طبق اصل جمع، همهٔ حالت‌های مطلوب را با هم جمع می‌کنیم، پس $۴۸ + ۴۸ + ۴۸ = ۱۴۴$ حالت برای قرار گرفتن آن‌ها وجود دارد.

ث) خب! یک راه این است که حالت‌های قرارگیری B را در نظر گرفته و متناسب با آن محل قرارگیری A را حالت‌بندی کنیم. حل مسئله به این صورت طولانی است. یک راه‌حل ساده، استفاده از تقارن است. در نصف حالت‌ها A جلوتر از B و در نصف دیگر B جلوی A است. در کل هم !۶ جایگشت وجود دارد، پس تعداد حالت‌هایی که A جلوتر از B قرار گیرد، می‌شود: $\frac{۶!}{۲}$.

جایگشت‌های کنار هم

جایگشت‌های کنار هم

در برخی از مسئله‌ها، تعداد جایگشت‌هایی که اشیای خاصی کنار هم هستند را می‌خواهیم به دست آوریم. این اشیای خاص را با طناب! محکم به هم بسته و یک شئ فرض می‌کنیم. البته اگر خود اشیای بسته‌شده امکان جابه‌جایی داشته باشند، جایگشت‌های درونی آن‌ها را نیز ضرب می‌کنیم. مثلاً اگر بخواهیم ۴ کتاب داخل کتابخانه طوری قرار بگیرند که دوتای آن‌ها همیشه کنار هم باشند، جایگشت آن‌ها برابر است با:

$$\underbrace{\underbrace{\square\square}_{۲!}\square\square}_{۳!} \quad ۲! \times ۳! = ۲ \times ۶ = ۱۲$$

مثال می‌خواهیم سه کتاب ریاضی $M_۱$، $M_۲$ و $M_۳$ و چهار کتاب فیزیک $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$ و $P_۴$ را در قفسه‌ای قرار دهیم. در هر حالت تعداد جایگشت‌ها را به دست آورید.

الف) قرارگیری کتاب‌ها شرط خاصی نداشته باشد.

ب) کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند.

پ) کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک هم کنار هم باشند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ **الف** ۷ شئ داریم که به !۷ طریق، می‌توانند جایگشت داشته باشند.

ب کتاب‌های ریاضی را با طناب بسته و یک شئ $\boxed{M_1M_2M_3}$ در نظر می‌گیریم. حالا همراه با کتاب‌های فیزیک، ۵ شئ داریم که به !۵ طریق می‌توانند جایگشت داشته باشند. از طرفی خود کتاب‌های ریاضی نیز به !۳ طریق می‌توانند بین خود جابه‌جا شوند. پس به !۳×!۵ روش می‌توانیم کتاب‌ها را در قفسه بچینیم، به طوری که کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند.

پ کتاب‌های ریاضی را در یک دسته و کتاب‌های فیزیک را نیز در دستهٔ دیگری قرار می‌دهیم تا دو شئ به صورت $\boxed{M_1M_2M_3}$ ، $\boxed{P_1P_2P_3P_4}$ به دست آید. این دو شئ !۲ جایگشت دارند. با در نظر گرفتن جایگشت‌های کتاب‌های ریاضی بین خود و فیزیک بین خود، !۴!۳!۲ جایگشت با شرایط خواسته‌شده به دست می‌آید.

مثال **در چند جایگشت از حروف کلمهٔ «تدبیر»:**

الف) ب، ی، ر کنار هم هستند؟

ب) کلمه «بیر» دیده می‌شود.

پ) در چند جایگشت دو حرف ت، د کنار هم نیستند؟

پاسخ **الف** سه شئ ت، د، $\boxed{\text{ب ی ر}}$ ، !۳ جایگشت دارند. حروف در دسته نیز !۳ بین خود جابه‌جا می‌شوند، پس !۳!۳ جایگشت وجود دارد.

ب تفاوت این سؤال با قبلی در این است که حروف $\boxed{\text{ب ی ر}}$ دیگر نمی‌توانند بین خود جابه‌جا شوند، پس در کل !۳ = ۶ جایگشت با شرایط داده‌شده وجود دارد.

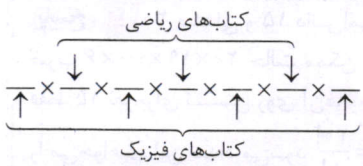
پ کنار هم بودن به راحتی به دست می‌آید، پس بهتر است از متمم استفاده کنیم.

۷۲ = (۵ − ۲)! = !۴ × !۲ − !۴ = $\underbrace{\text{جایگشت‌هایی که ت، د کنار هم هستند}}_{\text{ت د ب ، ی ، ر}}$ − کل جایگشت‌ها = جایگشت‌هایی که ت ، د کنار هم نیستند

جایگشت‌های یک درمیان

جایگشت‌های یک در میان

در مثال کتاب‌های ریاضی و فیزیک می‌خواهیم کتاب‌های ریاضی و فیزیک، به صورت یک در میان قرار گیرند. چون کتاب‌های فیزیک یکی بیشتر است باید با آن‌ها شروع کنیم.



(با ریاضی شروع کنیم کم می‌یاد!) کتاب‌های فیزیک به !۴ حالت و کتاب‌های ریاضی نیز به !۳ حالت می‌توانند در جایگاه‌های خود قرار گیرد، پس !۳!۴ جایگشت یک در میان وجود دارد. توجه کنید که اگر کتاب‌های فیزیک دوتا (یا بیشتر) از کتاب‌های ریاضی بیشتر بودند، دیگر نمی‌توانستند یک در میان قرار گیرند. حالت دیگر مسئلهٔ بالا این است که ۴ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک داشته باشیم. در این‌جا می‌توانستیم با کتاب‌های ریاضی یا فیزیک شروع کنیم. هر کدام نیز !۴×!۴ جایگشت دارند، پس در کل !۴×!۴×۲ جایگشت یک در میان وجود دارد.

نکته

با جمع‌بندی دو مثال بالا در دو حالت اشیا می‌توانند کنار هم قرار بگیرند:

حالت اول تعداد جایگشت‌های یک در میان n شئ متمایز و (n − ۱) شئ متمایز دیگر برابر است با !(n−۱)!n.

حالت دوم تعداد جایگشت‌های یک در میان n شئ متمایز و n شئ متمایز دیگر برابر است با !n×!n×۲.

مثال **۹ گوی با شماره‌های ۱ تا ۹ درون کیسه‌ای قرار دارند. گوی‌ها را به ترتیب خارج کرده و بعد از دیدن شماره، آن‌ها را کنار می‌گذاریم. در چند حالت، اعداد فرد و زوج یک در میان ظاهر می‌شوند؟**

پاسخ ۵ عدد فرد و ۴ عدد زوج داریم با تعداد جایگشت‌های یک در میان، از حالت اول روبه‌رو هستیم. بنابراین تعداد آن‌ها می‌شود: !۴!۵.

جایگشت‌های r شئ (r تایی از n شئ) متمایز

دوباره فرض کنید پنج نفر A، B، C، D و E می‌خواهند در یک ردیف ایستاده و عکس یادگاری بگیرند اما در کادر عکس، فقط ۳ نفر جا می‌گیرند. در اصطلاح گفته می‌شود، جایگشت‌های ۳ تایی از ۵ شئ را می‌خواهیم. با استفاده از اصل ضرب، ۳ جای خالی در نظر می‌گیریم. در جای اول هر یک از ۵ نفر می‌تواند قرار گیرد. در جای بعدی ۴ نفر و در جای آخر نیز ۳ نفر می‌تواند قرار گیرد. $\underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳}$

پس گرفتن عکس‌های ۳ نفره از بین ۵ نفر به ۶۰ حالت امکان‌پذیر است. توجه کنید که ۳×۴×۵ را می‌توان با نمادهای فاکتوریلی به صورت زیر نوشت:

$$۵ \times ۴ \times ۳ \times \frac{۲ \times ۱}{۲ \times ۱} = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۵!}{(۵-۳)!}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

به عبارت دیگر، تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از ۵ شئ برابر با $\frac{5!}{(5-3)!}$ خواهد بود. این عدد را با نماد $P(5,3)$ نشان می‌دهیم. در حالت کلی:

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شئ متمایز برابر است با:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

(توجه دارید که $0 \le r \le n$ و $P(n,n)$ هم، همان تعداد جایگشت‌های n شئ متمایز است که برابر با «$n!$» بود.)

تذکر در جایگشت‌های r تایی از n شئ، هم انتخاب اشیا و هم ترتیب قرارگیری آن‌ها اهمیت دارد.

مثال **۵ نفر برای استخدام به شرکتی مراجعه کرده‌اند. شرکت به چند طریق می‌تواند، برای هر یک از شغل‌های ریاست، کارمندی و منشی‌گری افرادی را استخدام کند؟** *(روشغله نداریم!!)*

پاسخ روش اول با اصل ضرب: هر یک از ۵ نفر می‌توانند رئیس شوند. با قراردادن یک رئیس، ۴ نفر باقی می‌ماند که هر کدام می‌توانند کارمند شوند. در پایان نیز برای منشی‌گری سه نفر باقی می‌مانند پس طبق اصل ضرب $5\times4\times3=60$ حالت برای استخدام آن‌ها و قراردادن در مشاغل مختلف وجود دارد.

روش دوم با فرمول: باید از بین ۵ نفر، ۳ نفر را انتخاب کرده و مشاغل مختلف را به آن‌ها بدهیم. به عبارت دیگر هم افراد و هم ترتیب بین آن‌ها اهمیت دارد، تعداد حالت‌ها برابر با جایگشت ۳ شئ از ۵ شئ خواهد بود:

$$P(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=60$$

مثال **تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از حروف کلمهٔ computer که حرف اول بی‌صدا باشد را به دست آورید.**

پاسخ کلمه می‌تواند با یکی از حروف r، t، p، m و c شروع شود. ۴ جای خالی دیگر مانده است که می‌تواند با یکی از ۷ حرف باقی‌مانده پر شود. ترتیب بین حروف مهم است، بنابراین ۴ خانهٔ باقی‌مانده را می‌توان به تعداد جایگشت‌های ۴ تایی از ۷ حرف باقی‌مانده پر کرد. تعداد حالت‌ها می‌شود:

$$5\times P(7,4)=5\times\frac{7!}{3!}=5\times7\times6\times5\times4=4200$$

مثال **در یک سالن، دو ردیف صندلی و در هر ردیف، ۱۰ صندلی وجود دارد. ۶ دانش‌آموز پایهٔ دهم، ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۵ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم قرار است روی این صندلی‌ها بنشینند. در هر قسمت تعداد حالت‌های ممکن را به دست آورید. (نیازی به ساده‌کردن جواب‌ها نیست.)**

الف) دانش‌آموزان به دلخواه خود بتوانند روی هر صندلی بنشینند.

ب) دانش‌آموزان پایهٔ دهم در ردیف جلو قرار بگیرند.

پ) دانش‌آموزان پایهٔ دهم و دوازدهم در دو ردیف مختلف نشسته باشند.

پاسخ الف ۲۰ صندلی و ۱۵ دانش‌آموز داریم. نفر اول روی هر کدام از ۲۰ صندلی می‌تواند بنشیند، نفر دوم ۱۹ حالت و ... . طبق اصل ضرب $20\times19\times\cdots\times6$ حالت ممکن برای نشستن دانش‌آموزان وجود دارد. طور دیگر هم می‌توانستیم بگوییم. ۲۰ صندلی داریم ولی فقط ۱۵ نفر برای نشستن روی آن‌ها وجود دارد که هم خودشان و ترتیب بین آن‌ها اهمیت دارد؛ یعنی جایگشت‌های ۱۵ تایی از ۲۰ شئ را می‌خواهیم. این تعداد می‌شود $P(20,15)=\frac{20!}{5!}$.

ب ۱۰ صندلی در ردیف جلو قرار دارد که ۶ دانش‌آموز پایهٔ دهم روی آن‌ها می‌نشینند. به $P(10,6)$ حالت، آن‌ها می‌توانند روی صندلی بنشینند. حالا ۱۴ صندلی برای ۹ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و دوازدهم باقی مانده است که به $P(14,9)$ حالت می‌توانند روی آن‌ها قرار گیرند. بنابراین در کل $P(10,6)\times P(14,9)$ حالت برای نشستن آن‌ها با شرایط داده‌شده وجود دارد.

پ مسئله را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. $P(10,6)\times P(10,5)\times P(9,4)$:دانش‌آموزان دهم در ردیف اول و دوازدهمی‌ها در ردیف دوم

$P(10,6)\times P(10,5)\times P(9,4)$:دانش‌آموزان دهم در ردیف دوم و دوازدهمی‌ها در ردیف اول

حالت‌های نشستن دهمی‌ها در ردیف دوم — حالت‌های نشستن دوازدهمی‌ها در ردیف اول — حالت‌های نشستن یازدهمی‌ها روی صندلی باقی‌مانده

بنابراین تعداد کل حالت‌ها با اصل جمع می‌شود:

$$P(10,6)\times P(10,5)\times P(9,4)+P(10,6)\times P(10,5)\times P(9,4)=2P(10,6)\times P(10,5)\times P(9,4)$$

مثال **معادلهٔ مقابل را حل کنید.** $P(n,2)=72$

پاسخ $P(n,2)=\frac{n!}{(n-2)!}$، پس:

$$\frac{n!}{(n-2)!}=72 \Rightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}=72$$

می‌توانیم با حل معادلهٔ درجه‌دوم، n را به دست آوریم. اما ضرب کدام دو عدد متوالی، ۷۲ می‌شود؟ واضح است که $n=9$.

جایگشت‌های فاصله‌دار

n شئ و k شیء مختلف داریم. می‌خواهیم اشیا را طوری بچینیم که هیچ‌کدام از k شیء کنار هم نباشند. برای این کار ابتدا n شیء را در دایره‌ها می‌چینیم سپس k شئ را باید در بین یا کنار آن‌ها (در $n+1$ جا) جاسازی کنیم (تا هیچ‌کدام از k شیء کنار هم نباشند.)

— ○ — ○ — ○ — ○ —

۱) اگر اشیا کاملاً متمایز باشند، تعداد حالت‌ها برابر است با: $n!\times P(n+1,k)$

۲) اگر n شئ مثل هم باشند، تعداد حالت‌ها برابر است با: $P(n+1,k)$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال ۷ توپ قرمز یکسان و ۴ توپ فوتبال، بسکتبال، والیبال و تنیس داریم. به چند طریق می‌توان توپ‌ها را در یک ردیف چید، به طوری که هیچ‌کدام از ۴ توپ مختلف، کنار هم نباشند؟

پاسخ ابتدا ۷ توپ قرمز را در یک ردیف قرار می‌دهیم. *(اینا که هیچی یه حالت داره)* توجه دارید که بین توپ‌های قرمز و اول و آخر آن‌ها، ۸ جای خالی وجود دارد که ۴ توپ مختلف را می‌توانیم در آن مکان‌ها قرار دهیم.

−○−○−○−○−○−○−○−

بنابراین ۸ جای خالی داریم ولی ۴ تا از آن‌ها پر می‌شود که ترتیب بین آن‌ها هم مهم است. $P(۸,۴)$ جایگشت ۴ تایی از ۸ شئ متمایز وجود دارد. تعداد حالت‌های قرارگیری این ۴ توپ به طوری که کنار هم نباشند، می‌شود:

$$P(۸,۴)=\frac{۸!}{۴!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}}=۱۶۸۰$$

دقت کنید اگر ۷ توپ قرمز مختلف بودند تعداد حالت‌ها برابر $۷!\times P(۸,۴)$ می‌شود چون جایگشت ۷ توپ قرمز هم مهم است.

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ تعداد جایگشت‌های n شئ متمایز (بدون شرط، کنار هم یا یک‌درمیان) که در هر کدام از تکنیک خودش استفاده می‌کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۲۶ تا ۵۰

تیپ۲ تعداد جایگشت‌های r شئ از n شئ است که از فرمول $P(n,r)$ یا اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۵۱ تا ۵۵ و ۵۸ و ۶۰

تیپ۳ جایگشت اشیا به طوری که می‌خواهیم هیچ‌کدام از فلان اشیای خاص کنار هم نباشند (جایگشت‌های فاصله‌دار)

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۵۶ و ۵۷

تیپ۴ تعداد جایگشت با اشیای تکراری است که در کتاب نیست ولی بد نیست بلد باشید.

حالاتوحل‌کن سؤال ۶۱

سؤال‌های امتحانی

۲۶- جاهای خالی را با یکی از کلمه‌های «جایگشت، ترتیب، اصل ضرب، اصل جمع، متمایز» تکمیل کنید. (یک کلمه اضافه است)

اگر چند شئ ..... داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم یک ..... از آن اشیا می‌گوییم. در جایگشتِ بین چند شئ، ..... اهمیت دارد. با استفاده از ..... می‌توان ثابت نمود، تعداد جایگشت‌های n شئ متمایز برابر !n است.

جاهای خالی را با اعداد یا عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۲۷- برای اتصال سه فیش ورودی به سه درگاه، ..... حالت وجود دارد.

۲۸- با استفاده از رقم‌های ۱ تا ۹، ..... عدد می‌توان ساخت که با عدد ۷ شروع می‌شود.

۲۹- ۴ نفر به ..... طریق می‌توانند در ۴ اتاق مختلف قرار گیرند به طوری که در هر اتاق دقیقاً یک نفر ساکن شود.

۳۰- اگر عدد !۴+!۵ از !۴ فاکتور بگیریم می‌شود ..... .

۳۱- اگر در عدد ۵×۶×۷ را در ۱×۲×۳×۴ ضرب و تقسیم کنیم و با نمادهای فاکتوریل، نمایش دهیم می‌شود ..... .

۳۲- نمایش عبارت $n(n-۱)(n-۲)$ با عبارت‌های فاکتوریلی می‌شود ..... و ساده‌شدهٔ عبارت $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$ می‌شود ..... .

۳۳- حاصل عبارت $(۲!+۳!)^۲-(۳!)+۳!۲!$ می‌شود ..... .

۳۴- در ..... جایگشت از حروف کلمهٔ «سردی» نقطه وجود ندارد.

۳۵- از بین تعدادی کتاب مختلف، ۳ کتاب را انتخاب و در قفسه‌ای می‌چینیم. اگر تعداد حالت‌های انجام کار برابر ۲۱۰تا باشد، تعداد کتاب‌ها برابر ..... بوده است.

همهٔ جایگشت‌های حروف کلمه flower را در نظر بگیرید.

۳۶- تعداد آن‌ها، چندتاست؟

۳۷- در چندتا از آن‌ها، w و e کنار هم هستند؟

۳۸- در چند جایگشت، we دیده می‌شود؟

۳۹- در چند جایگشت دو حرف e و w، کنار هم نیستند؟

۴۰- در چند جایگشت، بین e و w، دو حرف دیگر قرار دارد؟

۴۱- در چند جایگشت حرف سوم از راست o است؟

۴۲- در چند جایگشت حرف دوم از راست صدادار است؟

۴۳- در چند جایگشت حرف اول بی‌صدا و حرف آخر صدادار است؟

۴۴- در چند جایگشت عبارت flo دیده می‌شود؟

۴۵- در چند جایگشت flo دیده می‌شود ولی wer دیده نمی‌شود؟

۵ افسر و ۶ سرباز به چند طریق می‌توانند روی ۱۱ صندلی بنشینند در صورتی که:

۴۶- همهٔ افسرها کنار هم باشند؟

۴۷- سربازها کنار هم باشند؟

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۴۸- سربازها کنار هم و افسرها نیز کنار هم باشند؟

۴۹- یک در میان بنشینند؟

۵۰- در چند جایگشت از حروف کلمهٔ LAGRANGE، حروف مثل هم، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۵۱- ده نفر داوطلب سخنرانی در یک همایش هستند.

الف) چند ترتیب سخنرانی وجود دارد اگر بخواهیم همهٔ آن‌ها سخنرانی کنند؟

ب) به چند طریق فقط نفرات اول تا سوم می‌توانند سخنرانی کنند؟

۵۲- می‌خواهیم ۳ میوهٔ سیب، پرتقال و گلابی را بین ۸ نفر توزیع کنیم. به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم، هرگاه به هر نفر حداکثر یک میوه برسد؟

۵۳- پلاکی به صورت زیر از یک عدد سه‌رقمی و کلمه‌ای دوحرفی تشکیل می‌شود. اگر اعداد از مجموعه ارقام $\{1,2,\dots,9\}$ و حروف از مجموعهٔ $\{A,B,C,D\}$ انتخاب شوند، چند پلاک مختلف قابل ساخت است؟(تکرار مجاز نیست.)

۲۷۵	AC

۵۴- عبارت مقابل را ساده کنید.

$$A=\frac{P(n+1,3)}{P(n-1,2)}$$

۵۵- معادله‌های روبه‌رو را حل کرده و n را به دست آورید.

الف) $P(n,5)=3P(n,4)$

ب) $P(n,5)=45P(n-1,3)$

۵۶- در چند جایگشت از ارقام عدد ۴۳۷۲۲۲، هیچ‌کدام از رقم‌های ۲ کنار هم نیستند؟

۵۷- ۷ زن روی صندلی به صورت ثابت نشسته‌اند. به چند طریق می‌توان ۴ بچه را بین آن‌ها قرار داد به طوری که هیچ دو بچه‌ای کنار هم نباشند؟

در یک کوپهٔ قطار، دو ردیف صندلی ۵ تایی قرار گرفته است. ۵ مرد و ۴ زن می‌خواهند روی صندلی‌ها بنشینند. در هر قسمت تعداد حالت‌های ممکن را به دست آورید.

۵۸- نشستن روی صندلی‌های مختلف برای همهٔ افراد امکان داشته باشد.

۵۹- صندلی در انتهای یکی از ردیف‌ها خالی بماند.

۶۰- مردها در یک ردیف و زن‌ها هم در یک ردیف باشند.

۶۱- چند جایگشت از حروف کلمهٔ «انتخابات» وجود دارد؟

درس ۳ ترکیب

ترکیب (انتخاب)

فرض کنید، ۱۰ نفر برای استخدام به شرکتی مراجعه کرده‌اند. مدیر شرکت می‌خواهد دو نفر از بین آن‌ها انتخاب کند. این‌جا فقط خود افراد انتخاب‌شده مهم هستند، نه ترتیب بین آن‌ها. برای همین، اگر $A,B,C,\dots$ افراد مراجعه‌کننده باشند، AB با BA فرقی نمی‌کند؛ یعنی مهم نیست که اول A و بعد B انتخاب شود یا این‌که اول B و بعد A انتخاب شود.

تعریف: به هر انتخاب r شئ از n شئ متمایز، که در آن ترتیبِ انتخاب، اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی از n شئ گفته می‌شود؛ به عبارت دیگر به هر زیرمجموعهٔ r تایی از n شئ متمایز، یک ترکیب r تایی از n شئ گفته و تعداد آن‌ها را با نمادهای $\binom{n}{r}$ یا $C(n,r)$ نمایش می‌دهیم.

تعداد انتخاب‌های r شئ از n شئ متمایز (ترکیب r شئ از n شئ): $(0\le r\le n)$

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثلاً تعداد حالت‌هایی که ۲ نفر از بین ۱۰ نفر ممکن است استخدام شوند، می‌شود:

$$C(10,2)=\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!8!}=\frac{10\times9\times\cancel{8!}}{2\times\cancel{8!}}=45$$

مثال: چند زیرمجموعهٔ ۴ عضوی از مجموعهٔ $A=\{1,2,3,\dots,9\}$ وجود دارد؟

پاسخ: باید ۴ عضو از ۹ عضو انتخاب کنیم. می‌دانید که ترتیب در مجموعه اهمیتی ندارد، پس با فرمول ترکیب سروکار داریم:

تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعهٔ ۹ عضوی = تعداد حالت‌های انتخاب ۴ عضو از ۹ عضو $=\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!5!}=\frac{9\times8\times7\times6\times\cancel{5!}}{4!\cancel{5!}}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2}=126$

مثال: درون جعبه‌ای ۴ مهرهٔ آبی A_1,A_2,A_3,A_4 و ۶ مهرهٔ قرمز $G_1,G_2,\dots,G_6$ وجود دارد. می‌خواهیم از این جعبه ۴ مهره انتخاب کنیم. در هر قسمت تعداد حالت‌های ممکن را به دست آورید.

الف) ۴ مهره از بین همهٔ مهره‌ها انتخاب شوند.

ب) از هر رنگ به تعداد مساوی انتخاب شود.

پ) مهره‌های انتخاب‌شده هم‌رنگ باشند.

پاسخ: الف) باید ۴ مهره از ۱۰ مهره انتخاب کنیم. تعداد حالت‌ها می‌شود:

$$\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!6!}=\frac{10\times9\times8\times7\times\cancel{6!}}{4\times3\times2\times\cancel{6!}}=210$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

ب کار ما انتخاب ۴ مهره است. چون می‌خواهیم از هر رنگ به تعداد مساوی انتخاب شود، باید ۲ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ قرمز (*به «و» دقت کن!*) انتخاب کنیم، بنابراین انتخاب ۲ تا آبی از ۴ مهرهٔ آبی و انتخاب ۲ تا قرمز از ۶ مهرهٔ قرمز اجزای کار خواهند بود. طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های هر جزء را در هم ضرب می‌کنیم، یعنی:

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۶}{۲}=\frac{۴!}{۲!\times۲!}\times\frac{۶!}{۲!۴!}=۶\times۱۵=۹۰$$

پ ۴ مهرهٔ انتخابی یا باید آبی باشند یا قرمز (*به «یا» دقت کن، با اصل جمع طرفی!*). به عبارت دیگر مسئله را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. یا هر ۴ مهره آبی باشند، تعدادی یا هر ۴ مهره قرمز باشند. با انجام هر کدام از این‌ها کار تمام شده است. به عبارت دیگر این‌ها جزء کار نبوده و با هم اتفاق نمی‌افتند، بلکه هر کدام تعدادی حالت مطلوب هستند که باید با هم جمع شوند. پس:

$$\underbrace{\binom{۴}{۴}}_{\text{۴ تا آبی}}\underset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۶}{۴}}_{\text{۴ تا قرمز}}=\frac{۴!}{۴!۰!}+\frac{۶!}{۴!۲!}=۱+۱۵=۱۶$$

مثال **از بین ۷ دانش‌آموز تجربی و ۸ دانش‌آموز ریاضی می‌خواهیم شورایی ۳ نفره تشکیل دهیم. در هر قسمت، تعداد حالت‌های ممکن را به دست آورید.**

الف) فقط یک دانش‌آموز تجربی در شورا انتخاب شود.

ب) از هر دو رشته در شورا نماینده‌ای حضور داشته باشد.

پ) حداقل دو دانش‌آموز ریاضی، عضو شورا باشند.

ت) حداکثر، دو دانش‌آموز تجربی، عضو شورا باشند.

پاسخ **الف** کار ما انتخاب ۳ دانش‌آموز است. اگر یکی از تجربی انتخاب شود، پس دوتای باقی‌مانده، از ریاضی‌ها خواهند بود، پس باید ۱ دانش‌آموز تجربی و ۲ دانش‌آموز ریاضی انتخاب کنیم. تعداد حالت‌ها می‌شود:

$$\binom{۷}{۱}\times\binom{۸}{۲}=۷\times۲۸=۱۹۶$$

ب مسئله را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. یک حالت مطلوب این است که یک تجربی و دو ریاضی داشته باشیم. حالت دوم این است که دو تجربی و یک ریاضی داشته باشیم. طبق اصل جمع باید این دو حالت مطلوب را با هم جمع کنیم، پس:

$$\underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{دو تا ریاضی}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{یک تجربی}}\underset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۸}{۱}}_{\text{یک ریاضی}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۷}{۲}}_{\text{دوتا تجربی}}=(۲۸\times۷)+(۸\times۲۱)=۱۹۶+۱۶۸=۳۶۴$$

پ حداقل دوتا، یعنی دوتا یا بیشتر:

$$\overbrace{\underbrace{\binom{۸}{۲}}_{\text{دو تا ریاضی}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۷}{۱}}_{\text{یک تجربی}}}^{\text{مطلوب اول}}\underset{\text{یا}}{+}\overbrace{\underbrace{\binom{۸}{۳}}_{\text{هر سه تا ریاضی}}}^{\text{مطلوب دوم}}=(۲۸\times۷)+۵۶=۲۵۲$$

ت حداکثر دوتا، یعنی دوتا، یا کم‌تر، پس:

$$\overbrace{\underbrace{\binom{۷}{۲}\times\binom{۸}{۱}}_{\text{دوتا تجربی و یکی ریاضی}}}^{\text{مطلوب اول}}\underset{\text{یا}}{+}\overbrace{\underbrace{\binom{۷}{۱}\times\binom{۸}{۲}}_{\text{یکی تجربی و دوتا ریاضی}}}^{\text{مطلوب دوم}}\underset{\text{یا}}{+}\overbrace{\underbrace{\binom{۸}{۳}}_{\text{هر سه ریاضی}}}^{\text{مطلوب سوم}}=۱۶۸+۱۹۶+۵۶=۴۲۰$$

محاسبهٔ ساده‌تر برخی از فرمول‌های ترکیب

فرمول‌های جدول زیر به حل ساده‌تر سؤالات ترکیب کمک می‌کند:

	فرمول	مثال
۱	$\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$	$\binom{۵}{۰}=۱,\binom{۷}{۷}=۱$
۲	$\binom{n}{۱}=n$	$\binom{۱۰}{۱}=۱۰$
۳	$\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$	$\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵,\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$
۴	$\binom{n}{۳}=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳\times۲\times۱}$	$\binom{۷}{۳}=\frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲\times۱}=۳۵$
۵	$\binom{n}{۴}=\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۴\times۳\times۲\times۱}$	$\binom{۸}{۴}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵}{۴\times۳\times۲\times۱}=۷۰$
۶	$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$	$\binom{۵}{۳}=\binom{۵}{۵-۳}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$

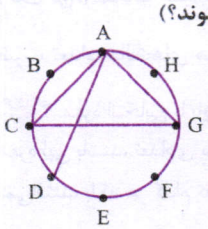
@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال ۸ نقطه روی محیط دایره‌ای قرار گرفته‌اند.

الف) با این ۸ نقطه چند پاره‌خط می‌توان ساخت؟ (چند وتر از دایره که دو سر آن‌ها از بین این نقاط انتخاب شوند؟)

ب) با این ۸ نقطه چند مثلث می‌توان ساخت که رأس‌های مثلث از بین این نقاط انتخاب شوند؟



پاسخ **الف** هر دو نقطه که انتخاب کنیم، دقیقاً یک پاره‌خط به دست می‌آید. مثلاً اگر A و D را انتخاب کنیم، پاره‌خط AD به دست می‌آید، بنابراین تعداد پاره‌خط‌ها، برابر با تعداد حالت‌های انتخاب ۲ نقطه از این ۸ نقطه می‌شود، یعنی: $\binom{۸}{۲} = \frac{۸\times۷}{۲} = ۲۸$ تا.

ب هر ۳ نقطه که انتخاب کنیم، دقیقاً یک مثلث به دست می‌آید. مثلاً اگر A و C و G را انتخاب کنیم، مثلث ACG به دست می‌آید. بنابراین تعداد مثلث‌ها با تعداد انتخاب‌های ۳ تایی از ۸ نقطه برابر است، یعنی: $\binom{۸}{۳} = \frac{۸\times۷\times۶}{۶} = ۵۶$.

مثال مقدار n را از تساوی $P(n,۳) = ۱۲\,C(n,۴)$ به دست آورید.

پاسخ ابتدا توجه کنید که $n \geq ۳$ و $n \geq ۴$ است، بنابراین $n \geq ۴$ خواهد بود. با استفاده از فرمول‌های ترتیب و ترکیب داریم:

$$\frac{n!}{(n-۳)!} = ۱۲\times\frac{n!}{۴!(n-۴)!} \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)\cancel{(n-۳)!}}{\cancel{(n-۳)!}} = ۱۲\times\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)\cancel{(n-۴)!}}{۴!\,\cancel{(n-۴)!}}$$

$$\Rightarrow \cancel{n}\,\cancel{(n-۱)}\,\cancel{(n-۲)} = \frac{\cancel{n}\,\cancel{(n-۱)}\,\cancel{(n-۲)}\,(n-۳)}{۲} \Rightarrow ۲ = n-۳ \Rightarrow \boxed{n=۵}$$

توجه دارید که چون $n \geq ۴$ است، n، $n-۱$ و $n-۲$ همگی مخالف صفر بوده و بنابراین از دو طرف تساوی ساده می‌شوند.

تلفیق مسئله‌های ترتیب و ترکیب

در برخی از مسئله‌ها، هم نیاز به انتخاب و هم نیاز به جایگشت داریم. در این مسئله‌ها مرحله به مرحله جلو می‌رویم و طبق اصل ضرب، همهٔ حالت‌ها را در هم ضرب می‌کنیم.

مثال **با استفاده از رقم‌های ۹, ... ,۳,۲,۱ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که دو رقم زوج و یک رقم فرد داشته باشد؟** *(کنکور ریاضی ۹۶)*

پاسخ **گام اول** انتخاب دو عدد زوج از بین ۸,۶,۴,۲ که به $\binom{۴}{۲}$ روش امکان‌پذیر است.

گام دوم انتخاب یک عدد فرد از بین ۹,۷,۵,۳,۱ که به $\binom{۵}{۱}$ روش امکان‌پذیر است.

گام سوم حالا ۳ عدد داریم که با جابه‌جایی آن‌ها اعداد مختلفی درست می‌شود، یعنی !۳ جایگشت دارند. پس تعداد اعداد سه‌رقمی با شرایط مسئله می‌شود: $\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}۳! = ۶\times۵\times۳! = ۱۸۰$

مثال **هتل‌آپارتمانی ۴ سوئیت در ۴ طبقه دارد. به چند طریق می‌توان ۵ نفر را در این سوئیت‌ها جا داد، به طوری‌که هیچ سوئیتی خالی نماند؟**

پاسخ چون می‌خواهیم هیچ سوئیتی خالی نماند، پس باید ۳ نفر در سه‌تا از سوئیت‌ها و در یکی از آن‌ها ۲ نفر قرار گیرد، بنابراین:

گام اول ۲ نفر از ۵ نفر را انتخاب می‌کنیم که به $\binom{۵}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است.

گام دوم این ۲ نفر را می‌توانیم در هر یک از ۴ سوئیت قرار دهیم.

گام سوم ۳ نفر باقی‌مانده را باید در ۳ سوئیت باقی‌مانده قرار دهیم. این کار نیز به !۳ حالت (جایگشت‌های ۳ شئ متمایز) امکان‌پذیر است، پس تعداد حالت‌ها می‌شود: $\binom{۵}{۲}\times۴\times۳! = ۱۰\times۲۴ = ۲۴۰$

مسئله‌های شامل و فاقد

فرض کنید مربی فوتبال می‌خواهد برای بازی تیم خود، لیست ۱۱ نفرهٔ بازیکنان را ارائه کند. تیم او ۱۸ بازیکن دارد. دروازه‌بان این تیم ثابت بوده و حتماً در لیست ۱۱نفره قرار دارد. او به چند طریق می‌تواند ترکیب تیم را تعیین کند؟ مربی باید ۱۱ بازیکن از ۱۸ بازیکن را انتخاب کند اما یک نفر که دروازه‌بان باشد حتماً انتخاب می‌شود، بنابراین کافی است ۱۰ بازیکن از ۱۷ بازیکن باقی‌مانده انتخاب کند. تعداد حالت‌های انتخاب ۱۱ بازیکن به طوری که حتماً شامل دروازه‌بان ثابت تیم باشد، می‌شود: $\binom{۱۷}{۱۰} = \binom{۱۸-۱}{۱۱-۱}$.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته

۱ تعداد راه‌های انتخاب r شئ از n شئ متمایز، به طوری که حتماً شامل k شئ خاص باشد، می‌شود: $\binom{n-k}{r-k}$. *(به اصطلاح شامل از هر دو تا کم می‌کنه!)*

در مثال صفحهٔ قبل، مربی نمی‌خواهد یکی از بازیکنان را به دلیل مسائل انضباطی، در ترکیب تیم قرار دهد. بنابراین ابتدا او را از لیست ۱۸ نفره، خط می‌زند تا ۱۷ بازیکن باقی بمانند. حالا باید ۱۱ بازیکن از بین آن‌ها انتخاب کند. بنابراین تعداد حالت‌های انتخاب ۱۱ بازیکن از بین ۱۸ بازیکن به طوری که قطعاً فرد خطاکار در ترکیب نباشد، می‌شود: $\binom{۱۸-۱}{۱۱}=\binom{۱۷}{۱۱}$.

۲ تعداد راه‌های انتخاب r شئ از n شئ متمایز که فاقد k شئ خاص باشد، می‌شود: $\binom{n-k}{r}$. *(به اصطلاح فاقد فقط از بالا کم می‌کنه!)*

مثال **به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که دو نفر از آنان نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟** *(کنکور تجربی ۹۹)*

پاسخ بهتر است از اصل متمم استفاده کنیم:

$$\text{مطلوب} = \text{کل} - \text{نامطلوب} = \binom{۹}{۵}-\binom{۷}{۳}=\frac{۹!}{۵!۴!}-\frac{۷!}{۳!۴!}=۱۲۶-۳۵=۹۱$$

حالت‌هایی که هر دو نفر با هم انتخاب شده‌اند. (به فرمول بعدی دقت کنید.)

انتخاب‌های دو مرحله‌ای

فرض کنید ۵ جفت کفش، به صورت $A_۱, A_۲, \ldots, A_۵$ داریم. می‌خواهیم از بین آن‌ها، ۳ لنگه انتخاب کنیم به طوری که هیچ‌کدام جفت نشوند. توجه دارید که این سه لنگه برای سه جفت مختلف هستند. دو مرحله در نظر می‌گیریم:

مرحله اول ابتدا از بین جفت‌ها سه‌تا انتخاب می‌کنیم. این کار به $\binom{۵}{۳}=۱۰$ حالت امکان‌پذیر است. توجه دارید که هنوز لنگه‌کفشی انتخاب نکرده‌ایم و فقط ۳ جفت انتخاب کرده‌ایم.

مرحله دوم از جفت اول، یا باید لنگهٔ چپ یا لنگهٔ راست را انتخاب کنیم، از دو جفت دیگر هم همین‌طور. بنابراین به $\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}$ حالت می‌توانیم از سه جفت انتخاب‌شده از هر کدام، یک لنگه برداریم.

بنابراین تعداد راه‌های انتخاب ۳ لنگه از ۵ جفت، به طوری که هیچ کدام جفت‌نشده و همگی لنگه‌به‌لنگه باشند، می‌شود: $\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۸۰$

مثال **از هر یک از ۶ منطقهٔ A، B، C، D، E و F، ۱۵ دانش‌آموز، در یک مسابقه شرکت کرده‌اند.** *(کنکور تجربی ۹۸)*

الف) به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز که دوبه‌دو غیر هم‌منطقه‌ای هستند (۴ تا از ۴ منطقهٔ مختلف) انتخاب کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان ۴ دانش‌آموز انتخاب کرد به طوری که فقط دو نفر از آن‌ها از یک منطقه باشند؟

پاسخ **الف** ۴ دانش‌آموز از ۴ منطقهٔ مختلف هستند. مرحلهٔ اول، انتخاب منطقه‌ها است، پس ابتدا ۴ منطقه از ۶ منطقه که به $\binom{۶}{۴}=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$ حالت امکان‌پذیر است، انتخاب می‌کنیم. هر منطقه ۱۵ دانش‌آموز دارد. از هر منطقه یکی را انتخاب می‌کنیم. این عمل نیز به $\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}$ حالت امکان‌پذیر است، پس به $\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}=۱۵^۵$ حالت می‌توان این کار را انجام داد.

ب ابتدا منطقه‌ای که قرار است دو نماینده داشته باشد را انتخاب می‌کنیم که $\binom{۶}{۱}$ حالت دارد. حالا فرض کنید این منطقه انتخاب شده است، باید ۲ دانش‌آموز از ۱۵ دانش‌آموز این منطقه را انتخاب کنیم که به $\binom{۱۵}{۲}$ حالت امکان‌پذیر است. دو دانش‌آموز دیگر باید از دو منطقهٔ مختلف باشند *(مسئلهٔ لنگه‌کفش)*. ابتدا دو منطقه از ۵ منطقهٔ باقی‌مانده و از هر کدام نیز یک دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم. این عمل نیز به $\binom{۵}{۲}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}$ حالت قابل انجام است، پس تعداد راه‌های انجام کار می‌شود: $\binom{۶}{۱}\binom{۱۵}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۱۵}{۱}\binom{۱۵}{۱}$

مثال **از هر یک از ۵ مدرسه، ۶ دانش‌آموز برای انجام مسابقهٔ تنیس داوطلب شده‌اند. می‌خواهیم یک بازی تنیس ۴ نفره (دوبه‌دو) که اعضای هر تیم از یک مدرسه هستند، صورت گیرد. این بازی به چند طریق ممکن است انجام شود؟** *(کنکور ریاضی ۹۲)*

پاسخ این بازی بین دو مدرسه صورت می‌گیرد، پس ابتدا به $\binom{۵}{۲}$ روش دو مدرسه انتخاب می‌کنیم. از هر کدام از دو مدرسه نیز دو نفر باید برای انجام بازی انتخاب کنیم. بنابراین به $\binom{۶}{۲}\binom{۶}{۲}$ روش نیز می‌توانیم بازی‌کنان هر تیم را از مدرسه‌شان انتخاب کنیم، پس به تعداد $\binom{۵}{۲}\binom{۶}{۲}\binom{۶}{۲}=۱۰\times۱۵\times۱۵=۲۲۵۰$ حالت می‌تواند بازی انجام شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

اتحادهای ترکیبیاتی

بین حالت‌های انتخاب اشیا روابط مهمی وجود دارد که کتاب ۳تا از آن‌ها را گفته است:

اتحاد	توضیح	مثال
$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$	تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n شیء با تعداد راه‌های انتخاب $n-r$ شیء از n شیء یکسان است. (هر rتایی که انتخاب کنیم انگار $n-r$ تا را انتخاب و بیرون انداخته‌ایم.)	$\binom{8}{6}=\binom{8}{2}$
$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}=\binom{n}{r}$ (اتحاد پاسکال)	به $\binom{n}{r}$ روش می‌توانیم r شیء از n شیء انتخاب کنیم. این انتخاب‌ها را به دو گروه تقسیم می‌کنیم که جمع آن‌ها باید همان $\binom{n}{r}$ باشد. الف) انتخاب‌هایی که شامل عضو خاص a هستند طبق فرمول شامل، تعداد آن‌ها $\binom{n-1}{r-1}$ می‌شود. ب) انتخاب‌هایی که فاقد عضو خاص a هستند طبق فرمول فاقد، تعداد آن‌ها $\binom{n-1}{r}$ می‌شود.	$\binom{9}{4}+\binom{9}{5}=\binom{10}{5}$ (n−1، r)
$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$	تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه برابر 2^n است که با مجموع تعداد زیرمجموعه‌های صفرعضوی، تک‌عضوی و ... و nعضوی برابر است.	$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\cdots+\binom{5}{5}=2^5=32$

مثال حاصل عبارت $\binom{9}{6}+\binom{8}{5}+\binom{8}{4}$ را به دست آورید.

پاسخ بنا بر اتحاد پاسکال داریم:

$$\underbrace{\binom{8}{4}+\binom{8}{5}}+\binom{9}{6}=\binom{9}{5}+\binom{9}{6}=\binom{10}{6}$$

مثال حاصل $\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\cdots+\binom{10}{10}$ را به دست آورید.

پاسخ

$$\overbrace{\binom{10}{0}}^{1}+\binom{10}{1}+\cdots+\binom{10}{10}=2^{10}\Rightarrow\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\cdots+\binom{10}{10}=1024-1=1023$$

انواع انتخاب‌ها	روش	مثال
حداقل (کف)	به تعداد گفته‌شده یا بیشتر انتخاب می‌کنیم.	مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e\}$ چند زیرمجموعهٔ حداقل ۳عضوی دارد؟ $\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{۳عضوی}}$ یا $\underbrace{\binom{5}{4}+\binom{5}{5}}_{\text{بیشتر}}$
حداکثر (سقف)	به تعداد گفته‌شده یا کم‌تر انتخاب می‌کنیم.	مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e\}$ چند زیرمجموعهٔ حداکثر ۳عضوی دارد؟ $\underbrace{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}}_{\text{کم‌تر}}$ یا $\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{۳عضوی}}$
شامل اشیای خاص	آن اشیای خاص را قرار داده و از بقیه به تعداد کافی انتخاب می‌کنیم.	مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی چند زیرمجموعهٔ ۵عضوی شامل ۱ و ۲ دارد؟ ۱ و ۲ را قرار می‌دهیم، پس کافی است ۳ عدد دیگر از ۷ عدد باقی‌مانده به $\binom{7}{3}$ روش انتخاب کنیم.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

جمع‌بندی انواع انتخاب‌ها

انواع انتخاب‌ها	روش	مثال
فاقد اشیای خاص	آن اشیا را کنار می‌گذاریم و از بقیه به تعداد لازم انتخاب می‌کنیم.	مجموعهٔ اعداد طبیعی یک‌رقمی چند زیرمجموعهٔ ۵عضوی فاقد ۱ و ۲ دارد؟ ۱ و ۲ را کنار می‌گذاریم؛ پس ۵ عدد از ۷ عدد باقی‌مانده به $\binom{۷}{۵}$ روش انتخاب می‌کنیم.
دومرحله‌ای	اول از یک گروه انتخاب کرده و بعد از بین آن‌ها دوباره انتخاب می‌کنیم.	از ۵ منطقه از هر کدام ۴ نفر در مسابقات شرکت کرده‌اند. به چند طریق می‌توانیم ۳ نفر دوبه‌دو غیر هم‌منطقه‌ای انتخاب کنیم؟ $\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳ منطقه انتخاب می‌کنیم.}}\times\underbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}}_{\text{از هر منطقه از هر کدام یک نفر}}$
انتخاب و چینش	ابتدا به تعداد کافی انتخاب کرده و سپس در جایگشت اشیای انتخاب‌شده ضرب می‌کنیم.	با ارقام ۱ تا ۹ (بدون تکرار) چند عدد ۵رقمی می‌توان ساخت به طوری که دقیقاً دو رقم فرد داشته باشد؟ $\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{انتخاب دو رقم فرد}}\times\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ رقم زوج}}\times\overbrace{۵!}^{\text{جایگشت ۵ رقم انتخاب شده}}$

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ این‌که تشخیص دهید در شمارش تعداد حالت‌ها ترتیب مهم است یا نه. اگر ترتیب مهم باشد مسئله مربوط به جایگشت، در غیر این صورت مربوط به تعداد انتخاب‌ها (ترکیب) می‌شود.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۶۲ تا ۶۵

تیپ۲ شمارش تعداد انتخاب‌ها است که مهم‌ترین سؤال این درس است. حواستان باشد تا کار تمام نشده، تعداد انتخاب‌ها در هم ضرب و بعد با بقیهٔ حالت‌های مطلوب جمع (یا) می‌شود.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۶۶ تا ۹۶ و ۹۸ تا ۱۰۶

تیپ۳ حل معادله‌های شامل $P(n,r)$ و $C(n,r)$ است. هر کدام را با فرمول خودش باز می‌کنید و ساده می‌کنید تا n به دست آید. حواستان باشد که n عددی طبیعی است پس برخی از جاها با جست‌وجو می‌توانید n را پیدا کنید.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۹۷ و ۱۱۱

تیپ۴ مسئله‌های دو مرحله‌ای است (دو بار انتخاب یا انتخاب و چینش) است. این مدل هم در امتحان و هم در کنکور زیاد مطرح می‌شود.

حالاتوحل‌کن سؤال‌های ۱۰۷ و ۱۰۸ و ۱۰۹ و ۱۱۲ و ۱۱۳.

سؤال‌های امتحانی

در جای خالی مشخص کنید جواب کدام‌یک از قسمت‌ها، $C(۱۰,۳)$ و جواب کدام‌یک $P(۱۰,۳)$ است؟

۶۲- در یک لیگ ۱۰ تیمی به ..... طریق، ۳ تیم می‌توانند به مسابقات آسیایی راه پیدا کنند؟

۶۳- در یک قرعه‌کشی، از بین ۱۰ نفر به ..... طریق می‌توان به ۳ نفر جوایز ۱ ، ۲ و ۳ میلیون ریالی جایزه داد؟

۶۴- به ..... روش می‌توانیم انتخاب ۳ رقم از بین ارقام ۰ تا ۹ انتخاب و ..... یک کد سه‌رقمی (کد سه‌رقمی نه عدد سه‌رقمی، پس صفر هم در ابتدا می‌تواند قرار گیرد.) بسازیم.

۶۵- اخراج ۳ کارمند از بین ۱۰ کارمند، به ..... طریق می‌تواند صورت گیرد؟

می‌خواهیم از بین ۷ دانش‌آموز پایهٔ دهم و ۵ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم یک تیم ۴ نفره درست کنیم. در چند حالت:

۶۶- هیچ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم در تیم نیست؟

۶۷- فقط یک دانش‌آموز پایهٔ یازدهم در تیم است؟

۶۸- همهٔ افراد تیم، از یک پایه هستند؟

۶۹- از هر پایه به تعداد مساوی در تیم حضور دارند؟

۷۰- حداقل سه دانش‌آموز پایهٔ دهم در تیم است؟

۷۱- حداکثر دو دانش‌آموز پایهٔ یازدهم در تیم است؟

۷۲- دانش‌آموزان هر دو پایه در تیم حضور دارند ولی دانش‌آموزان پایهٔ دهم کم‌تر نیستند؟

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

از بین ۴ مهندس، ۳ پزشک و ۲ نویسنده می‌خواهیم شورایی ۳ نفره انتخاب کنیم. در چند حالت:

۷۳- از هر سه شغل در شورا نماینده‌ای وجود دارد؟

۷۴- دو پزشک و یک مهندس عضو شورا هستند؟

۷۵- همهٔ اعضای شورا دارای یک شغل هستند؟

۷۶- حداقل ۲ مهندس عضو شورا هستند؟

۷۷- حداکثر ۱ نویسنده عضو شورا است؟

۷۸- اعضای شورا فقط از دو شغل مختلف هستند؟

۷۹- تعداد پزشکان بیشتر از مهندسان در شورا است؟

۸۰- مغازه‌داری ۶ نوع خشکبار مختلف دارد. او با مخلوط‌کردن حداقل ۴ نوع از آن‌ها (و به اندازهٔ مساوی) می‌تواند آجیل درست کند. او چند نوع آجیل می‌تواند درست کند؟

۸۱- مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $\binom{5}{2}\times\binom{6}{3}$ باشد.

۸۲- ۶ نفر به یک هتل مراجعه کرده‌اند. به چند طریق می‌توانیم آن‌ها را در سه اتاق یک‌نفره، دونفره و سه‌نفره اسکان بدهیم؟

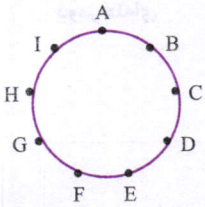
روی ۹ کارت، اعداد ۱ تا ۹ را نوشته و آن‌ها را درون کیسه‌ای قرار می‌دهیم. دو کارت بیرون می‌آوریم. در چند حالت:

۸۳- مجموع دو کارت فرد است؟

۸۴- مجموع دو کارت زوج است؟

۸۵- مجموع دو کارت حداقل برابر ۴ است؟

۹ نقطه روی دایرهٔ مقابل قرار گرفته‌اند.



۸۶- چند مثلث یا ۴ ضلعی می‌توان ساخت که این نقاط رأس‌های آن باشند؟

۸۷- چند مثلث می‌توان ساخت که همگی در رأس A مشترک باشند؟

۸۸- چند مثلث می‌توان ساخت که همگی در ضلع CH مشترک باشند؟

۸۹- چند چهارضلعی می‌توان ساخت که BG قطری از آن باشد؟

۹۰- چند چهارضلعی می‌توان ساخت که BG ضلعی از آن باشد؟

۹۱- امتحانی ۱۰ سؤال تشریحی دارد. یک دانش‌آموز به چند روش می‌تواند:

الف) به ۴ سؤال پاسخ دهد؟ ب) به ۶ سؤال پاسخ ندهد؟ پ) چرا جواب پاسخ‌های الف و ب یکسان به دست می‌آیند؟

ت) به ۷ سؤال پاسخ دهد در صورتی که از ۵ سؤال اول فقط به ۳ سؤال پاسخ دهد؟

۹۲- به ۸ سؤال پاسخ دهد در صورتی که از ۵ سؤال اول، حداقل به ۴ سؤال پاسخ دهد؟

۹۳- در یک کلاس ۱۵ نفره، ۲ نفر با هم قهر هستند. می‌خواهیم ۵ نفر را برای اردو انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد به طوری که دو نفری که قهرند، با هم انتخاب نشوند؟

در یک آپارتمان که ۱۰ زوج، زندگی می‌کنند قرار است شورای ۴ نفره متشکل از اعضای آن تشکیل شود.

۹۴- به چند حالت می‌توان این شورا را تشکیل داد در صورتی که هیچ‌یک از اعضا زن و شوهر نباشند؟

۹۵- به چند حالت می‌توان این شورا را تشکیل داد در صورتی که فقط یک زوج در شورا باشد؟

۹۶- ۵ دانش‌آموز ریاضی در گروه A و ۵ دانش‌آموز تجربی در گروه B و ۵ دانش‌آموز انسانی در گروه C دسته‌بندی شده‌اند. می‌خواهیم ۳ تا از آن‌ها برای یک مسابقهٔ تلویزیونی انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد در صورتی که بخواهیم گروه ۳ نفره از دو رشته انتخاب شوند؟

۹۷- معادله‌های زیر را حل کرده و n را به دست آورید. $(n\in\mathbb{N})$

الف) $\binom{n}{2}=66$ ب) $3C(n,2)+n=70$

مجموعهٔ $A=\{1,2,\dots,7\}$ را در نظر گرفته و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۹۸- این مجموعه، چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

۹۹- این مجموعه چند زیرمجموعهٔ حداکثر ۳ عضوی دارد؟

۱۰۰- این مجموعه چند زیرمجموعهٔ حداقل ۶ عضوی دارد؟

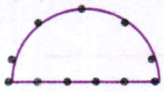
۱۰۱- این مجموعه، چند زیرمجموعهٔ فردعضوی دارد؟

۱۰۲- این مجموعه، چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد که عدد ۷، عضو آن باشد؟

۱۰۳- این مجموعه، چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد که عدد ۷، عضو آن نباشد؟

۱۰۴- این مجموعه، چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد که عدد ۷ عضو آن باشد ولی ۲ عضو آن نباشد؟

۱۱ نقطه مطابق شکل مقابل روی محیط شکل قرار گرفته‌اند. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.



۱۰۵- چند مثلث می‌توان ساخت که رأس‌های آن‌ها از بین این نقاط انتخاب شوند؟

۱۰۶- چند چهارضلعی می‌توان ساخت که رأس‌های آن‌ها از بین این نقاط انتخاب شوند؟

۱۰۷- به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۶ کتاب ریاضی مختلف و ۴ کتاب از ۵ کتاب فیزیک مختلف را یک در میان در قفسه‌ای چید؟

با استفاده از رقم‌های ۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷ اعداد سه‌رقمی می‌سازیم. در چندتا از این اعداد: (تکرار مجاز نیست)

۱۰۸- فقط یک رقم فرد وجود دارد؟

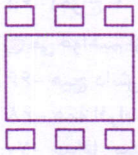
۱۰۹- فقط دو رقم فرد وجود دارد؟

۱۱۰- رقم‌های فرد و زوج یک در میان قرار می‌گیرند؟

۱۱۱- معادلهٔ روبه‌رو را حل کرده و n را به دست آورید. $(n\in\mathbb{N})$

$P(n,2)+C(n,n-2)=63$

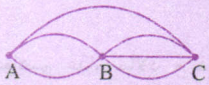
۱۱۲- ۱۰ نفر که دو به دو برادر یکدیگرند (۵ جفت برادر) داریم. می‌خواهیم سه جفت از آن‌ها را انتخاب و در دو طرف یک میز مستطیل‌شکل بنشانیم، به طوری که هر فرد روبه‌روی برادرش باشد. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟



۱۱۳- در ۶ پیج اینستاگرام هر کدام ۱۰ عکس وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم ۴ عکس انتخاب کنیم که هیچ دو عکسی از یک پیج نباشند؟

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل ششم، منتخب سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل ششم	رشتهٔ: ریاضی و تجربی	مدت امتحان: ۶۰ دقیقه	Kheilisabz.om	نمره
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. الف) جایگشت‌های ۵ شیء متمایز برابر ۱۲۰تا است. ب) $3! + 4! = 7!$ پ) تعداد راه‌های توزیع ۳ جایزهٔ مختلف بین ۵ نفر برابر $\binom{5}{3}$ است. ت) $\binom{7}{2} = 21$				۱
۲	با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت به طوری که از هر راه فقط یک بار عبور کرد؟  				۱
۳	با ارقام ۰،۲،۳،۴،۵ و بدون تکرار ارقام: الف) چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۴۰۰ می‌توان نوشت؟ پ) چند عدد سه‌رقمی زوج می‌توان نوشت؟				۱/۵
۴	با ارقام ۰،۱،۲،۳،۴،۵ چند عدد ۴رقمی بخش‌پذیر بر ۵ و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار ارقام)				۱
۵	حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. الف) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ ب) $\frac{n!}{(n-4)!}$				۱
۶	با حروف کلمهٔ «جهانگردی» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمهٔ ۸حرفی می‌توان نوشت که حروف کلمهٔ «جهان» کنار هم باشند. ب) چند کلمهٔ ۸حرفی می‌توان نوشت که با حروف نقطه‌دار شروع شوند؟				۱
۷	از تساوی $C(n,4) = P(n-1,3)$ مقدار n را به دست آورید.				۱
۸	با حروف کلمهٔ «پارکینگ» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان نوشت؟ ب) چند کلمهٔ ۴حرفی می‌توان نوشت؟ پ) چند کلمهٔ ۶حرفی که با «پاک» شروع شود، می‌توان نوشت؟ ت) چند کلمهٔ ۶حرفی که با حروف کلمهٔ «پاک» شروع شود، می‌توان نوشت؟ ث) چند کلمهٔ ۶حرفی که با یک حرف از حروف کلمهٔ «پاک» شروع شود، می‌توان نوشت؟				۲
۹	از میان ۹ نفر به چند طریق می‌توان: الف) یک تیم سه‌نفره انتخاب کرد. ب) یک تیم ۵نفره و یک تیم ۴نفره انتخاب کرد. پ) ۳ تیم ۳نفره با نام‌های تراکتور، استقلال و پرسپولیس انتخاب کنیم.				۲
۱۰	با نقاط داده‌شده در شکل مقابل چند مثلث می‌توان ساخت؟ 				۱
۱۱	الف) از هر یک از ۶ منطقهٔ A،B،C،D،E و F، ده دانش‌آموز داوطلب شرکت در یک مسابقه شده‌اند. به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها ۴ دانش‌آموز دوبه‌دو غیر هم‌منطقه‌ای انتخاب کرد؟ ب) تعداد زیرمجموعه‌های هفت‌عضوی از مجموعهٔ حروف انگلیسی که شامل a، b و c باشند ولی شامل d و e نباشند، چه‌قدر است؟				۲
	جمع نمرات				۲۰

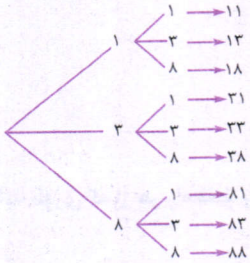
@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- اصل جمع ۲- ۷ ۳- ۱۲

۴- چون صحبتی از عدم تکرار نشده است، پس رقم‌ها می‌توانند تکراری هم باشند:



۵- می‌خواهیم غذا، سالاد و دسر سفارش دهیم، یعنی کار سه مرحله (سه جزء) دارد که هم‌زمان باید انجام شود. طبق اصل ضرب، $۲\times۳\times۵=۳۰$ روش برای سفارش غذا و سالاد و دسر وجود دارد.

۶- غذا یک حالت دارد و آن هم کباب است، پس به $۳\times۵=۱۵$ طریق می‌توان سالاد و دسر سفارش داد.

۷- تنها یکی را می‌خواهیم سفارش دهیم یعنی غذا، سالاد و دسر با هم سفارش داده نمی‌شوند. یا ۲ نوع غذا یا ۳ نوع سالاد یا ۵ نوع دسر را سفارش می‌دهیم، یعنی $۲+۳+۵=۱۰$ حالت، برای سفارش وجود دارد.

۸- مسئله را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: غذا و سالاد یا غذا و دسر.

$$\left.\begin{array}{l}\text{غذا و سالاد}: ۲\times۳=۶\\ \text{غذا و دسر}: ۲\times۵=۱۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۶+۱۰=۱۶$$

۹- جزء اول این است که از A به B (۲ حالت) و جزء دیگر این است که از B به C برویم (۳ حالت). طبق اصل ضرب $۲\times۳=۶$ مسیر از A به C، به طوری که حتماً از B عبور کند، وجود دارد.

۱۰- مسئله را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. یا باید از مسیر A به B یا از مسیر A به D برویم. تعداد حالت‌های مطلوب در هر قسمت به دست می‌آید که طبق اصل جمع باید با هم جمع کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{مسیرهای A به B و سپس B به C}=۲\times۳=۶\\ \text{مسیرهای A به D و سپس D به C}=۱\times۲=۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۶+۲=۸$$

۱۱- هر سؤال دستهٔ A، ۲ حالت، هر سؤال دستهٔ B، ۳ حالت و سؤال‌های دستهٔ C، ۴ حالت برای پاسخگویی دارند. طبق اصل ضرب $۲\times۲\times۲\times۳\times۳\times۳\times۴\times۴\times۴=۲۴^۳$ حالت، برای پاسخگویی وجود دارد.

۱۲- مسئله را به ۳ بخش تقسیم می‌کنیم. فقط سؤال‌های دستهٔ اول یا فقط سؤال‌های دستهٔ دوم یا فقط سؤال‌های دستهٔ سوم را پاسخ دهیم. این‌ها یک سری حالت مطلوب هستند که با هم اتفاق نمی‌افتند، بنابراین حالت‌های هر کدام را طبق اصل جمع با هم جمع می‌کنیم، یعنی $۲^۳+۳^۳+۴^۳$ حالتِ ممکن برای پاسخگویی وجود دارد.

۱۳- هر سؤال دستهٔ C، ۴ حالت دارد، پس $۴\times۴\times۴=۴^۳$ حالت برای پاسخگویی به سؤال‌های دستهٔ C وجود دارد. سؤال‌های دستهٔ A هر کدام ۳ حالت برای پاسخگویی دارند. بلی، خیر و این‌که پاسخ ندهیم، پس $۳\times۳\times۳=۳^۳$ حالت برای سؤال‌های دستهٔ A وجود دارد. به طور مشابه $۴\times۴\times۴=۴^۳$ حالت نیز برای سؤال‌های دستهٔ B وجود دارد، پس طبق اصل ضرب $۴^۳\times۳^۳\times۴^۳=۴۸^۳$ حالت برای پاسخگویی وجود دارد.

۱۴- مسئله را به ۳ بخش تقسیم می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{به سؤال‌های A و B جواب دهیم}: ۲^۳\times۳^۳=۶^۳\\ \text{به سؤال‌های A و C جواب دهیم}: ۲^۳\times۴^۳=۸^۳\\ \text{به سؤال‌های B و C جواب دهیم}: ۳^۳\times۴^۳=۱۲^۳\end{array}\right\}$$

حالت‌های انجام کار $\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۶^۳+۸^۳+۱۲^۳$

۱۵- **الف)** صدگان یک حالت، برای سایر خانه‌ها به ترتیب ۴،۵ و ۳ می‌ماند، پس:

$$\underline{۵}\times\underset{\boxed{۵}}{\underline{۱}}\times\underline{۴}\times\underline{۳}=۶۰$$

ب) رقم یکان ۴ حالت دارد. با به کار رفتن یک رقم در یکان برای سایر خانه‌ها به ترتیب ۴،۵ و ۳ رقم باقی می‌ماند.

$$\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\boxed{۱,۳,۵,۹}}{\underline{۴}}=۲۴۰$$

پ)

$$\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\boxed{۲,۶}}{\underline{۲}}=۱۲۰$$

ت) عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن ۰ یا ۵ باشد. چون می‌خواهیم عدد بر ۵ بخش‌پذیر نباشد، رقم یکان آن ۵ حالت دارد. یکی از ارقام در یکان به کار می‌رود ولی برای خانه بعدی ۵ اضافه می‌شود؛ بنابراین دوباره ۵ حالت برای خانهٔ بعدی به دست می‌آید.

$$\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\boxed{۱,۲,۳,۶,۹}}{\underline{۵}}=۳۰۰$$

ث) رقم آخر یکی از ارقام ۵، ۶ و ۹ می‌تواند باشد. با به کار رفتن یکی در آن، برای خانه‌های بعدی به ترتیب ۴،۵ و ۳ حالت باقی می‌ماند.

$$\underset{\boxed{۵,۶,۹}}{\underline{۳}}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}=۱۸۰$$

ج)

$$\underset{\boxed{۱,۲}}{\underline{۲}}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}=۱۲۰$$

چ) دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{یکان ۱ و دهگان ۲ باشد}: \underline{۳}\times\underline{۴}\times\underset{\boxed{۲}}{\underline{۱}}\times\underset{\boxed{۱}}{\underline{۱}}=۱۲\\ \text{یکان ۲ و دهگان ۱ باشد}: \underline{۳}\times\underline{۴}\times\underset{\boxed{۱}}{\underline{۱}}\times\underset{\boxed{۲}}{\underline{۱}}=۱۲\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow ۱۲+۱۲=۲۴$

ح) **روش اول:** چهار حالت برای ۲ در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l}\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\boxed{۲}}{\underline{۱}}=۶۰\\ \underline{۳}\times\underline{۴}\times\underset{\boxed{۲}}{\underline{۱}}\times\underline{۵}=۶۰\\ \underline{۳}\times\underset{\boxed{۲}}{\underline{۱}}\times\underline{۴}\times\underline{۵}=۶۰\\ \underset{\boxed{۲}}{\underline{۱}}\times\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}=۶۰\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۶۰+۶۰+۶۰+۶۰=۲۴۰$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

روش دوم: حل مستقیم طولانی است، اما متمم آن می‌شود: رقم ۲ در عدد به کار نرود. پس می‌توانیم عددها بدون رقم تکراری که ۲، در آن‌ها به کار نرفته است را از کل عددهای چهاررقمی بدون تکرار کم کنیم.

عددهای فاقد رقم ۲ − کل اعداد چهاررقمی = عددهای شامل ۲

عدد ۲ را کنار می‌گذاریم

$= ۶\times۵\times۴\times۳ - ۵\times۴\times۳\times۲ = ۵\times۴\times۳(۶-۲) = ۲۴۰$

۱۶- الف) دو حالت در نظر می‌گیریم: *(دلیلش رو تو پلهٔ ششم توضیح دادم)*

رقم یکان صفر باشد: $\fr�۵ \times \fr�۴ \times \fr�۳ \times \boxed{۰}\,۱ = ۶۰$

رقم یکان صفر نباشد: $\fr�۴ \times \fr�۴ \times \fr�۳ \times \boxed{۲,۴}\,۲ = ۹۶$

(یک رقم در یکان مصرف شد، صفر هم نمی‌تونه باشه) (دو رقم مصرف شده است)

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۶۰+۹۶=۱۵۶$

ب) عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد. خانهٔ هزارگان هم صفر نمی‌تواند قرار گیرد، بنابراین دو حالت در نظر می‌گیریم:

رقم یکان صفر باشد: $\fr�۵ \times \fr�۴ \times \fr�۳ \times \boxed{۰}\,۱ = ۶۰$

رقم یکان صفر نباشد: $\fr�۴ \times \fr�۴ \times \fr�۳ \times \boxed{۵}\,۱ = ۴۸$

(از ۶ رقم دوتا مصرف شده) $\boxed{۱,۲,۴,۷}$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۶۰+۴۸=۱۰۸$

پ) رقم هزارگان می‌تواند یکی از ارقام ۵ و ۷ باشد، اما حالت‌های رقم صدگان بستگی به آن دارد که رقم هزارگان ۵ یا ۷ باشد. بنابراین مسئله را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

رقم هزارگان ۷ باشد: $\fr�۳ \times \fr�۴ \times \boxed{۰,۱,۲,۴,۵}\,۵ \times \boxed{۷}\,۱ = ۶۰$

رقم هزارگان ۵ باشد: $\fr�۳ \times \fr�۴ \times \boxed{۴,۷}\,۲ \times \boxed{۵}\,۱ = ۲۴$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۶۰+۲۴=۸۴$

ت) رقم هزارگان می‌تواند یکی از رقم‌های ۱، ۲ و ۴ باشد، اما حالت‌های صدگان بستگی به این دارد که رقم هزارگان ۴ باشد یا نه. پس مسئله را به دو بخش، تقسیم می‌کنیم. اگر رقم هزارگان ۱ یا ۲ باشد رقم صدگان هر یک از ارقام دیگر می‌تواند باشد. اگر رقم هزارگان ۴ باشد، رقم صدگان صفر یا ۱ است. پس:

رقم هزارگان ۱ و ۲ باشد: $\fr�۳ \times \fr�۴ \times \fr�۵ \times \boxed{۱,۲}\,۲ = ۱۲۰$

رقم هزارگان ۴ باشد: $\fr�۳ \times \fr�۴ \times \boxed{۱,۰}\,۲ \times \boxed{۴}\,۱ = ۲۴$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۱۲۰+۲۴=۱۴۴$

ث) چون عدد فرد است رقم یکان یکی از اعداد ۱، ۵ و ۷ می‌تواند باشد اما چون عدد از ۲۰۰۰ هم بزرگ‌تر است، رقم هزارگان می‌تواند یکی از رقم‌های ۲، ۴، ۵ و ۷ باشد، بنابراین هنگامی که به هزارگان می‌رسیم، نمی‌دانیم رقم ۱، در یکان به کار رفته است یا خیر. مسئله را به دو بخش تقسیم می‌کنیم:

رقم یکان ۱ باشد: $\fr�۳ \times \fr�۴ \times \fr�۴ \times \boxed{۷,۵,۴,۲}\,۴ \times \boxed{۱}\,۱ = ۴۸$

رقم یکان ۵ یا ۷ باشد: $\fr�۳ \times \fr�۴ \times \frअ۳ \times \boxed{۵,۷}\,۲ = ۷۲$

(۲ و ۴ و یکی از رقم‌های ۵ یا ۷)

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۴۸+۷۲=۱۲۰$

۱۷- حداکثر تعداد بیماران: $۴\times۵\times۱۰\times۴ = ۸۰۰$

حداقل تعداد بیماران: $۴\times۲\times۷\times۳ = ۱۶۸$

۱۸- جایگاه‌های رقم‌های ۲ را در نظر گرفته و مسئله را به چند بخش تقسیم می‌کنیم:

$\frअ۱ \times \frअ۱ \times \frअ۱ \times \frअ۱ \times \frअ۹ \times \frअ۱۰ = ۹۰$

(همهٔ ارقام) (همهٔ ارقام غیر ۲) (همهٔ ارقام)

$\frअ۸ \times \frअ۱ \times \frअ۱ \times \frअ۱ \times \frअ۱ \times \frअ۹ = ۷۲$

(همهٔ ارقام غیر ۰ و ۲) (همهٔ ارقام غیر ۲)

$\frअ۹ \times \frअ۹ \times \frअ۱ \times \frअ۱ \times \frअ۱ \times \frअ۱ = ۸۱$

(همهٔ ارقام غیر صفر) (همهٔ ارقام غیر ۲)

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۹۰+۷۲+۸۱=۲۴۳$

۱۹- الف) رأس A با هر یک از سه رنگ آبی، قرمز یا زرد می‌تواند رنگ شود. یکی از رنگ‌ها در A مصرف می‌شود و بنابراین برای B چون به A وصل است دو رنگ باقی می‌ماند. رأس C نیز هم‌رنگ B نباید باشد، بنابراین برای C نیز دو رنگ باقی می‌ماند. رنگ D باید مخالف C و A باشد، بسته به این‌که رنگ C و A یکسان باشد یا نباشد، دو حالت در نظر می‌گیریم:

رنگ A و C یکی نباشد: $\frअ۳ \times \frअ۲ \times \frअ۱ \times \frअ۱ = ۶$

(رأس A، رأس B، رأس C، رأس D)

رنگ A و C یکی باشد: $\frअ۳ \times \frअ۲ \times \frअ۱ \times \frअ۲ = ۱۲$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۱۲+۶=۱۸$

دقت کنید در حالتی که رأس A و C رنگ‌های یکسان ندارند، فقط یک رنگ برای C و D باقی می‌ماند ولی وقتی C و A رنگ‌های یکسانی دارند، برای D دو رنگ باقی می‌ماند.

ب) C و A را می‌توانیم آبی، قرمز یا زرد کنیم پس C و A هم‌زمان با هم سه رنگ ممکن است داشته باشند. برای B و D نیز هر کدام ۲ رنگ باقی می‌ماند؛ پس طبق اصل ضرب $۳\times۲\times۲=۱۲$ حالت رنگ‌آمیزی وجود دارد.

۲۰- a می‌تواند عضو B باشد یا نباشد، بنابراین ۲ حالت دارد. به همین ترتیب عضوهای دیگر نیز هر کدام ۲ حالت دارند، پس $۲^۵$ زیرمجموعه از A وجود دارد. (یادتان هست اگر A، دارای n عضو باشد، ۲^n زیرمجموعه دارد.)

۲۱- $a \in B$ است، بنابراین یک حالت بیشتر ندارد اما بقیهٔ عضوها هر کدام ۲ حالت دارند، پس $۲^۴$ زیرمجموعه مانند B شامل a وجود دارد. اگر $a \notin B$ نباشد باز هم a یک حالت دارد اما بقیه ۲ حالت دارند، پس $۲^۴$ زیرمجموعه مانند B وجود دارد که $a \notin B$.

۲۲- حروف c، d و b را کنار می‌گذاریم، بنابراین مجموعهٔ B، فقط می‌تواند شامل عضوهای a یا e (هر دو یا هیچ‌کدام) باشد. a و e هر کدام ۲ حالت دارند *(می‌تونن عضو B باشن یا نباشن)*، پس $۲^۲ = ۴$ زیرمجموعه با شرایط مسئله وجود دارد.

۲۳- طبق سؤال ۲۲، ۴ زیرمجموعه وجود دارد که عضوهای آن غیر صدادار نیستند. در واقع این زیرمجموعه‌ها $\{a\}$، $\{e\}$، $\{a,e\}$ و $\varnothing$ هستند، اما $\varnothing$ را هم باید کنار بگذاریم. پس ۳ زیرمجموعهٔ ناتهی که عضوهای آن صدادار باشند، وجود دارد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

برای به دست آوردن زیرمجموعه‌هایی که عضوهای آن همگی بی‌صدا باشند، e و a را کنار می‌گذاریم و d، b و c هر کدام ۲ حالت دارند، پس $۲\times۲\times۲=۸$ زیرمجموعه وجود دارد که عضوهای آن بی‌صدا هستند. البته یکی از این مجموعه‌ها، $\varnothing$ است که باید آن را کنار بگذاریم. بنابراین ۷ زیرمجموعه ناتهی که عضوهای آن همگی بی‌صدا باشند، وجود دارد. طبق اصل جمع $۳+۷=۱۰$ زیرمجموعه با شرایط موردنظر وجود دارد.

۲۴- حداقل یک حرف صدادار یعنی a یا e یا هر دو. شمارش این‌ها کمی مشکل است، پس بهتر است سراغ متمم برویم. یعنی زیرمجموعه‌هایی که حرف صدادار ندارند را شمارش کرده و از کل زیرمجموعه‌ها کم کنیم.

$$\left(\begin{array}{c}\text{زیرمجموعه‌هایی}\\ \text{که فقط عضو}\\ \text{بی‌صدا دارند}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{کل}\\ \text{زیرمجموعه‌ها}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{تعداد زیرمجموعه‌های}\\ \text{ناتهی و دارای حداقل}\\ \text{یک حرف صدادار}\end{array}\right)$$

$$=۲^۵-۲^۳=۲۴$$

توجه دارید که در سمت راست $\varnothing$ هم خودبه‌خود حذف می‌شود.

۲۵- شمارش اعدادی که رقم تکراری دارند مشکل است. بنابراین از متمم می‌رویم:

$$\left(\begin{array}{c}\text{اعداد}\\ \text{چهاررقمی}\\ \text{بدون تکرار}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{کل اعداد}\\ \text{چهاررقمی}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{اعداد ۴رقمی}\\ \text{دارای}\\ \text{رقم‌های تکراری}\end{array}\right)$$

$$=۴\times۴\times۴\times۴-۴\times۳\times۲\times۱=۲۳۲$$

۲۶- متمایز ـ جایگشت ـ ترتیب ـ اصل ضرب

۲۷- $۳!$

۲۸- $۸!$

۲۹- $۴!$

۳۰- $۴!(۵+۱)=۶\times۴!$

۳۱- $۷\times۶\times۵\times\frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۴\times۳\times۲\times۱}=\frac{۷!}{۴!}$

۳۲-
$$\begin{cases} n(n-۱)(n-۲)\times\frac{(n-۳)(n-۴)\times\cdots\times۱}{(n-۳)(n-۴)\times\cdots\times۱}=\frac{n!}{(n-۳)!} \\ \frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=\frac{(n+۱)(n)(n-۱)!}{(n-۱)!}=(n+۱)(n) \end{cases}$$

۳۳- $۲!۳!+(۳!)^۲-(۲!+۳!)=۲\times۶+۶^۲-(۲+۶)$
$=۱۲+۳۶-۸=۴۰$

۳۴- حرف ی فقط باید در انتها قرار گیرد تا نقطه‌دار نباشد اما حروف دیگر می‌توانند $۳!$ جایگشت داشته باشند. پس $۳!$ کلمه، بدون نقطه ساخته می‌شود.

۳۵- فرض کنید تعداد کتاب‌ها برابر nتا بوده است. هم کتاب‌های انتخاب‌شده و هم ترتیب (نحوهٔ چینش) آن‌ها مهم است؛ پس تعداد راه‌های انجام کار برابر $P(n,۳)$ می‌شود. حالا:

$$P(n,۳)=۲۱۰\Rightarrow\frac{n!}{(n-۳)!}=۲۱۰$$

$$\Rightarrow\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!}=۲۱۰$$

پس: $n(n-۱)(n-۲)=۲۱۰=۷\times۶\times۵\Rightarrow n=۷$

۳۶- ۶ حرف متمایز داریم که جایگشت‌های آن‌ها $۶!$ خواهد بود.

۳۷- w و e را در یک دسته قرار می‌دهیم، پس ۵ شئ (ew)، r، o، l و f داریم که $۵!$ جایگشت دارند. خود w و e نیز به $۲!$ حالت جایگشت دارند و هنوز کنار هم هستند، بنابراین $۲!\times۵!$ جایگشت که w و e کنار هم باشند، وجود دارد.

۳۸- تفاوت این سؤال با قبلی در این است که دیگر w و e نمی‌توانند بین خود جابه‌جا شوند، بنابراین $۵!$ جایگشت با این شرط وجود دارد.

۳۹-
$$\left(\begin{array}{c}\text{جایگشت‌هایی که}\\ \text{w و e}\\ \text{کنار هم هستند}\end{array}\right)-\left(\begin{array}{c}\text{کل}\\ \text{جایگشت‌ها}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{جایگشت‌هایی که}\\ \text{w و e}\\ \text{کنار هم نیستند}\end{array}\right)$$

$$=۶!-۵!\times۲!=۴۸۰$$

۴۰- ابتدا مکان‌های قرارگیری e و w را حالت‌بندی می‌کنیم. توجه دارید که در هر قسمت، خود e و w هم می‌توانند جابه‌جا شوند، پس هر کدام در $۲!$ ضرب می‌شوند:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{w}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۱}{e}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{}=۴!\times۲!\\ __\times\frac{__}{w}\times__\times__\times\frac{__}{e}\times__=۴!\times۲!\\ __\times__\times\frac{__}{w}\times__\times__\times\frac{__}{e}=۴!\times۲!\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}}۴!\times۲!+۴!\times۲!+۴!\times۲!=۳\times۴!\times۲!=۱۴۴$$

۴۱- حرف سوم از راست یک حالت دارد اما بقیهٔ حروف $۵!$ جایگشت دارند، پس $۵!$ جایگشت وجود دارد که o در مکان مشخص‌شده باشد.

۴۲- حرف دوم از راست یکی از حروف o یا e است؛ پس ۲ حالت دارد. پس ۵ حرف دیگر باقی می‌ماند که $۵!$ جایگشت دارند. بنابراین $۲\times۵!$ جایگشت وجود دارد که حرف دوم صدادار باشد.

۴۳- تعداد حالت‌های خانهٔ اول و آخر مانند مقابل است.

$$\frac{۴}{\boxed{f,l,w,r}}\times__\times__\times__\times__\times\frac{۲}{\boxed{o,e}}$$

توجه دارید که از ۶ حرف، ۲ تا در اول و آخر مصرف می‌شود، پس ۴ حرف برای خانه‌های وسط می‌ماند که $۴!$ جایگشت دارند. در کل $۴\times۲\times۴!=۱۹۲$ جایگشت با شرایط مسئله وجود دارد.

۴۴- flo را در یک دسته قرار می‌دهیم. چون می‌خواهیم دقیقاً (flo) دیده شود پس دیگر o، l و f بین خود جایگشت ندارند. حالا ۴ شیء (flo) و w و e و r داریم که $۴!$ جایگشت دارند.

۴۵- طبق سؤال ۴۴، در $۴!$ جایگشت، دقیقاً (flo) وجود دارد. حالا در چند تا از آن‌ها (یعنی (flo) هست) wer هم دیده می‌شود؟ خب! دو شئ (flo) و (wer) داریم که $۲!$ جایگشت دارند. حالت‌هایی که مسئله خواسته می‌شود: $۴!-۲!=۲۲$.

● افسرها را با $A_۱,A_۲,\ldots,A_۵$ و سربازها را با $S_۱,S_۲,\ldots,S_۶$ نمایش می‌دهیم.

۴۶- افسرها را در یک دسته قرار می‌دهیم، پس ۷ شئ $\boxed{A_۱A_۲\ldots A_۵}$ و $S_۱,S_۲,\ldots,S_۶$ داریم که $۷!$ جایگشت دارند. خود افسرها نیز به $۵!$ روش می‌توانند بین خودشان جابه‌جا شوند، پس $۵!\times۷!$ جایگشت که افسرها کنار هم باشند وجود دارد.

۴۷- شبیه سؤال ۴۶، $۶!\times۶!$

۴۸- افسرها را در یک دسته و سربازها را نیز در یک دسته قرار می‌دهیم. پس دو شئ $\boxed{A_۱\ldots A_۵}$ $\boxed{S_۱\ldots S_۶}$ داریم که $۲!$ جایگشت دارند، اگر آن را در جایگشت‌های هر دسته ضرب کنیم می‌شود: $۲!\times۶!\times۵!$

۴۹- طبق فرمول جایگشت‌های یک در میان، $۵!۶!$ جایگشت وجود دارد.

۵۰- حروف $\boxed{AA}$ و $\boxed{GG}$ را در یک دسته قرار می‌دهیم. بنابراین ۶ شئ $\boxed{AA},\boxed{GG},R,N,E$ و L داریم که تعداد $۶!$ جایگشت دارند. دقت کنید که دیگر نباید در $۲!۲!$ ضرب کنیم، چون جابه‌جایی Aها با هم یا Gها با هم حالت جدیدی درست نمی‌کند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۵۱- الف) $!۱۰$

ب) با اصل ضرب می‌شود: $\frac{۱۰}{\text{نفراول}} \times \frac{۹}{\text{نفردوم}} \times \frac{۸}{\text{نفرسوم}}$. با فرمول ترتیب ۳ شئ از ۱۰ شئ می‌شود: $P(۱۰,۳) = \frac{۱۰!}{۷!} = ۷۲۰$

۵۲- طبق اصل ضرب، سیب را می‌توان به هر یک از ۸ نفر داد. پرتقال را به هر یک از ۷ نفر باقی‌مانده و گلابی را نیز می‌توانیم به یکی از ۶ نفر باقی‌مانده بدهیم. پس به $۸\times۷\times۶$ روش می‌توانیم توزیع را انجام دهیم. اگر می‌خواستیم با فرمول برویم می‌شد $P(۸,۳)$، چون ۸ نفر داریم ولی فقط به ۳ تای آن‌ها میوه می‌رسد، پس جایگشت‌های ۳تایی از ۸ شئ متمایز را به دست آوردیم.

۵۳- به $۹\times۸\times۷ = ۵۰۴$ حالت می‌توانیم عددهای سه‌رقمی از مجموعه رقم‌های داده‌شده بسازیم. اما به ۴×۳ حالت نیز می‌توانیم کلمهٔ دوحرفی بسازیم. بنابراین طبق اصل ضرب $۵۰۴\times۱۲ = ۶۰۴۸$ پلاک به صورت داده‌شده ساخته می‌شود. *(اگه می‌خواستیم فرمولی بریم می‌شد:* $P(۹,۳)\times P(۴,۲)$)

۵۴-

$$\frac{P(n+۱,۳)}{P(n-۱,۲)} = \frac{\frac{(n+۱)!}{(n+۱-۳)!}}{\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۲)!}} = \frac{(n+۱)!\,(n-۳)!}{(n-۲)!\,(n-۱)!}$$

$$= \frac{(n+۱)\,(n)\,\cancel{(n-۱)!}\,\cancel{(n-۳)!}}{(n-۲)\,\cancel{(n-۳)!}\,\cancel{(n-۱)!}} = \frac{n(n+۱)}{n-۲}$$

۵۵- الف) $P(n,۵) = ۳P(n,۴) \Rightarrow \frac{\cancel{n!}}{(n-۵)!} = ۳\frac{\cancel{n!}}{(n-۴)!}$

$$\Rightarrow \frac{۱}{(n-۵)!} = ۳\times\frac{۱}{(n-۴)!}$$

(توجه دارید همهٔ عبارت‌هایی که ساده کردیم، مخالف صفر بودن)

$$\frac{۱}{\cancel{(n-۵)!}} = \frac{۳}{(n-۴)\,\cancel{(n-۵)!}} \Rightarrow n-۴ = ۳ \Rightarrow n = ۷$$

ب) $P(n,۵) = ۴۵P(n-۱,۳) \Rightarrow \frac{n!}{(n-۵)!} = ۴۵\times\frac{(n-۱)!}{(n-۱-۳)!}$

$$\Rightarrow \frac{n\,\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۵)!}} = ۴۵\times\frac{\cancel{(n-۱)!}}{(n-۴)\,\cancel{(n-۵)!}}$$

$$\Rightarrow n = \frac{۴۵}{n-۴} \Rightarrow n(n-۴) = ۴۵$$

می‌توانیم با حل معادلهٔ درجه‌دوم n را بیابیم ولی واضح است که $n = ۹$ جواب معادله است.

۵۶- رقم‌های ۲ در چه مکان‌هایی می‌توانند قرار بگیرند؟ دو حالت برای آن‌ها در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۱}{\boxed{۲}}\times\frac{۳}{}\times\frac{۱}{\boxed{۲}}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{\boxed{۲}}\times\frac{۱}{} = ۳! \\ \frac{۳}{}\times\frac{۱}{\boxed{۲}}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{\boxed{۲}}\times\frac{۱}{}\times\frac{۱}{\boxed{۲}} = ۳! \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۳! + ۳! = ۱۲$$

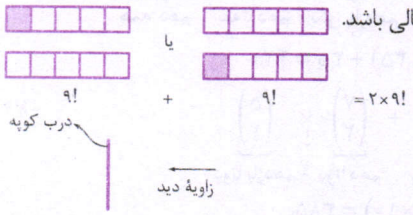
تذکر به نظر شما حل این مسئله با اصل متمم ساده‌تر می‌شود یا مشکل‌تر؟ متمم این‌که هیچ‌کدام از رقم‌های ۲ کنار هم نباشند چیست؟ یک اشتباه رایج است که متمم را به صورت «قرارگرفتن رقم‌های ۲ کنار هم» در نظر بگیرید. این حالت هم جزء متمم هست ولی حالت دیگری که در متمم قرار دارد این است که دوتا از رقم‌های ۲ هم کنار هم باشند. به عبارت دیگر متمم «کنار هم نبودن رقم‌های ۲» می‌شود این‌که حداقل دوتا از ارقام ۲ کنار هم باشند. می‌بینید شمارش این حالت‌ها کمی مشکل است. پس حل مستقیم مسئله بهتر خواهد بود.

۵۷- ۷ زن را به صورت زیر که روی صندلی‌ها نشسته و ثابت‌اند در نظر بگیرید. ۸ جای خالی بین آن‌ها و در اول و آخر صندلی‌ها وجود دارد. بچه‌ها را در ۴ تا از آن‌ها می‌توانیم قرار دهیم. ترتیب بین بچه‌ها اهمیت دارد، پس کافی است جایگشت‌های ۴ تایی از ۸ شئ متمایز را به دست آوریم. این تعداد برابر است با: $P(۸,۴) = \frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$.

-□-□-□-□-□-□-□-

۵۸- یکی از صندلی‌ها خالی می‌ماند. آن را نیز یک شئ در نظر بگیرید، بنابراین ۱۰ شئ داریم که قرار است روی ۱۰ صندلی بنشینند. هر جایگشت یک روش نشستن است، پس به $!۱۰$ روش می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند.

۵۹- دو حالت در نظر می‌گیریم. صندلی در انتهای ردیف اول خالی باشد یا در انتهای ردیف دوم خالی باشد.



۶۰- مردها صندلی‌های یک ردیف را کاملاً پر می‌کنند، پس $!۵$ جایگشت دارند. صندلی خالی را هم یک شئ بگیرید. پس زن‌ها همراه با جای خالی نیز ۵ شئ می‌شوند که $!۵$ جایگشت دارند. حالا دو ردیف روبه‌رو نیز می‌تواند جای خود را با هم عوض کنند، یعنی به $۲\times۵!\times۵!$ طریق می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند.

۶۱- دانستیم که جایگشت n شئ متمایز، برابر $n!$ است. ممکن است در بین اشیا تکراری هم وجود داشته باشد. می‌خواهیم فرمولی برای جایگشت این نوع اشیا به دست آوریم. فرض کنید می‌خواهیم جایگشت‌های حروف AABC را به دست آوریم. اگر دوتا حرف A را به صورت $A_۱$ و $A_۲$ در نظر بگیریم، $!۴$ جایگشت داریم. دو تا از این جایگشت‌ها $A_۱A_۲BC$ و $A_۲A_۱BC$ هستند. اگر $A_۱$ و $A_۲$ همان A باشند این دو جایگشت فرقی نخواهند داشت. دوتا جایگشت دیگر $A_۱BA_۲C$ و $A_۲BA_۱C$ هستند. باز هم اگر $A_۱$ و $A_۲$ یکسان باشند، این دو جایگشت فرقی ندارند. به عبارت دیگر اگر $!۴$ را به $!۲$ تقسیم کنیم، جایگشت اشیای AABC به دست می‌آید. در حالت کلی کافی است کل جایگشت‌ها را بر جایگشت اشیای تکراری تقسیم کنیم. کافی است جایگشت‌های حروف ا، ن، ت، خ، ا، ب، ا، ت را به دست آوریم. این تعداد می‌شود:

$$\frac{۸!}{(\text{ت، ۲ بار تکرار شده‌است})!۲\times(\text{ا، سه‌بار تکرار شده‌است})!۳}$$

۶۲- $C(۱۰,۳)$، چون فقط خود تیم‌ها مهم بوده و ترتیب بین آن‌ها مهم نیست.

۶۳- $P(۱۰,۳)$، چون هم خود افراد هم ترتیب بین آن‌ها مهم است.

۶۴- $P(۱۰,۳)$

۶۵- $C(۱۰,۳)$

۶۶- همه باید از پایهٔ دهم باشند، پس:

$$\binom{۷}{۴} = \frac{۷!}{۴!\,۳!} = \frac{۷\times\cancel{۶}\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times\cancel{۳!}} = ۳۵$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۶۷- یک نفر پایهٔ یازدهم و بنابراین سه نفر از پایهٔ دهم خواهند بود، پس:

$$\binom{۵}{۱}\underset{\text{و}}{\times}\binom{۷}{۳}=۵\times\frac{۷\times۶\times۵}{۶}=۱۷۵$$

۶۸- هر ۴ نفر از پایهٔ دهم یا هر ۴ نفر از پایهٔ یازدهم هستند، پس:

$$\binom{۷}{۴}+\binom{۵}{۴}=\frac{۷!}{۴!۳!}+\frac{۵!}{۴!۱!}=۳۵+۵=۴۰$$

۶۹- باید دوتا از دهم و دوتا از یازدهم انتخاب کنیم، پس:

$$\binom{۷}{۲}\times\binom{۵}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}\times\frac{۵\times۴}{۲}=۲۱۰$$

۷۰- حداقل، یعنی ۳ تا یا بیشتر:

$$\underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{سه تا دهم}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یکی یازدهم}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{\text{همه از دهم}}=(۳۵\times۵)+۳۵=۲۱۰$$

۷۱- حداکثر، یعنی دوتا یا کم‌تر:

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دوتا یازدهم}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۷}{۲}}_{\text{دوتا دهم}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یکی یازدهم}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{سه تا دهم}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{\text{همه دهم}}$$

$$=(۱۰\times۲۱)+(۵\times۳۵)+۳۵=۴۲۰$$

۷۲-

$$\underbrace{\binom{۷}{۳}}_{\text{سه تا دهم}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{یکی یازدهم}}+\underbrace{\binom{۷}{۲}}_{\text{دوتا دهم}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{دوتا یازدهم}}$$

$$=(۳۵\times۵)+(۲۱\times۱۰)=۳۸۵$$

۷۳- باید یک مهندس و یک پزشک و یک نویسنده انتخاب کنیم، پس:

$$\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۲}{۱}=۴\times۳\times۲=۲۴$$

۷۴-

$$\binom{۳}{۲}\times\binom{۴}{۱}=\frac{۳\times۲}{۲}\times۴=۱۲$$

۷۵- یا باید همه مهندس یا همه پزشک باشند، پس طبق اصل جمع:

(توجه دارید که همه نمی‌توانند نویسنده باشند.) $\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}=۴+۱=۵$

۷۶-

$$\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{دو مهندس}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۳+۲}{۱}}_{\text{یکی از بقیه}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{هر سه مهندس}}=(۶\times۵)+۴=۳۴$$

۷۷-

$$\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{یک نویسنده}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۴+۳}{۲}}_{\text{دوتا از بقیه}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۴+۳}{۳}}_{\text{سه تا از مهندس و دکترها}}$$

$$=(۲\times۲۱)+۳۵=۷۷$$

۷۸- اعضا از دو شغل مختلف باشند یعنی یا مهندس و پزشک یا مهندس و نویسنده یا پزشک و نویسنده. دوباره در هر حالت نیز به تعداد مختلفی می‌توان از هر شغل انتخاب کرده، بنابراین شمارش حالت‌ها به این صورت زیاد است.

بهتر است از متمم استفاده کنیم. متمم اعضای شورا از دو شغل مختلف باشد، می‌شود این‌که افراد یا از هر سه شغل باشند یا این‌که همگی از یک شغل باشند، پس:

$$\begin{pmatrix}\text{دو شغل}\\\text{مختلف در شورا}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{کل انتخاب‌های}\\\text{۳ نفر}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{وجود هر سه شغل}\\\text{یا}\\\text{فقط یک شغل}\end{pmatrix}$$

$$=\binom{۴+۳+۲}{۳}-[\underbrace{\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}_{\text{طبق سؤال ۷۳}}+\underbrace{\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}}_{\text{طبق سؤال ۷۵}}]$$

$$=۸۴-[۲۴+۴+۱]=۵۵$$

۷۹-

$$\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{دوتا نویسنده}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک پزشک}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۴+۲}{۱}}_{\text{یکی از بقیه}}\underset{\text{و}}{\times}\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دوتا پزشک}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{هر سه پزشک}}$$

$$=۱+(۳\times۶)+(۳\times۱)=۲۲$$

۸۰- گفته حداقل با ۴ نوع خشکبار؛ پس ۴ یا ۵ یا ۶ نوع خشکبار را انتخاب کرده و آجیل درست می‌کند. تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۵}+\binom{۶}{۶}=۱۵+۶+۱=۲۲$$

۸۱- باید مسئله‌ای طرح کنیم که تعداد حالت‌های انتخاب در آن به کار رفته باشد. البته به خاطر آن ضرب مسئله باید از دو قسمت درست شده باشد که تعداد حالت‌های انجام هر جزء، انتخابی باشد. خب مثلاً این سؤال چه‌طور است؟

به چند طریق می‌توانیم از بین ۶ معاون و ۵ کارمند دقیقاً ۵ نفر انتخاب کنیم؛ به طوری که دقیقاً ۳ نفر معاون باشند؟ *(پس میشه ۳ معاون و ۲ نفر کارمند)*

۸۲- خب به $\binom{۶}{۳}$ روش ۳ نفر از ۶ نفر را انتخاب و آن‌ها را در اتاق ۳ نفره اسکان می‌دهیم. حالا ۳ نفر باقی‌مانده‌اند که به $\binom{۳}{۲}$ روش آن‌ها را هم می‌فرستیم در اتاق ۲ نفره! به $\binom{۱}{۱}$ روش هم آن یک نفر می‌رود در اتاق تک‌نفره.

طبق اصل ضرب تعداد راه‌های انجام کار می‌شود:

$$\binom{۶}{۳}\times\binom{۳}{۲}\times\binom{۱}{۱}=۲۰\times۳\times۱=۶۰$$

۸۳- مجموع دو کارت وقتی فرد است که یکی از اعداد فرد و دیگری زوج باشد، بنابراین:

$$\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۵\times۴=۲۰$$

۸۴- مجموع دو کارت وقتی زوج می‌شود که هر دو عدد فرد یا هر دو زوج باشند، پس:

$$\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}+\frac{۴\times۳}{۲}=۱۶$$

۸۵- تعداد حالت‌ها زیاد است، پس بهتر است از اصل متمم برویم. اگر اعداد {۱,۲} ظاهر شوند، مجموع کم‌تر از ۴ است، پس:

مجموع دو کارت حداقل ۴ = کل حالت‌ها − ۱ = $\binom{۹}{۲}-۱=۳۵$

۸۶- هر سه نقطه که انتخاب کنیم، دقیقاً یک مثلث به دست می‌آید، بنابراین به تعداد $\binom{۹}{۳}$ مثلث، ساخته می‌شود. با انتخاب هر ۴ نقطه نیز، دقیقاً یک چهارضلعی، به دست می‌آید، پس در کل به تعداد $\binom{۹}{۳}+\binom{۹}{۴}$ مثلث یا چهارضلعی ساخته می‌شود.

۸۷- باید انتخاب‌های سه‌تایی از ۹ نقطه را به دست آوریم به طوری که A حتماً انتخاب شود. چون A حتماً انتخاب شده است، باید ۲ نقطه از ۸ نقطهٔ باقی‌مانده انتخاب کنیم. با این ۲ نقطه به همراه A دقیقاً یک مثلث ساخته می‌شود، بنابراین به تعداد $\binom{۸}{۲}=۲۸$ مثلث که A رأسی از آن است، ساخته می‌شود.

۸۸- دو رأس H و C انتخاب شده‌اند، بنابراین کافی است ۱ نقطه از ۷ نقطهٔ باقی‌مانده انتخاب کنیم تا مثلث درست شود. تعداد حالت‌ها می‌شود $\binom{۷}{۱}=۷$.

۸۹- باید یک رأس از بین {H,I,A} و یک رأس از بین {C,D,E,F} انتخاب کنیم تا چهارضلعی ساخته شود که GB قطر آن باشد، پس:

$$\binom{۳}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۳\times۴=۱۲$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۹۰- باید دو نقطه از بین $\{H,I,A\}$ انتخاب کنیم یا این‌که دو نقطه از $\{F,E,D,C\}$ انتخاب کنیم، تا چهارضلعی به دست آید که GB ضلع آن باشد، پس:

$$\binom{3}{2}+\binom{4}{2}=3+6=9$$

۹۱- **الف)** $\binom{10}{4}=210$

ب) *(کافیه ۶ تا انتخاب کنیم و جواب ندیم)* $\binom{10}{6}=210$

پ) هر ۴ سؤال که انتخاب کنیم، دقیقاً ۶ سؤال باقی می‌ماند *(انگار ۶ تا انتخاب کردیم)*، بنابراین هر انتخاب ۴ تایی متناظر با انتخاب ۶ تایی است (و برعکس)، پس تعداد حالت‌های انجام این دو عمل با یکدیگر برابر است، در حالت کلی $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$.

ت) از ۵ سؤال اول به ۳ سؤال پاسخ می‌دهد، بنابراین از ۵ سؤال دیگر باید به ۴ سؤال پاسخ دهد *(تا بشه ۷ سؤال)*، پس: $\binom{5}{3}\times\binom{5}{4}=10\times5=50$.

۹۲- $\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{۳ تا از ۵ تای دوم}}\underset{\downarrow}{\times}\underbrace{\binom{5}{5}}_{\text{و ۵ تا از ۵ تای اول}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{۴ تا از ۵ تای دوم}}\underset{\downarrow}{\times}\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{و ۴ تا از ۵ تای اول}}$

$=25+10=35$

۹۳- حالت‌هایی که ۲ نفری که قهرند، انتخاب شوند، نامطلوب است؛ بنابراین کافی است آن را از کل انتخاب‌ها کم کنیم، یعنی به $\binom{15}{5}-\binom{13}{3}$ حالت می‌توان این کار را انجام داد. توجه دارید که طبق پلهٔ چهارم، انتخاب ۵ عضوی شامل دو عضو خاص می‌شود $\binom{15-2}{5-2}$، یعنی در $\binom{13}{3}$ حالت دونفری که با هم قهرند، انتخاب شده‌اند.

۹۴- شبیه مسئله لنگه‌کفش می‌توانیم بگوییم: ۴ نفر برای ۴ خانوادهٔ مختلف هستند، بنابراین ابتدا ۴ خانواده از ۱۰ خانواده را به $\binom{10}{4}$ روش انتخاب می‌کنیم. حالا فرض کنید ۴ خانواده دارید. از هر خانواده زن یا شوهر را می‌توانید انتخاب کنید؛ یعنی هر خانواده ۲ حالت دارد، پس به $\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}\times\binom{10}{4}$ روش می‌توانیم شورا را تشکیل بدهیم.

۹۵- یک زوج را می‌توان به $\binom{10}{1}$ روش انتخاب کرد. حالا می‌ماند ۹ زوج که باید ۲ نفر غیر زن و شوهر انتخاب کنیم؛ به عبارت دیگر این دو نفر برای دو خانوادهٔ مختلف هستند. شبیه به سؤال قبل ابتدا به $\binom{9}{2}$ حالت، ۲ خانواده انتخاب کرده و از هر کدام زن یا شوهر را انتخاب می‌کنیم، پس به $\binom{10}{1}\binom{9}{2}\times\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}$ طریق می‌توانیم شورا را تشکیل دهیم.

۹۶- ابتدا به $\binom{3}{2}$ روش دوتا رشته را انتخاب می‌کنیم. حالا می‌توانید یکی از اولی و دوتا از دومی یا برعکس انتخاب کنید، پس:

$$\binom{3}{2}\left[\binom{5}{2}\binom{5}{1}+\binom{5}{1}\binom{5}{2}\right]=3\,[50+50]=300$$

۹۷-

الف) $\binom{n}{2}=66\Rightarrow\frac{n(n-1)}{2}=66\Rightarrow n(n-1)=2\times66$

$=12\times11\Rightarrow n=12$

ب) $3C(n,2)+n=70\Rightarrow3\times\frac{\overbrace{n!}^{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}}{2!\,\cancel{(n-2)!}}+n=70$

$\Rightarrow\frac{3n(n-1)}{2}+n=70$

(می‌توانستیم معادلهٔ درجه‌دوم را حل کنیم ولی با جست‌وجو راحت‌تر به دست می‌آید، چون می‌دانیم n عدد طبیعی است.)

$\xrightarrow{\times2}3n(n-1)+2n=140\Rightarrow3n^2-n=140$

$\Rightarrow n(3n-1)=140=7\times20\Rightarrow n=7$

۹۸- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی از مجموعهٔ n عضوی، برابر با تعداد انتخاب‌های r شئ از n شئ متمایز است، پس:

$$\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{6}=35$$

۹۹- حداکثر ۳ عضوی، یعنی ۳ یا ۲ یا ۱ یا صفر، پس:

$$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}=1+7+21+35=64$$

۱۰۰- حداقل ۶ عضوی، یعنی ۶ یا ۷ عضوی، پس:

$$\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=7+1=8$$

۱۰۱- تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی یا ۳ عضوی یا ۵ عضوی یا ۷ عضوی را می‌خواهیم، پس:

$$\binom{7}{1}+\binom{7}{3}+\binom{7}{5}+\binom{7}{7}=7+\frac{7\times6\times5}{6}+\frac{7\times6}{2}+1=64$$

۱۰۲- با توجه به فرمول شامل می‌شود: $\binom{7-1}{3-1}=\binom{6}{2}=15$

۱۰۳- با توجه به فرمول فاقد می‌شود: $\binom{7-1}{3}=\binom{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{6}=20$

۱۰۴- عدد ۲ را کنار می‌گذاریم، پس ۶ شئ می‌ماند. یکی از عضوهای انتخاب‌شده ۷ است، پس باید ۲ عضو دیگر را از ۵ شئ باقی‌مانده انتخاب کنیم، یعنی $\binom{5}{2}=10$.

۱۰۵- **روش اول** آیا با انتخاب هر سه نقطه، دقیقاً یک مثلث به وجود می‌آید؟ مسلماً نه! اگر سه نقطه از نقاطی که روی خط راست هستند انتخاب شوند، مثلثی به دست نمی‌آید. در صورتی مثلث به دست می‌آید که هر سه نقطه از نیم‌دایره یا یک نقطه از خط و دو نقطه از نیم‌دایره انتخاب کنیم یا این‌که دو نقطه از خط و یک نقطه از نیم‌دایره انتخاب کنیم، یعنی:

$$\binom{5}{3}+\binom{6}{1}\times\binom{5}{2}+\binom{6}{2}\times\binom{5}{1}=10+60+75=145$$

روش دوم استفاده از متمم:

$$\text{تعداد مثلث ها}=\begin{pmatrix}\text{تعداد کل}\\\text{انتخاب های ۳ نقطه}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{تعداد حالت هایی که}\\\text{مثلث تشکیل نمی‌شود}\end{pmatrix}$$

$$=\binom{11}{3}-\binom{6}{3}=\frac{11\times10\times9}{6}-\frac{6\times5\times4}{6}=165-20=145$$

۱۰۶- در صورتی چهارضلعی ساخته می‌شود که:

$\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{دوتا از خط}}\underset{\downarrow}{\times}\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{و دوتا از نیم‌دایره}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{یکی از خط}}\underset{\downarrow}{\times}\underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{و سه تا از نیم‌دایره}}\overset{\text{یا}}{+}\underbrace{\binom{5}{4}}_{\text{هر ۴ نقطه از نیم‌دایره}}$

$=5+(10\times6)+(10\times15)=215$

۱۰۷- ابتدا باید ۳ کتاب از ۶ کتاب ریاضی و ۴ کتاب از ۵ کتاب فیزیک انتخاب کنیم. این کار به $\binom{6}{3}\times\binom{5}{4}$ حالت امکان‌پذیر است.

حالا ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک داریم. طبق پلهٔ چهارم درس دوم، جایگشت‌های یک‌درمیان این اشیا می‌شود: $\binom{6}{3}\binom{5}{4}3!\,4!$، پس به $3!\,4!$ روش می‌توان کتاب‌ها را انتخاب و در قفسه یک‌درمیان چید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۰۸- ابتدا یک رقم فرد و دو رقم زوج انتخاب می‌کنیم. این کار را به $\binom{4}{1}\binom{3}{2}=12$ حالت می‌توانیم انجام بدهیم. حالا ۳ شئ متمایز داریم که !۳ جایگشت دارند، بنابراین $12\times 3!=72$ عدد سه‌رقمی که فقط یک رقم فرد دارند، ساخته می‌شود.

۱۰۹- دقیقاً شبیه به سؤال قبل: $\binom{4}{2}\binom{3}{1}\times 3!=108$

۱۱۰- مسئله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. در عدد سه‌رقمی، یک رقم فرد و دو زوج یا دو رقم فرد و یک زوج به کار رفته باشد. جایگشت‌های یک‌درمیان ۲ شئ و ۱ شئ می‌شود !۲!۱، پس:

$$\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{یکی فرد}}\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{دو تا زوج}}\underbrace{2!1!}_{\text{تعداد جایگشت‌های یک‌درمیان}}+\overset{\text{یا}}{}\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{دو فرد}}\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{یکی زوج}}\underbrace{2!1!}_{\text{جایگشت‌های یک‌درمیان}}=60$$

۱۱۱-

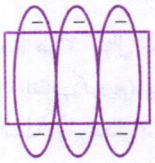
$$P(n,2)+C(n,n-2)=63$$

$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!}+\frac{n!}{(n-2)!\underbrace{[n-(n-2)]!}_{2!}}=63$$

$$n(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}=63 \Rightarrow n(n-1)[1+\frac{1}{2}]=63$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}n(n-1)=63 \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} n(n-1)=42 \Rightarrow n=7$$

۱۱۲- ابتدا، ۳ جفت برادر را انتخاب می‌کنیم ⇐ به $\binom{5}{3}$ روش هر فرد و برادرش را در یک بسته قرار می‌دهیم که این ۳ شئ !۳ جایگشت دارند. هر فرد به !۲ روش می‌تواند با برادرش جابه‌جا شود، پس:



$$\text{تعداد حالت‌ها}=\binom{5}{3}\times 3!\times 2!\times 2!\times 2!$$
$$=10\times 6\times 2\times 2\times 2=480$$

۱۱۳- ابتدا به $\binom{6}{4}$ روش ۴ پیچ انتخاب می‌کنیم. به $\binom{10}{1}$ روش می‌توانیم از هر پیچ یک عکس انتخاب کنیم. پس داریم:

$$\text{تعداد راه‌های انتخاب}=\binom{6}{4}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}$$
$$=15\times 10\times 10\times 10\times 10=150000$$

پاسخ آزمون جمع بندی فصل ششم

۱- **الف)** درست است $(5!=120)$.

ب) نادرست است $(3!+4!=6+24=30)$.

پ) نادرست است. هر جایزه ۵ حالت دارد پس تعداد راه‌های توزیع برابر $5\times 5\times 5=125$ حالت می‌شود.

ت) درست است $(\binom{7}{2}=\frac{7\times 6}{2}=21)$.

۲- ۷ راه وجود دارد.
$$\left.\begin{array}{l}\text{مسیر } AC \Rightarrow 1\\ \text{مسیر } ABC \Rightarrow 2\times 3=6\end{array}\right\}\xrightarrow{\oplus}$$

۳- **الف)** $\underline{4}\times\underline{4}\times\underline{3}=48$

ب) $\underset{\{4,5\}}{\underline{2}}\times\underline{4}\times\underline{3}=24$

پ)
$$\left.\begin{array}{l}\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{1}=12 \text{ :رقم یکان صفر باشد.}\\ \underline{3}\times\underline{3}\times\underline{2}=18 \text{ :رقم یکان ۲ یا ۴ باشد.}\end{array}\right\}\xrightarrow{\oplus} 30$$

۴- دو حالت در نظر می‌گیریم:
$$\left.\begin{array}{l}\text{رقم یکان صفر باشد.}: \underset{\{3,4,5\}}{\underline{3}}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underset{\{0\}}{\underline{1}}=36\\ \text{رقم یکان ۵ باشد.}: \underset{\{3,4\}}{\underline{2}}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underset{\{5\}}{\underline{1}}=24\end{array}\right\}\xrightarrow{\oplus} 60$$

۵- **الف)** $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!}=(n+1)(n)$

ب) $\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{(n-4)!}$
$=n(n-1)(n-2)(n-3)$

۶- **الف)** جهان گ، ر، د، ی پس تعداد حالت‌ها برابر است با: $5!\times 4!$

ب) $\underset{\text{ج، ن، ی}}{\underline{3}}\times\underset{\text{بقیه}}{7!}$ (ی در ابتدا بیاید، نقطه‌دار است.)

۷- $\binom{n}{4}=P(n-1,3) \Rightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!}=\frac{(n-1)!}{(n-1-3)!}$

$$\Rightarrow \frac{n\times(n-1)!}{4!(n-4)!}=\frac{(n-1)!}{(n-4)!}\Rightarrow n=24$$

۸- **الف)** !۷ **ب)** $P(7,4)$

پ) پاک $\underbrace{\underline{2}\times\underline{3}\times\underline{4}}_{\text{سایر حروف}}$ **ت)** $\underset{\text{جابه‌جایی حروف کلمهٔ پاک}}{3!}=2\times 3\times 4\times 3=144$

ث) $\underset{\text{پ، ا، ک}}{\underline{3}}\times\underline{6}\times\underline{5}\times\underline{4}\times\underline{3}\times\underline{2}=2160$

۹- **الف)** $\binom{9}{3}$ **ب)** $\binom{4}{4}\binom{9}{5}$

پ) $\underset{\text{پرسپولیس}}{\binom{3}{3}}\ \underset{\text{تراکتور}}{\binom{6}{3}}\ \underset{\text{استقلال}}{\binom{9}{3}}$

۱۰- از اصل متمم استفاده می‌کنیم:

$$\text{مطلوب}=\text{کل}-\text{نامطلوب}=\binom{9}{3}-\underset{\text{هر سه نقطه روی خط راست باشند.}}{\binom{5}{3}}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1}-10=74$$

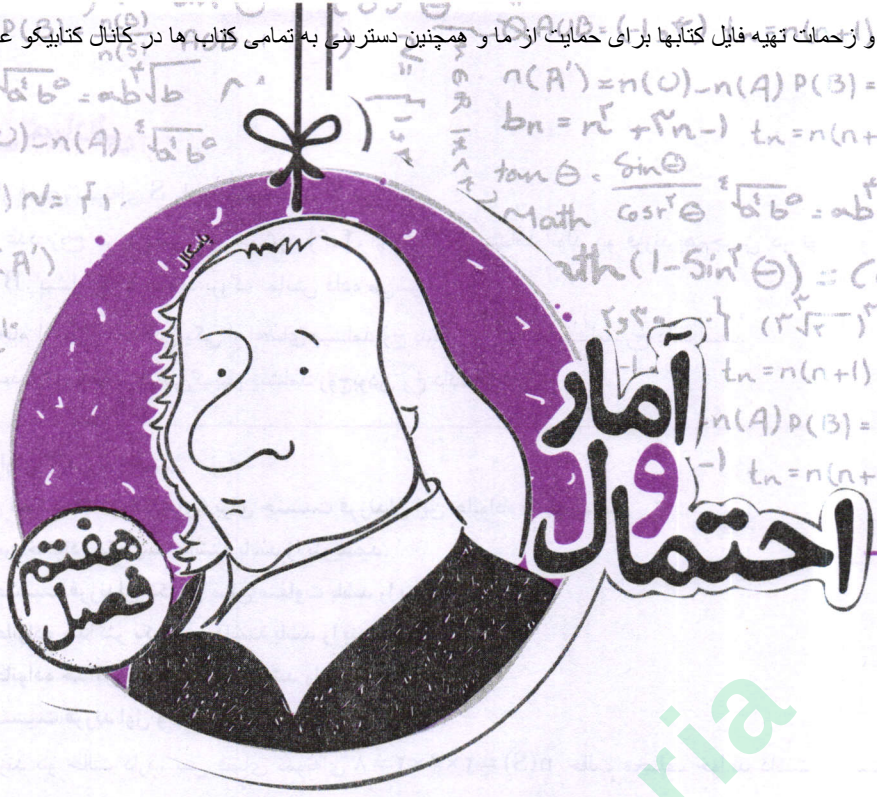
(مثلث ساخته نشود.)

۱۱- **الف)** $\binom{6}{4}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}\binom{10}{1}=150000$

ب) تعداد کل حروف انگلیسی ۲۶تاست سه‌تا حرف a، b و c انتخاب شده و ۲ حرف دیگر یعنی d و e هم نباید انتخاب شود؛ پس کافی است ۴ حرف از ۲۱ حرف باقی‌مانده به غیر از a، b، c، d و e را به $\binom{21}{4}$ روش انتخاب کنیم. پس تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{21}{4}=\frac{21\times 20\times 19\times 18\times 17!}{4\times 3\times 2\times 1\times 11!}=5985$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria



درس ۱ تعریف‌های مقدماتی احتمال

در جهان ما، پدیده‌هایی وجود دارد که قبل از رخ‌دادن آن‌ها، نتیجهٔ آن‌ها را نمی‌دانیم. مثلاً وقتی تاسی را پرتاب می‌کنیم، نمی‌دانیم کدام‌یک از اعداد ۱ تا ۶ ظاهر خواهد شد. البته از کل نتایجی که ممکن است رخ بدهد، اطلاع داریم *(بالأفره یکی از اعداد ۱، ۲، ... و ۶ میاد)*. این مثال، نمونه‌ای از آزمایش یا پدیدهٔ تصادفی است.

پدیده‌های تصادفی

پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی را که نتیجهٔ آن‌ها به طور دقیق قابل پیش‌بینی نیست اما از همهٔ حالت‌های ممکن (نتایج ممکن) در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم، پدیده‌ها یا آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.

فضای نموده‌ای

مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن، در یک آزمایش تصادفی را، فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای نمونه‌ای را با S و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم. مثلاً در پرتاب تاس $S=\{۱,۲,\dots,۶\}$ و $n(S)=۶$.

مثال **در هر یک از آزمایش‌های تصادفی زیر، فضای نمونه‌ای و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.**

الف) پرتاب سکه **ب) پرتاب دو سکه (یا یک سکه دو بار یا تولد دو فرزند)**

پ) پرتاب دو تاس **ت) پرتاب سکه و تاس**

پاسخ

الف) $S=\{\text{رو},\text{پشت}\} \Rightarrow n(S)=۲$

ب) $S=\{(\text{ر},\text{ر}),(\text{ر},\text{پ}),(\text{پ},\text{ر}),(\text{ر},\text{ر})\} \Rightarrow n(S)=۴$

پ) $S=\{(۱,۱),\dots,(۱,۶),(۲,۱),\dots,(۲,۶),\dots,(۶,۶)\} \Rightarrow n(S)=۶\times۶=۳۶$

ت) $S=\{(\text{ر},۱),\dots,(\text{ر},۶),(\text{پ},۱),\dots,(\text{پ},۶)\} \Rightarrow n(S)=۲\times۶=۱۲$

تذکر در آزمایش پرتاب دو تاس (یا دو سکه) فرض می‌کنیم تاس‌ها از دو رنگ مختلف هستند یا بین پرتاب آن‌ها ترتیب وجود دارد، بنابراین حالت‌های (۲,۱) و (۱,۲) دو حالت مختلف، حساب می‌شوند. شبیه همین، در تولد دو فرزند نیز، حالت (پ,د) با (د,پ) متفاوت است، به عبارت دیگر، ترتیب بین فرزندان اهمیت دارد.

نکته

تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پرتاب n سکه یا پرتاب یک سکه n بار یا تولد n فرزند می‌شود: $n(S)=\underbrace{۲\times۲\times\cdots\times۲}_{n\text{ بار}}=۲^n$

تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پرتاب n تاس نیز برابر است با ۶^n.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پیشامدهای تصادفی

پیشامد: هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای S را یک پیشامد در S می‌نامیم.

مثلاً پیشامد ظاهرشدن عدد زوج در پرتاب تاس می‌شود $A = \{۲,۴,۶\}$ یا پیشامد تولد دو فرزند هم‌جنس در تولد دو فرزند برابر است با $B = \{(پ,پ) , (د , د)\}$. پیشامدها با حروف بزرگ نمایش داده می‌شوند.

رخداد پیشامد: اگر در انجام آزمایش تصادفی یکی از اعضای پیشامد رخ بدهد، می‌گوییم پیشامد رخ داده است.

مثلاً اگر در پرتاب تاس، عدد ۴ ظاهر شود، می‌گوییم پیشامد زوج‌بودن رخ داده است.

مثال **خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.**

الف) همهٔ حالت‌های ممکن (فضای نمونه‌ای) برای جنسیت فرزندان این خانواده را بنویسید.

ب) پیشامد آن‌که این خانواده یک پسر داشته باشد را بنویسید.

پ) پیشامد آن‌که جنسیت فرزندان یک در میان متفاوت باشد را بنویسید.

ت) پیشامد آن‌که خانواده حداکثر یک پسر داشته باشد را بنویسید.

ث) پیشامد آن‌که خانواده حداقل دو پسر داشته باشد را بنویسید.

ج) پیشامد آن‌که جنسیت فرزند اول و آخر یکسان نباشد، را بنویسید.

پاسخ **الف** هر فرزند دو حالت دارد، پس فضای نمونه‌ای $n(S) = ۲\times۲\times۲ = ۸$ حالت مختلف خواهد داشت. با استفاده از نمودار درختی داریم: $S = \{(پ,پ,پ) , (د,پ,پ) , (پ,د,پ) , (د,د,پ) , (پ,پ,د) , (د,پ,د) , (پ,د,د) , (د,د,د)\}$

توجه دارید که (پ, پ, د) به این معنی است که فرزند اول دختر و دو فرزند بعدی پسر هستند (یعنی از چپ به راست می‌خوانیم).

ب باید از بین عضوهای فضای نمونه‌ای، حالت‌هایی که یک پسر وجود دارد را جدا کنیم: $A = \{(د,د,پ) , (د,پ,د) , (پ,د,د)\}$

پ $B = \{(پ,د,پ) , (د,پ,د)\}$

ت حداکثر، یعنی سقف، پس یا باید یک پسر یا کم‌تر (هیچ پسر) داشته باشیم: $C = \{(د,د,د) , (د,د,پ) , (د,پ,د) , (پ,د,د)\}$

ث حداقل یعنی کف، پس باید دو پسر یا بیشتر (سه پسر) داشته باشیم: $D = \{(پ,پ,پ) , (پ,پ,د) , (پ,د,پ) , (د,پ,پ)\}$

ج $E = \{(د,د,پ) , (د,پ,پ) , (پ,پ,د) , (پ,د,د)\}$

مثال **دو تاس را با یکدیگر پرتاب می‌کنیم.** *(بازم تأکید می‌کنم که دو تاس از دو رنگ مختلف هستن.)*

الف) پیشامد آن‌که مجموع دو تاس برابر ۵ باشد را بنویسید. **ب) پیشامد آن‌که فقط یکی از تاس‌ها ۳ بیاید را بنویسید.**

پ) پیشامد آن‌که تاس دوم مضرب تاس اول باشد را بنویسید. **ت) پیشامد آن‌که تاس اول (تاس آبی) ۲ بیاید را بنویسید.**

پاسخ **الف** $A = \{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$. توجه دارید که حالت (۱,۴) با (۴,۱) فرق دارد، چون دو تاس از دو رنگ مختلف هستند.

ب $B = \{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶),(۱,۳),(۲,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۶,۳)\}$

پ $C = \{(۱,۱),\dots,(۱,۶),(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۳,۳),(۳,۶),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}$

ت تاس آبی را همان تاس اول فرض می‌کنیم، پس: $F = \{(۲,۱),(۲,۲),(۲,۳),\dots,(۲,۶)\}$

در مثال‌هایی که تا این‌جا بررسی کردیم، ترتیب اهمیت داشت اما می‌خواهیم مثال‌هایی را بررسی کنیم که ترتیب در آن‌ها اهمیت ندارد.

مثال **۳ دانش‌آموز ریاضی و ۲ دانش‌آموز تجربی برای انتخابات شورای مدرسه کاندید شده‌اند. قرار است ۳ نفر برای شورا انتخاب شوند.**

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد آن‌که از دانش‌آموزان ریاضی و تجربی نماینده‌ای عضو شورا بوده و تعداد ریاضی‌ها بیشتر باشد را بنویسید.

پاسخ **الف** دانش‌آموزان ریاضی را با $R_۱, R_۲, R_۳$ و دانش‌آموزان تجربی را با $T_۱, T_۲$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که فقط افراد انتخاب‌شده مهم بوده و ترتیب بین آن‌ها اهمیتی ندارد. مثلاً حالت‌های $T_۱R_۱R_۲$، $R_۱T_۱R_۲$، $R_۱R_۲T_۱$ و ... همگی یک حالت به حساب می‌آیند، چون در همهٔ آن‌ها سه فرد $R_۱, R_۲, T_۱$ عضو شورا شده‌اند. ۳ نفر از بین ۵ نفر انتخاب خواهند شد، پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S) = \binom{۵}{۳} = \frac{۵!}{۲!۳!} = ۱۰$. حالا:

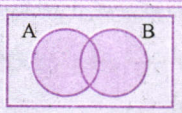
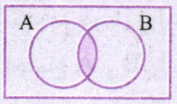
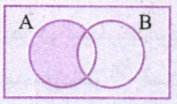
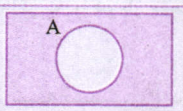
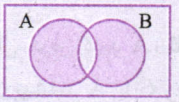
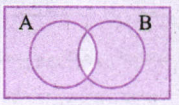
$$S = \{\underbrace{R_۱R_۲R_۳}_{\text{هر سه ریاضی}}, \underbrace{R_۱R_۲T_۱, R_۱R_۳T_۱, R_۲R_۳T_۱, R_۱R_۲T_۲, R_۱R_۳T_۲, R_۲R_۳T_۲}_{\text{دوتا ریاضی و یک تجربی}}, \underbrace{R_۱T_۱T_۲, R_۲T_۱T_۲, R_۳T_۱T_۲}_{\text{یک ریاضی و دوتا تجربی}}\}$$

ب $A = \{R_۱R_۲T_۱, R_۱R_۳T_۱, R_۲R_۳T_۱, R_۱R_۲T_۲, R_۱R_۳T_۲, R_۲R_۳T_۲\}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

جبر پیشامدها (اعمال روی پیشامدها)

هر پیشامد یک مجموعه است؛ بنابراین می‌توانیم اعمال زیر را بین پیشامدها اعمال کنیم:

پیشامد	چه موقع رخ می‌دهد	اصطلاحات فارسی	نمودار ون
$A \cup B$	A یا B رخ بدهد.	A یا B (یا هر دو) حداقل یکی از A و B	
$A \cap B$	A و B هر دو رخ بدهند.	A و B	
$A - B$	A رخ بدهد ولی B رخ ندهد.	فقط A رخ بدهد.	
A'	A رخ ندهد.	—	
$(A-B)\cup(B-A)$	A رخ بدهد و B رخ ندهد یا B رخ دهد و A رخ ندهد.	فقط A رخ بدهد یا فقط B رخ بدهد فقط یکی رخ بدهد.	
$(A\cup B)'$ یا $A'\cap B'$	نه A رخ بدهد و نه B.	A و B هیچ‌کدام رخ ندهند.	
$(A\cap B)'$ یا $A'\cup B'$	A رخ ندهد یا B رخ ندهد.	A و B هر دو با هم رخ ندهند. از بین A و B حداکثر یکی رخ بدهد.	

مثال یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد آن‌که سکه رو یا تاس ۳ بیاید را بنویسید.

پ) پیشامد آن‌که سکه رو و تاس ۳ بیاید را بنویسید.

ت) پیشامد آن‌که سکه رو بیاید ولی تاس ۳ نیاید را بنویسید.

ث) پیشامد آن‌که سکه رو نیاید را بنویسید.

ج) پیشامد آن‌که سکه رو نیاید و تاس نیز ۳ نیاید را بنویسید.

پاسخ **الف** سکه ۲ حالت و تاس ۶ حالت دارد، طبق اصل ضرب، فضای نمونه‌ای، ۱۲ عضو دارد که عبارت‌اند از:

$S=\{(ر,۱),\dots,(ر,۶),(پ,۱),\dots,(پ,۶)\}$.

ب به «یا» توجه کنید. پیشامد روآمدن سکه را A و ۳ آمدن تاس را B می‌گیریم. باید $A\cup B$ را به دست آوریم.

$A=\{(ر,۱),(ر,۲),\dots,(ر,۶)\}$ و $B=\{(ر,۳),(پ,۳)\} \Rightarrow A\cup B=\{(ر,۱),\dots,(ر,۶),(پ,۳)\}$

مورد داشتیم $A\cup B$ رو نوشته $A\cup B=\{ر,۳\}$

ببین اعضای هر پیشامد رو باید از فضای نمونه‌ای جدا کنی و بنویسی.

پ به «و» توجه کنید. باید بین B و A اشتراک بگیریم. به عبارت دیگر، اعضایی از فضای نمونه‌ای که هم سکه رو و هم تاس ۳ آمده است را می‌نویسیم، یعنی $A\cap B=\{(ر,۳)\}$.

ت باید $A-B$ را به دست آوریم:

$A-B=\{(ر,۱),(ر,۲),\dots,(ر,۶)\}-\{(ر,۳),(پ,۳)\}=\{(ر,۱),(ر,۲),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶)\}$

ث باید پیشامد A' را به دست آوریم، یعنی اعضایی که در A نیستند را می‌نویسیم:

$A'=\{(پ,۱),(پ,۲),\dots,(پ,۶)\}$

ج

$\underbrace{A'}_{\text{سکه رو نیاید}} \underbrace{\cap}_{\text{و}} \underbrace{B'}_{\text{تاس ۳ نیاید}}$

$=\{(پ,۱),(پ,۲),\dots,(پ,۶)\}\cap\{(ر,۱),(ر,۲),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶),(پ,۱),(پ,۲),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶)\}$

$=\{(پ,۱),(پ,۲),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶)\}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال سکه‌ای را می‌اندازیم. اگر رو بیاید تاس را می‌اندازیم و اگر پشت بیاید دو بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم.

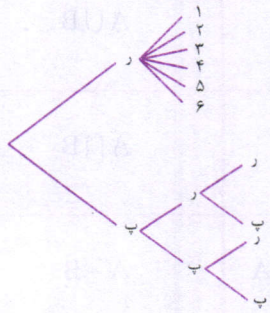
الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

ب) پیشامد آن‌که سکه دو بار رو یا تاس ۵ بیاید را بنویسید.

پ) پیشامد آن‌که تاس فرد و سکه پشت بیاید را بنویسید.

ت) پیشامد آن‌که سکه دو بار پشت نیاید را بنویسید.

ث) پیشامد آن‌که سکه دو بار رو نیاید و تاس نیز ۵ نیاید را با عبارت‌های مجموعه‌ای بنویسید. *(نیازی به نوشتن عضوها نیست.)*



پاسخ الف بهتر است ابتدا نمودار درختی را رسم کرده و از روی آن، فضای نمونه‌ای را بنویسیم:

$S=\{(ر,۱), \ldots, (ر,۶), (ر,ر,پ), (ر,ر,پ), (پ,ر,پ), (پ,پ,پ)\}$

ب پیشامد دو بار روآمدن سکه را A و ۵ آمدن تاس را B در نظر می‌گیریم. با توجه به کلمهٔ «یا» اجتماع A و B را به دست می‌آوریم:

$A=\{(ر,ر,پ)\}$ و $B=\{(ر,۵)\} \Rightarrow A\cup B=\{(ر,ر,پ),(ر,۵)\}$

پ هر دو شرط باید برقرار باشد. اما فقط در صورتی تاس را می‌اندازیم که سکه رو آمده باشد، پس پیشامد موردنظر $\varnothing$ است.

ت اگر C را دو بار پشت‌آمدن سکه در نظر بگیریم، باید پیشامد C' را بنویسیم، پس:

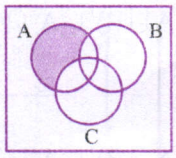
$C'=S-C=\{(ر,۱), \ldots, (ر,۶), (ر,ر,پ), (پ,پ,پ)\}$

ث شبیه قسمت ج در مثال قبلی پیشامد موردنظر $A'\cap B'$ خواهد بود.

مثال فرض کنید A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. هر پیشامد توصیف‌شده را با نمودار ون نمایش دهید.

الف) پیشامد A یا C رخ دهند ولی B رخ ندهد.

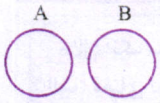
ب) فقط پیشامد A رخ دهد.



پاسخ الف پیشامد توصیفی همان $(A\cup C)-B$ است که نمایش نمودار ون آن به صورت مقابل است. *(از کل C و A، پیشامد B را بَردار)*

ب پیشامد به این معنی است که A رخ بدهد ولی B یا C، هیچ‌کدام رخ ندهند، پس $A-(B\cup C)$ پیشامد موردنظر خواهد بود. نمایش نمودار ون این پیشامد می‌شود: *(کل $B\cup C$ را از A بَردار)*

دو پیشامد ناسازگار



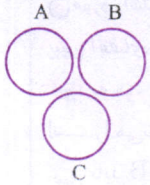
دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم، هرگاه $A\cap B=\varnothing$ باشد.

نکته

۱ اگر دو پیشامد ناسازگار باشند، هیچ‌گاه با هم اتفاق نمی‌افتند. مثلاً پیشامد زوج و فرد بودن در پرتاب تاس ناسازگارند، چون $\{۱,۳,۵\}\cap\{۲,۴,۶\}=\varnothing$؛ اما پیشامد زوج و اول بودن با هم ناسازگار نیستند، چون $\{۲,۳,۵\}\cap\{۲,۴,۶\}\neq\varnothing$. مثلاً اگر در پرتاب تاس عدد ۲، زوج ظاهر شود، هم زوج و هم اول آمده است.

۲ اگر $A\cap B\neq\varnothing$ باشد، B و A را سازگار گوییم.

ناسازگاربودن سه پیشامد



سه پیشامد A، B و C را دوبه‌دو ناسازگار گوییم هرگاه:

$A\cap B=\varnothing$ و $A\cap C=\varnothing$ و $B\cap C=\varnothing$

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ پیشامدهایی به زبان فارسی از آزمایش تصادفی (پرتاب سکه‌ها، تاس و ...) در صورت سؤال داده شده و شما باید عضوهای آن را بنویسید. حواستان باشد که معادل فارسی هر پیشامد ریاضی چگونه است.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۱ تا ۸

تیپ۲ مهم‌ترین سؤال این درس، استفاده از جبر مجموعه‌ها بین پیشامدهاست.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۹ تا ۴۸

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤال‌های امتحانی

جای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید.

۱- فضای نمونه‌ای پرتاب دو تاس و یک سکه، ..... عضو دارد.

۲- پیشامد آن‌که A یا B رخ بدهد را با ..... و پیشامد رخ‌دادن هر دوی B و A را با ..... نشان می‌دهیم.

۳- پیشامد آن‌که A رخ ..... را با ..... نشان می‌دهیم.

۴- ممکن است برای سه پیشامد C، B و A داشته باشیم $A \cap B \cap C = \varnothing$، ولی دوبه‌دو ناسازگار ..... .

۵- پیشامدهای $A - B$ و $B - A$ دو پیشامد ..... هستند، چون اشتراک آن‌ها ..... است.

۶- هر پیشامد یک زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای است. اگر فضای نمونه‌ای n عضو داشته باشد، ..... پیشامد روی آن می‌توان تعریف کرد.

۷- تاسی را پرتاب می‌کنیم. در صورتی که عدد زوج ظاهر شود، دوباره تاس و در غیر این صورت سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش ..... عضو دارد.

۸- هر یک از پیشامدهای سمت راست را به عبارت توصیفی مناسب سمت چپ وصل کنید.

$A \cup B$	A رخ ندهد یا B رخ دهد.
$A \cap B$	A رخ ندهد و B نیز رخ ندهد.
$B - A$	B رخ ندهد.
B'	A یا B (یا هر دو) رخ بدهند.
$A' \cup B$	A و B هر دو رخ دهند.
$A' \cap B'$	A رخ دهد و B رخ ندهد یا B رخ دهد و A رخ ندهد.
$A' \cup B'$	B رخ دهد ولی A رخ ندهد.
$(A - B) \cup B'$	A رخ ندهد یا این‌که B رخ ندهد.
$(A \cap B') \cup (B \cap A')$	فقط A رخ دهد یا این‌که B رخ ندهد.
$(A \cap B)'$	A و B هر دو با هم رخ ندهد.

خانواده‌ای دارای سه فرزند است. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۹- فضای نمونه‌ای این پدیدهٔ تصادفی را بنویسید.

۱۰- پیشامد A آن‌که خانواده دارای دو پسر باشد را بنویسید.

۱۱- پیشامد B آن‌که فرزند اول خانواده، دختر باشد را بنویسید.

۱۲- پیشامد آن‌که خانواده دارای دو پسر بوده و فرزند اول خانواده دختر باشد را بنویسید.

یک سکه و یک تاس را با یکدیگر پرتاب می‌کنیم. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۳- پیشامد آن‌که تاس مضرب ۳ (پیشامد A) یا سکه پشت (پیشامد B) بیاید را با عبارت‌های مجموعه‌ای توصیف کرده و اعضای آن را بنویسید.

۱۴- پیشامد $B - A$ را توصیف کرده و اعضای آن را بنویسید.

۱۵- پیشامد آن‌که تاس مضرب ۳ نیاید را بنویسید.

۱۶- پیشامد آن‌که تاس مضرب ۳ نیاید و سکه نیز پشت ظاهر نشود را با عبارت‌های مجموعه‌ای نوشته و اعضای آن را بنویسید.

سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. در صورتی که رو ظاهر شود، یک تاس و در غیر این صورت، دو بار دیگر سکه پرتاب می‌کنیم. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۱۷- پیشامد A که برآمد تاس، عدد اول نباشد را بنویسید.

۱۸- پیشامد B که سکه حداقل یک بار پشت بیاید را بنویسید.

۱۹- پیشامد آن‌که A یا B رخ بدهند را بنویسید.

تاسی را پرتاب می‌کنیم. در صورتی که زوج بیاید، یک سکه و در صورتی که فرد بیاید، دو سکه را پرتاب می‌کنیم.

۲۰- تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای را بنویسید.

۲۱- پیشامد A که تاس عدد اول بیاید را بنویسید.

۲۲- پیشامد B که سکه دو بار رو بیاید را بنویسید.

۲۳- آیا A و B ناسازگار هستند؟

دو تاس را با یکدیگر پرتاب می‌کنیم. *(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)*

۲۴- پیشامد A که مجموع دو تاس ۸ باشد را بنویسید.

۲۵- پیشامد B که عدد ظاهرشدهٔ روی یکی از تاس‌ها، مربع دیگری باشد را بنویسید.

۲۶- پیشامد C که حداقل روی یکی از تاس‌ها عدد ۴ ظاهر شود را بنویسید.

۲۷- پیشامد آن‌که A و C رخ دهند، ولی B رخ ندهد را بنویسید.

۲۸- پیشامد آن‌که فقط B رخ بدهد را بنویسید.

۲۹- پیشامد آن‌که C رخ بدهد، ولی A رخ ندهد را بنویسید.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

هر یک از اعداد طبیعی زوج کم‌تر از ۲۰ را روی یک کارت نوشته و یک کارت به تصادف برمی‌داریم.

۳۰- فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

۳۱- پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۴ باشد را مشخص کنید.

۳۲- پیشامد B که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد را مشخص کنید.

۳۳- پیشامد آن‌که عدد روی کارت مضرب ۳ یا ۴ باشد را مشخص کنید.

۳۴- چند پیشامد روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟

A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند. هر یک از عبارت‌های توصیفی را با نمودار ون نمایش داده و رنگ کنید.

۳۵- A و B رخ بدهد ولی C رخ ندهد.

۳۶- C رخ بدهد ولی B رخ ندهد.

۳۷- نه A رخ بدهد و نه B رخ بدهد.

۳۸- فقط پیشامد C رخ بدهد.

سکه‌ای که روی یک طرف آن عدد ۱ و روی طرف دیگر آن، عدد ۲ نوشته شده است را سه بار پرتاب می‌کنیم.

۳۹- پیشامد A که جمع عددهای ظاهرشده در پرتاب اول و دوم، ۳ باشد را بنویسید.

۴۰- پیشامد B که عدد ظاهرشده در هر بار متفاوت از بار قبل باشد را بنویسید.

۴۱- پیشامد $(A-B)\cup(B-A)$ را توصیف کرده و اعضای آن را مشخص کنید.

۴۲- پیشامد $A\cap B'$ را توصیف کرده و اعضای آن را مشخص کنید.

روی تاسی اعداد ۱،۱،۲،۲،۳،۳ نوشته شده است. وجه‌های با شماره‌های ۱،۲،۳ را به رنگ آبی و وجه‌های دیگر با شماره‌های ۱،۲،۳ را به رنگ قرمز درمی‌آوریم. این تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم.

۴۳- پیشامد A که تاس، در هر دو بار اعداد یکسانی را نشان دهد بنویسید و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

۴۴- پیشامد B که رنگ روشده در بار اول آبی و در بار دوم قرمز باشد را بنویسید و تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

کیسه‌ای دارای ۳ مهرهٔ آبی A_1، A_2 و A_3، ۲ مهرهٔ قرمز G_1 و G_2 و یک مهرهٔ نارنجی N_1 است. از این کیسه ۳ مهره به تصادف برمی‌داریم.

۴۵- تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

۴۶- پیشامد A که در آن «حداقل دو مهرهٔ آبی بیرون آید» را بنویسید.

۴۷- پیشامد B که در آن «دقیقاً ۱ مهرهٔ قرمز بیرون آید» را بنویسید.

۴۸- پیشامد C که در آن «دقیقاً دو مهرهٔ غیرهم‌رنگ بیرون آید» را بنویسید.

درس ۲ احتمال یا اندازه‌گیری شانس

احتمال رخ دادن پیشامد A (اندازه‌گیری شانس)

فرض کنید فضای نمونه‌ای آزمایشی تصادفی برابر S و پیشامد A، یک زیرمجموعهٔ S باشد. احتمال پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم. برای به دست آوردن احتمال رخداد A، کافی است تعداد عضوهای A را بر تعداد اعضای فضای نمونه‌ای تقسیم کنیم، یعنی:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد عضوهای } A}{\text{تعداد اعضای فضای نمونه‌ای}}$$

۱ در استفاده از این فرمول، فرض بر این است که هر کدام از عضوهای فضای نمونه‌ای، شانس یکسانی برای رخ‌دادن دارند.

۲ چون همواره مخرج بزرگ‌تر یا مساوی صورت بوده و تعداد عضوها منفی نیست، همواره $0\le P(A)\le 1$.

۳ هر چه احتمال پیشامد A به ۱ نزدیک‌تر باشد، شانس رخ‌دادن A بیشتر است.

۴ در حل مسئله‌های احتمال، ابتدا تعداد کل حالت‌ها را به دست آورده و در مخرج کسر قرار دهید. حالا تعداد حالت‌های مطلوب مسئله را به دست آورده و در صورت کسر قرار می‌دهیم.

۵ همواره $P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=0$ و $P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=1$، یعنی شانس رخداد پیشامد $\varnothing$ برابر صفر و شانس رخداد فضای نمونه‌ای برابر یک (۱۰۰ درصد) است.

در محاسبهٔ احتمال پیشامد A، با ۳ دسته مسئله، ممکن است مواجه شویم که در این‌جا به بررسی هر یک می‌پردازیم:

دستهٔ اول: تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای را با نوشتن یا اصل ضرب به دست آورده و تعداد عضوهای پیشامد مطلوب A را مستقیماً از بین آن‌ها شمارش می‌کنیم.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال **خانواده‌ای چهار فرزند دارد. احتمال آن‌که فرزند اول و آخر خانواده هر دو دختر باشند را به دست آورید.**

پاسخ جملهٔ اول مسئله معمولاً فضای نمونه‌ای را مشخص می‌کند. هر فرزند ۲ حالت دارد، پس $n(S)=۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$ حالت، در کل برای تولد فرزندان وجود دارد. *(حالا مطلوب‌ها)* پیشامد مطلوب این است که فرزند اول و آخر خانواده، هر دو دختر باشند؛ پس:

$$A=\{(د,د,د,د),(د,د,پ,د),(د,پ,د,د),(د,پ,پ,د)\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

مثال **دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که مجموع دو تاس برابر ۶ باشد.**

پاسخ هر تاس ۶ حالت دارد، پس $n(S)=۶\times۶=۳۶$ حالت برای پرتاب دو تاس وجود دارد. حالت‌های مطلوب می‌شود آن‌هایی که جمع دو تاس برابر ۶ است، یعنی $A=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}$، پس:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۶}$$

نکته

مجموع دو تاس در حالت کلی می‌تواند از ۲ تا ۱۲ تغییر کند. با کمی دقت درمی‌یابیم که تعداد حالت‌های مجموع ۲ (یعنی (۱,۱)) با تعداد حالت‌های مجموع ۱۲ (یعنی (۶,۶)) برابر است. به همین صورت تعداد حالت‌های مجموع ۳ با تعداد حالت‌های مجموع ۱۱ برابر است. به همین صورت داریم:

مجموع دو تاس	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالت‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

مثلاً احتمال آن‌که مجموع دو تاس برابر ۱۰ باشد، می‌شود $\frac{۳}{۳۶}$ یا احتمال آن‌که مجموع دو تاس مضرب ۴ باشد، می‌شود:

$$\frac{۳+۵+۱}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

مثال **در پرتاب هم‌زمان دو تاس، اعداد روشده m و n هستند. با کدام احتمال، معادلهٔ $x^۲-mx+n=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی و متمایز است؟ (تاس اول را به جای m و تاس دوم را به جای n قرار می‌دهیم.)** *(کنکور ریاضی دی ۱۴۰۱)*

پاسخ هر تاس ۶ حالت دارد؛ پس فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس $n(S)=۶\times۶=۳۶$ حالت دارد اما حالت‌های مطلوب وقتی است که $\Delta>۰$ (دقت کنید که n و m دو عدد طبیعی و از ۱ تا ۶ هستند.)

$$\Delta=(-m)^۲-۴(۱)(n)=m^۲-۴n>۰ \Rightarrow \begin{cases} m=۱,۲ \Rightarrow \text{جواب طبیعی برای } n \text{ به دست نمی‌آید.} \\ m=۳ \Rightarrow n=۱,۲ & (۲\text{ حالت}) \\ m=۴ \Rightarrow n=۱,۲,۳ & (۳\text{ حالت}) \\ m=۵ \Rightarrow n=۱,۲,۳,۴,۵,۶ & (۶\text{ حالت}) \\ m=۶ \Rightarrow n=۱,۲,۳,۴,۵,۶ & (۶\text{ حالت}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۵,۱),\dots,(۵,۶),(۶,۱),\dots,(۶,۶)\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۷}{۳۶}$$

دستهٔ دوم: مسئله‌هایی هستند که باید با استفاده از اصل ضرب، تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای و پیشامد مطلوب را شمارش کنیم.

مثال **جایگشت‌های حروف کلمهٔ hesabi را روی کارت‌های مختلف نوشته و آن‌ها را درون کیسه‌ای قرار می‌دهیم. یک کارت به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که کلمهٔ روی کارت:**

الف) با حرف h شروع شود؟ **ب) دو حرف b و s کنار هم باشند؟**

پ) با حرف صدادار شروع شده و حروف صدادار یک‌درمیان قرار گیرند؟

پاسخ **الف** ۶ حرف متمایز داریم، $۶!$ جایگشت از حروف کلمه وجود دارد، بنابراین $n(S)=۶!$. برای حالت‌های مطلوب چون کلمه باید با حرف h شروع شود، حرف اول یک حالت داشته و بقیهٔ حروف $۵!$ جایگشت دارند، پس $P(A)=\frac{۵!}{۶!}=\frac{۱}{۶}$.

ب چون می‌خواهیم b و s کنار هم باشند، پس آن‌ها را در یک دسته قرار می‌دهیم، بنابراین ۵ شیء $h,e,\boxed{sb},a,i$ داریم که $۵!$ جایگشت دارند. از طرفی خود b و s نیز $۲!$ می‌توانند جابه‌جا شوند *(و هنوز کنار هم باشند)*، پس:

$$P(B)=\frac{۵!\times۲!}{۶!}=\frac{۱}{۳}$$

پ حروف صدادار i,e,a و حروف بی‌صدا h,s,b هستند، پس:

$$\underbrace{\overset{\uparrow}{۳}\times\overset{\uparrow}{۳}\times\overset{\uparrow}{۲}\times\overset{\uparrow}{۲}\times\overset{\uparrow}{۱}\times\overset{\uparrow}{۱}}_{\text{حروف صدادار}} \Rightarrow P(C)=\frac{۳!\times۳!}{۶!}=\frac{۳\times۲}{۶\times۵\times۴}=\frac{۱}{۲۰}$$

حروف غیر صدادار

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

دستهٔ سوم: مسئله‌هایی که در آن‌ها انتخاب اشیا موردنظر است که در آن‌ها باید از فرمول ترکیب یا انتخاب استفاده کنید.

دوباره یادآوری می‌کنیم که:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r},\ \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6},\ \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2},\ \binom{n}{1}=n$$

مثال جعبه‌ای دارای ۴ مهرهٔ آبی، ۶ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ سبز است. مهره‌های آبی را A_1 تا A_4، مهره‌های قرمز را G_1 تا G_6 و مهره‌های سبز را S_1 تا S_3 بگیرید. از این جعبه ۳ مهره به تصادف برمی‌داریم. احتمال آن‌که:

الف) این ۳ مهره هم‌رنگ نباشند را به دست آورید.

ب) حداقل ۲ مهرهٔ آبی انتخاب شود را به دست آورید.

پ) حداکثر دو مهرهٔ سبز انتخاب شود را به دست آورید.

پاسخ الف) هم‌رنگ‌نبودن ۳ مهره، به این معنی است که از هر رنگ یکی انتخاب شود، پس:

$$P(A)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{3}{1}}{\binom{4+6+3}{3}}=\frac{4\times6\times3}{\binom{13}{3}}=\frac{4\times6\times3}{\frac{13!}{3!10!}}=\frac{4\times6\times3}{\frac{13\times12\times11}{6}}=\frac{2\times6\times3}{13\times11}=\frac{36}{143}$$

ب) حداقل، یعنی ۲ تا آبی یا بیشتر، پس داریم:

$$P(B)=\frac{\binom{4}{2}\times\overset{\text{هر سه آبی یا یکی از بقیه}}{\binom{6+3}{1}}\overset{\uparrow}{+}\binom{4}{3}}{\binom{13}{3}}=\frac{(6\times9)+4}{\frac{13\times12\times11}{6}}=\frac{58}{286}$$

دو تا آبی

پ) حداکثر، یعنی دو مهرهٔ سبز یا کم‌تر، پس داریم:

$$P(C)=\frac{\overbrace{\binom{3}{2}}^{\text{دو تا سبز}}\overset{\text{و}}{\times}\overbrace{\binom{4+6}{1}}^{\text{یکی از بقیه}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{3}{1}}^{\text{یکی سبز}}\overset{\text{و}}{\times}\overbrace{\binom{4+6}{2}}^{\text{دو تا از بقیه}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{4+6}{3}}^{\text{هر سه تا از بقیه}}}{\binom{13}{3}}$$

$$=\frac{(3\times10)+(3\times\frac{10\times9}{2})+\frac{10\times9\times8}{6}}{286}=\frac{30+135+120}{286}=\frac{285}{286}$$

(جلوتر این مسئله رو ساده‌تر هم حل می‌کنیم!)

احتمال رخ دادن پیشامد A یا B ($P(A\cup B)$)

در فصل اول داشتیم که:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\xrightarrow{\div n(S)}\ \frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\Rightarrow \underbrace{P(A\cup B)}_{\text{احتمال رخ‌دادن A یا B}}=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{احتمال رخ‌دادن هر دوی A و B}}$$

نکته

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $A\cap B=\varnothing$ بوده، در نتیجه: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{\text{صفر}}=P(A)+P(B)$

مثال ۴۷٪ خانواده‌های یک شهر دارای خودرو و ۳۳٪ خانواده‌های این شهر مالک مسکن و ۱۵٪ خانواده‌ها، هم خودرو و هم مسکن دارند. خانواده‌ای به تصادف از این شهر انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که خودرو یا مسکن داشته باشد (به عبارت دیگر حداقل یکی از امکانات خودرو یا مسکن را داشته باشد.) چه‌قدر است؟

پاسخ

$$\begin{cases}A:\text{داشتن خودرو}\\ B:\text{داشتن مسکن}\end{cases}\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{47}{100}+\frac{33}{100}-\frac{15}{100}=\frac{65}{100}$$

یعنی ۶۵٪ احتمال دارد این خانواده، خودرو یا مسکن (یا هر دو) داشته باشد.

مثال دو تاس آبی و قرمز را با یکدیگر پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع دو تاس ۷ یا تاس آبی ۳ بیاید را به دست آورید.

پاسخ

$A:$ مجموع دو تاس ۷ $\Rightarrow A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$B:$ تاس آبی ۳ $\Rightarrow B=\{(3,1),(3,2),\dots,(3,6)\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ *(تاس آبی را اولی گرفتیم)*

$A\cap B=$ مجموع دو تاس ۷ و تاس آبی ۳ $=\{(3,4)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{1}{36}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

احتمال رخداد A و عدم رخداد B $P(A-B)$

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)\xrightarrow{\div n(S)}\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

در مثال صفحهٔ قبل احتمال آن‌که مجموع دو تاس ۷ بیاید ولی تاس آبی ۳ نیاید می‌شود: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۳۶}=\frac{۵}{۳۶}$

تذکر به صورت مشابه $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ *(احتمال اشتراک ـ احتمال اولی)* به دست می‌آید.

احتمال آن‌که A رخ ندهد $P(A')$

قبلاً گفتیم که $A\cup A'=S$ و $P(S)=۱$ پس:

$$\underbrace{P(S)}_{۱}=P(A\cup A')=P(A)+P(A')-\overbrace{\underbrace{P(A\cap A')}_{۰}}^{\varnothing}\Rightarrow P(A)+P(A')=۱$$

بنابراین $P(A)=۱-P(A')$، یعنی برای به دست آوردن احتمال رخ دادن A، کافی است ابتدا احتمال آن‌که A رخ ندهد را به دست آورده و آن را از یک کم کنیم. در صورتی که محاسبهٔ احتمال A، طولانی یا مشکل باشد، بهتر است از این رابطه استفاده کنیم.

مثال **بار دیگر، قسمت (پ) در مثال جعبه در دستهٔ سوم احتمال‌ها** *(همونی که گفتیم جلو آسون‌تر حل می‌کنیم)* **را بررسی کنید. می‌خواهیم احتمال بیرون‌آمدن حداکثر دو مهرهٔ سبز را با این روش به دست آوریم. در بیرون‌آمدن سه مهره ممکن است صفر، ۱، ۲ یا ۳ مهرهٔ سبز خارج شود. احتمال بیرون‌آمدن حداکثر دو مهرهٔ سبز یعنی ۰، ۱ یا ۲ مهرهٔ سبز، بنابراین متمم آن بیرون‌آمدن ۳ مهرهٔ سبز خواهد بود.**

$$P(\text{حداکثر دو مهرهٔ سبز})=۱-P(\text{سه مهرهٔ سبز})=۱-\frac{\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۳}{۳}}=۱-\frac{۱}{۲۸۶}=\frac{۲۸۵}{۲۸۶}$$

مثال **سه تاس را با یکدیگر پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع شماره‌های ظاهرشده حداقل ۵ باشد.**

پاسخ هر تاس ۶ حالت دارد، پس $n(S)=۶\times۶\times۶=۲۱۶$. مجموع سه تاس می‌تواند از ۳ تا ۱۸ تغییر کند. پیشامد حداقل ۵ در مجموع سه تاس یعنی مجموع سه تاس می‌تواند ۵، ۶، ... ، ۱۸ باشد. این حالت‌ها بسیار زیاد خواهند بود، بنابراین بهتر است از احتمال متمم استفاده کنیم. متمم پیشامد داده‌شده، می‌شود مجموع تاس‌ها برابر ۳ یا ۴ باشد. در حالت‌های $(۱,۱,۲),(۱,۲,۱),(۲,۱,۱),(۱,۱,۱)$ حالت، مجموع برابر ۳ یا ۴ می‌شود، پس:

$$P(\text{مجموع حداقل ۵})=۱-P(\text{مجموع ۳ یا ۴})=۱-\frac{۴}{۲۱۶}=\frac{۲۱۲}{۲۱۶}$$

مثال **اگر $P(A')=۰/۲$ و $P(B)=۰/۷$ و $P(A\cup B)=۰/۹$ باشد، حاصل $P(A\cap B)$ و $P(A-B)$ و $P(B-A)$ را به دست آورید.**

پاسخ $P(A)=۱-P(A')$ است، پس $P(A)=۱-۰/۲=۰/۸$ خواهد بود. از طرفی:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow ۰/۹=۰/۸+۰/۷-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۱/۵-۰/۹=۰/۶$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۸-۰/۶=۰/۲$$

$$P(B-A)=P(B)-P(B\cap A)=۰/۷-۰/۶=۰/۱$$

احتمال آن‌که فقط A یا فقط B رخ بدهد

$$P(\underbrace{(A-B)\cup(B-A)}_{\text{ناسازگار}})=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

مثال **۴۷٪ خانواده‌های یک شهر دارای خودرو و ۳۳٪ خانواده‌های این شهر مالک مسکن و ۱۵٪ خانواده‌ها، هم خودرو و هم مسکن دارند. خانواده‌ای به تصادف از این شهر انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که فقط خودرو یا فقط مسکن داشته باشد، چه‌قدر است؟**

پاسخ

$$\begin{cases}A:\text{داشتن خودرو}\\B:\text{داشتن مسکن}\end{cases}\Rightarrow P((A-B)\cup(B-A))=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=\frac{۴۷}{۱۰۰}+\frac{۳۳}{۱۰۰}-\frac{۲\times۱۵}{۱۰۰}=\frac{۵۰}{۱۰۰}=\frac{۱}{۲}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

احتمال آن‌که نه A رخ بدهد و نه B

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-[(P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$$

در مثال قبلی احتمال آن‌که خانواده نه خودرو و نه مسکن داشته باشد برابر است با:

$$P(A'\cap B')=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=1-[\frac{47}{100}+\frac{33}{100}-\frac{15}{100}]=\frac{35}{100}$$

احتمال آن‌که حداکثر یکی از A و B رخ بدهد (یعنی هر دو با هم رخ ندهند)

$$P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)$$

در مثال بالا احتمال آن‌که خانواده حداکثر یکی از خودرو یا مسکن داشته باشد می‌شود: $P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)=1-\frac{15}{100}=\frac{85}{100}$

جمع‌بندی: قوانین احتمال در یک نگاه

۱	احتمال رخ‌دادن A یا B	$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
۲	احتمال رخداد A و عدم رخداد B	$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$
۳	احتمال آن‌که A رخ ندهد	$P(A')=1-P(A)$
۴	احتمال آن‌که فقط یکی از A و B رخ بدهد	$P(A-B)\cup P(B-A)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$
۵	احتمال آن‌که نه A رخ بدهد و نه B	$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$
۶	احتمال آن‌که حداکثر یکی از A و B رخ بدهد	$P(A'\cup B')=1-P(A\cap B)$

در امتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ احتمال رخداد یک پیشامد از شما خواسته شده است. حواستان باشد که از این موضوع قطعاً سؤال در امتحان می‌آید. از خط اول مسئله معمولاً کل حالت‌ها (مخرج کسر) و جملهٔ بعد از «مطلوب است احتمال ...» حالت‌های مطلوب (صورت کسر) به دست می‌آید. حواستان باشد با توجه به فضای نمونه، ۳ نوع مسئله ممکن است مطرح گردد.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۴۹ تا ۸۶

تیپ۲ قوانین احتمال است. اطلاعات فرمولی در مسئله داده‌شده و یکی از ۶ قانون خواسته می‌شود.

حالا تو حل کن: سؤال‌های ۸۷ تا ۱۰۱

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با یکی از کلمه‌های «شانس رخداد، ناسازگار، کم‌تر، بیشتر، سازگار» تکمیل کنید. (یک کلمه اضافه است.)

۴۹- چون A و A′ دو پیشامد ..... هستند، داریم $P(A)+P(A')=1$.

۵۰- در پرتاب تاس، ..... پیشامد اول‌بودن از پیشامد مضرب ۳ بودن بیشتر است.

۵۱- اگر $A\subseteq B$ باشد، آن‌گاه احتمال رخ‌دادن A از احتمال رخ‌دادن B، ..... است.

۵۲- اگر B و A دو پیشامد ..... باشند، $P(A\cup B)\neq P(A)+P(B)$. (S مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است.)

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید.

۵۳- اگر B و A دو پیشامد ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، $A\cap B=$ ..... .

۵۴- اگر $A\cap B\neq\varnothing$ باشد، B و A دو پیشامد ..... نامیده می‌شوند.

۵۵- اگر $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ آن‌گاه $P(A\cap B)=$ ..... و لذا B و A ..... هستند. (S مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است.)

۵۶- هر چه‌قدر اعضای A بیشتر باشد، کسر $\frac{n(A)}{n(S)}$ به ..... نزدیک‌تر بوده و می‌گوییم ..... رخ‌دادن A بیشتر است.

خانواده‌ای دارای چهار فرزند است.

۵۷- احتمال این‌که این خانواده فقط یک دختر داشته باشد را به دست آورید.

۵۸- احتمال این‌که فرزند اول و سوم خانواده پسر باشند را به دست آورید.

۵۹- احتمال این‌که دو فرزند اول هم‌جنس بوده و دو فرزند آخر هم‌جنس نباشند را به دست آورید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

دو تاس آبی و قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم.

۶۰- احتمال آن‌که دو تاس متوالی بیاید را به دست آورید.

۶۱- احتمال آن‌که مجموع دو تاس بر ۵ بخش‌پذیر باشد را به دست آورید.

۶۲- احتمال آن‌که عددهای ظاهرشده مساوی نباشند (جفت نیاید) چه‌قدر است؟

۶۳- هر عدد دورقمی را روی یک کارت نوشته و آن‌ها را درون کیسه‌ای قرار می‌دهیم. کارتی به تصادف خارج می‌کنیم. شانس کدام پیشامد بیشتر است؟

الف) مجموع ارقام عدد روی کارت، برابر ۶ باشد. ب) عدد روی کارت مربع کامل باشد.

همهٔ اعداد دورقمی که با ارقام ۰،۲،۳،۴،۵ می‌توان ساخت، روی کارت‌های مختلفی نوشته و درون کیسه قرار می‌دهیم. اگر یک کارت به تصادف خارج کنیم، احتمال آن‌که:

۶۴- عدد روی کارت مضرب ۳ یا مضرب ۴ باشد، چه‌قدر است؟

۶۵- عدد روی کارت مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۴ نباشد، چه‌قدر است؟

یک تاس و دو سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که:

۶۶- تاس زوج بیاید چه‌قدر است؟

۶۷- سکه‌ها مانند هم ظاهر شوند، چه‌قدر است؟

۶۸- تاس زوج و دقیقاً یک رو ظاهر شود، چه‌قدر است؟

تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که:

۶۹- مجموع اعداد ظاهرشده ۶ باشد چه‌قدر است؟

۷۰- احتمال آن‌که اعداد ظاهرشده همگی متفاوت باشند، چه‌قدر است؟

۷ نفر که دوتای آن‌ها برادر یکدیگرند، به صورت تصادفی در یک ردیف می‌ایستند.

۷۱- با کدام احتمال دو برادر یکی در ابتدا و دیگری در انتهای صف می‌ایستد؟

۷۲- با کدام احتمال دو برادر کنار یکدیگر نیستند؟

۷۳- با کدام احتمال بین دو برادر، ۳ نفر فاصله است؟

از جعبه‌ای شامل ۵ مهرهٔ قرمز و ۴ مهرهٔ آبی، ۳ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که:

۷۴- هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

۷۵- دو مهره آبی و یک مهره قرمز باشد.

۷۶- حداقل دو مهره قرمز باشد.

۷۷- حداکثر یک مهره آبی باشد.

۷۸- از هر دو رنگ مهره‌ای خارج شود.

۷۹- تعداد مهره‌های آبی بیشتر باشد.

می‌خواهیم از بین ۵ دانش‌آموز ریاضی، ۴ دانش‌آموز تجربی و ۳ دانش‌آموز انسانی، ۳ نفر را انتخاب کنیم. مطلوب است احتمال آن‌که:

۸۰- از هر رشته یک نفر انتخاب شود را به دست آورید.

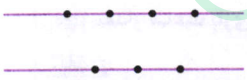
۸۱- هر سه نفر هم‌رشته‌ای باشند را به دست آورید.

۸۲- دانش‌آموز ریاضی و تجربی حتماً در بین افراد انتخاب‌شده باشند را به دست آورید.

۸۳- دانش‌آموزان ریاضی بیشتر از بقیهٔ دانش‌آموزان باشند را به دست آورید.

۸۴- می‌خواهیم از بین ۴ مهندس و ۶ پزشک، شورایی چهارنفره تشکیل دهیم. احتمال آن‌که تعداد افراد انتخابی از دو گروه مساوی نباشند را به دست آورید.

۸۵- ۷ نقطه مطابق شکل روبه‌رو، روی دو خط قرار گرفته‌اند. ۳ نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که با این ۳ نقطه بتوان مثلث درست کرد، چه‌قدر است؟



چه‌قدر احتمال دارد در یک تیم کوهنوردی سه‌نفره: (احتمال تولد در هر ماه را یکسان فرض کنید)

۸۶- همه در تیرماه متولد شده باشند؟

۸۷- همه در یک ماه متولد شده باشند؟

۸۸- هیچ دو نفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند؟

۸۹- فقط دو نفر در ماه تیر متولد شده باشند؟

۹۰- فقط یک نفر در سه ماه اول سال (فصل بهار) متولد شده باشد؟

با حروف کلمهٔ flower کلمه‌های چهارحرفی (بدون تکرار) می‌سازیم. مطلوب است احتمال آن‌که:

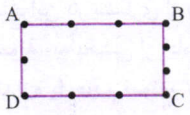
۹۱- کلمهٔ ساخته‌شده دارای حرف l نباشد؟

۹۲- کلمهٔ ساخته‌شده دارای حرف f باشد؟

۹۳- سه حرف f و o، r در کلمه وجود داشته و کنار هم باشند؟

۹۴- در کلمهٔ ساخته شده عبارت for دیده شود؟

۹۵- سه نقطه به صورت تصادفی از ۱۱ نقطه که روی محیط مستطیل قرار گرفته‌اند، انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مثلثی تشکیل شود که این سه نقطه رأس‌های آن باشند، چه‌قدر است؟



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۹۶- احتمال آن‌که فردی تا ۲۰ سال آینده ناراحتی قلبی بگیرد، ۲۳٪ و احتمال آن‌که تا ۲۰ سال آینده ناراحتی کلیه بگیرد، ۱۵٪ و احتمال بروز هر دو بیماری ۷٪ است. احتمال آن‌که این فرد دچار:

الف) حداقل یکی از دو بیماری تا ۲۰ سال آینده بشود، چه‌قدر است؟

ب) فقط بیماری قلبی شود، چه‌قدر است؟

پ) ناراحتی کلیه نشود، چه‌قدر است؟

دو تاس آبی و قرمز را با هم پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامدهای A، B و C به صورت زیر تعریف شوند، احتمال‌های موردنظر را به دست آورید.

تاس قرمز مضرب ۳ بیاید = C مجموع دو تاس ۱۰ باشد = B هر دو تاس زوج بیاید = A

۹۷- احتمال آن‌که هر دو تاس زوج بوده و مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

۹۸- احتمال آن‌که هر دو تاس زوج یا مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

۹۹- احتمال آن‌که تاس قرمز مضرب ۳ بیاید ولی مجموع دو تاس ۱۰ نباشد.

۱۰۰- اگر $P(A)=0/3$، $P(B')=0/7$، A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، $P(A\cup B)$ را به دست آورید.

۱۰۱- اگر $P(A)=2P(B')=0/6$ بوده و $P(A\cap B)=0/55$ باشد، احتمال رخ‌دادن A یا B را به دست آورید.

درس ۳ مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه، متغیر و انواع آن

آمار و علم آمار

میزان تورم در ماه‌های سال ۱۳۹۴ چه‌قدر بوده است؟ تعداد تصادفات جاده‌ای عید امسال، نسبت به سال گذشته چه تغییری کرده است؟ همهٔ ما شبیه این جمله‌ها را بارها از رادیو و تلویزیون شنیده‌ایم. برای بررسی این موارد، اولین گام این است که مجموعه‌ای از ارقام و اطلاعات (آمار) را جمع‌آوری کنیم. در قدم بعدی، آن‌ها را سامان داده و در جدول‌هایی سازمان‌دهی می‌کنیم. حالا کارشناسان می‌توانند این داده‌ها را تحلیل و آنالیز کنند. همهٔ این کارها را انجام می‌دهیم تا بتوانیم پیش‌بینی مناسبی برای آینده داشته و تصمیم بهتری بگیریم.

تعریف علم آمار: مجموعه روش‌هایی شامل: (ترتیب مراحل مهم است)

۱ جمع‌آوری اعداد و ارقام ۲ سازمان‌دهی و نمایش

۳ تحلیل و تفسیر داده‌ها ۴ قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی را علم آمار می‌گوییم.

آمار: مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات را آمار می‌گوییم.

جامعهٔ آماری

جامعه: مجموعهٔ همهٔ افراد یا اشیایی که در مورد یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد، جامعه یا جمعیت گفته می‌شود. هر یک از افراد یا اشیای جامعه را عضو جامعه می‌نامیم. مثل مجموعهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه را اندازه یا حجم جامعه می‌گوییم.

مثال جامعه و ویژگی مورد بررسی در آن را در جدول بنویسید.

الف) طول قد دانش‌آموزان پایهٔ دهم شهر اصفهان ب) برچسب انرژی یخچال‌های ایرانی‌ها

پ) مقدار ساعت بازی‌های رایانه‌ای افراد بین ۲۰ تا ۳۰ سال ت) مقدار سرب موجود در آب شهر تهران

پاسخ

	جامعه	ویژگی مورد بررسی
الف)	دانش‌آموزان پایهٔ دهم شهر اصفهان	طول قد
ب)	یخچال‌های ایرانی	برچسب انرژی
پ)	افراد بین ۲۰ تا ۳۰ سال	مقدار ساعت بازی‌های رایانه‌ای
ت)	آب شهر تهران	مقدار سرب موجود

نمونهٔ آماری

مطالعهٔ ویژگی روی همهٔ اعضای جامعه را **سرشماری** می‌گوییم. معمولاً بررسی ویژگی موردنظر روی همهٔ اعضای جامعه، مشکل و وقت‌گیر است، بنابراین در بسیاری از مواقع به جای مطالعهٔ همهٔ اعضای جامعه، بخشی یا نمونه‌ای از آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

نمونه: به بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می‌شود، نمونه می‌گوییم. هر یک از افراد یا اشیای انتخاب‌شده را عضو نمونه می‌نامیم.

اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه، اندازه یا حجم نمونه گفته می‌شود.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته

نمونه زیرمجموعهٔ جامعه است، پس اعضای نمونه، عضو جامعه بوده و اندازهٔ آن از اندازهٔ جامعه کم‌تر است. اعضای نمونه، نمایندهٔ اعضای جامعه هستند.

مثال خودروی تندر ۹۰ توسط دو کارخانهٔ ایران‌خودرو و پارس‌خودرو تولید می‌شود. در سال قبل، این دو شرکت به ترتیب ۱۰۰۰ و ۷۰۰ دستگاه خودروی تندر ۹۰ تولید کرده‌اند. برای بررسی و مقایسهٔ میزان آلایندگی این خودروها به ترتیب ۷۵ و ۳۰ دستگاه خودرو، از این دو کارخانه مورد معاینه قرار گرفتند. در این مثال داریم:

جامعه	عضو جامعه	اندازهٔ جامعه	نمونه	اندازهٔ نمونه	ویژگی مورد بررسی
تندر ۹۰های تولید ایران‌خودرو	خودروی تندر ۹۰	۱۰۰۰	خودروهای انتخابی	۷۵	میزان آلایندگی
تندر ۹۰های تولیدی پارس‌خودرو	خودروی تندر ۹۰	۷۰۰	خودروهای انتخابی	۳۰	میزان آلایندگی

متغیر و مقدار آن

یک ویژگی در اعضای جامعه که یکسان نبوده و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را **متغیر** می‌گوییم. عدد یا عبارتی را که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، **مقدار متغیر** می‌گوییم.

مثلاً وقتی می‌خواهیم وزن دانش‌آموزان کلاس را بررسی کنیم، متغیر، همان وزن دانش‌آموزان و عدد وزن، مقدار متغیر است. هنگامی که گروه خونی افراد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم، متغیر همان گروه خونی و مقدار آن یکی از عبارت‌های A، B، AB و O خواهد بود.

مثال در هر یک از موارد، متغیر و مقدار آن را مشخص کنید.

	متغیر	مقدار متغیر
سن فردی، ۲۳ سال است.	سن فرد	۲۳ سال
علی دانش‌آموز مقطع تحصیلی، دورهٔ دوم دبیرستان است.	مقطع تحصیلی	دبیرستان دورهٔ دوم
تعداد لامپ‌های خراب کارخانه‌ای در ماه قبل ۱۷۰۰ تا بوده است.	تعداد لامپ‌های خراب	۱۷۰۰
رنگ موی یکی از بازیکنان تیم فوتبال ایران، قهوه‌ای است.	رنگ مو	قهوه‌ای
کیفیت پرتقال‌های تولیدی شهر تنکابن درجهٔ یک است.	کیفیت پرتقال	درجهٔ ۱

نوع متغیر (کمّی، کیفی)

متغیرهای کمّی: به متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری هستند، متغیرهای کمّی می‌گوییم، مثل قد، وزن، زمان، تعداد، دما.

متغیرهای کیفی: به متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند، متغیرهای کیفی می‌گوییم، مثل گروه خونی، مراحل تحصیلی، جنسیت افراد، انواع خودرو، رنگ پوست و وضعیت هوا (از نظر ابری، آفتابی و ... بودن)

نکته

مقدار متغیرهای کمّی معمولاً با وسیله‌ای خاص اندازه‌گیری می‌شوند. آن‌ها قابل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم هستند در حالی که مقدار متغیرهای کیفی قابل جمع، تفریق ضرب و تقسیم نیستند.

انواع متغیرهای کمّی

متغیرهای کمّی دو نوع هستند:

۱ **کمّی پیوسته:** متغیری است که اگر بتواند دو مقدار b و a را اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند؛ به عبارت دیگر مجموعه مقادیر آن‌ها همهٔ اعداد در بازهٔ (a,b) بتواند قرار گیرد. مثلاً قد و وزن و زمان و طول، همگی کمّی پیوسته هستند.

۲ **کمّی گسسته:** متغیری که پیوسته نباشد و مجموعهٔ مقدارهای آن قابل شمردن باشد، مثلاً تعداد بیماران یک بیمارستان، کمّی گسسته است.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال پرسش‌نامه‌ای توسط پزشک برای فردی به صورت زیر، تکمیل شده است. در هر قسمت نوع متغیر را مشخص کنید.

سؤال (متغیر)	پاسخ (مقدار متغیر)	نوع متغیر
وزن	۷۵/۶ kg	کمّی پیوسته
سال تولد	۱۳۵۱	کمّی گسسته
تعداد ضربان قلب در دقیقه	۷۱	کمّی گسسته
سن (برحسب سال)	۴۳	کمّی گسسته
شاخص تودهٔ بدنی $\left(\frac{\text{وزن}}{(\text{قد})^2}\right)$	۳۳/۷۰۱	کمّی پیوسته

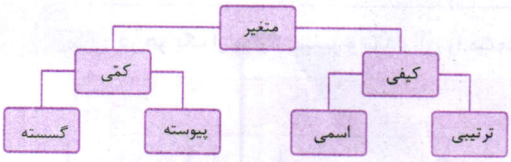
مورد داشتیم گفته آقا مگه زمان، کمّی پیوسته نیست، پس چرا سن رو کمّی گسسته نوشتید؟

ببین حرف تو درسته ولی اگه خودمون مقدار رو فقط اعداد ۰، ۱، ۲ و... در نظر بگیریم، کمّی گسسته می‌شه. تو خیلی جاها این کار رو می‌کنیم. مثلاً مدت زمانی که برای آزمون در نظر می‌گیریم، همین‌جوری کمّی پیوسته هستش، چون اگه b و a رو بگیره، بین اون‌ها رو هم می‌تونه بگیره، اما اگه خودمون مقدار رو برحسب دقیقه و اعداد صحیح بگیریم که معمولاً هم این‌جوری هستش، کمّی گسسته خواهد بود. حالا اگه مسئله در مورد زمان، قد، طول و دما حرف خاصی نزد، خب کمّی پیوسته هستش اما اگه گفت مقدار فقط اعداد صحیح هستند، کمّی گسسته می‌شه.

انواع متغیرهای کیفی

متغیرهای کیفی قابل اندازه‌گیری نیستند و معمولاً پاسخی که به سؤال در مورد آن‌ها داده می‌شود، به صورت یک کلمه است. مثلاً وقتی از کسی سطح تحصیلات او را می‌پرسیم، معمولاً با یکی از پاسخ‌های دیپلم، کارشناسی ارشد و دکترا مواجه می‌شویم. متغیر سطح تحصیلات قابل اندازه‌گیری نیست، بنابراین نوع آن کیفی خواهد بود. با کمی دقت درمی‌یابیم که بین پاسخ‌ها (مقدار متغیرها) ترتیب خاصی وجود دارد، به همین دلیل متغیر سطح تحصیلات را کیفی ترتیبی می‌نامیم. اگر از شخصی، گروه خونی او را بپرسیم، پاسخ او یکی از مقدارهای A، B، AB و O خواهد بود. این‌ها نیز قابل اندازه‌گیری نبوده و بین آن‌ها نیز ترتیب خاصی وجود ندارد، از این‌رو نوع متغیر گروه خونی را کیفی اسمی یا کیفی غیرترتیبی می‌نامیم.

در حالت کلی متغیرهای کیفی، بر دو نوع ترتیبی و اسمی (غیرترتیبی) هستند.



متغیر کیفی ترتیبی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری نیستند و بین مقدارهای آن‌ها ترتیب منطقی و طبیعی وجود دارد، متغیر کیفی ترتیبی می‌گوییم.

متغیر کیفی اسمی: متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نبوده و بین مقدارهای آن‌ها ترتیب خاصی وجود ندارد، متغیر کیفی اسمی می‌گوییم.

مثال در هر مورد، متغیر و پاسخی که به سؤال در مورد آن متغیر می‌تواند داده شود، نوشته شده است. نوع متغیر را مشخص کنید.

متغیر	مقدار متغیر	نوع متغیر
جنسیت افراد	مرد ـ زن	کیفی اسمی
شدت بارندگی	کم ـ متوسط ـ زیاد	کیفی ترتیبی
وضعیت هوا	ابری ـ بارانی ـ آفتابی	کیفی اسمی
پایهٔ درسی	اول تا دوازدهم	کیفی ترتیبی
میزان علاقه‌مندی به فوتبال	خیلی کم ـ کم ـ متوسط ـ زیاد	کیفی ترتیبی
مقام ورزشکار در مسابقه	بدون مقام ـ سوم ـ دوم ـ اول	کیفی ترتیبی
رنگ پوست	سفید ـ سیاه ـ سرخ ـ زرد	کیفی اسمی
کیفیت میوه	درجه یک ـ درجه دو ـ درجه سه	کیفی ترتیبی

مورد داشتیم گفته آقا مگه مقدار متغیرهای مقام ورزشکار و کیفیت میوه ۱، ۲ و ۳ نیستش؟ پس چرا کمّی نیستن؟

ببین متغیرهای کمّی قابل اندازه‌گیری (معمولاً با وسیله‌ای خاص) هستند. درجهٔ میوه رو چه‌جوری میشه اندازه گرفت؟ مثلاً متر کنیم؟

با توجه به نوع میوه و بزرگی اون، اسمی (درجه‌ای) رو به اون اختصاص دادیم، یعنی کیفی هستش و چون بین درجه‌ها ترتیب خاصی وجود داره می‌شه کیفی ترتیبی.

درامتحان چه‌خبر؟

تیپ۱ سؤال معروف این درس پرسیدن نوع متغیر (کمّی پیوسته ـ کمّی گسسته ـ کیفی اسمی ـ کیفی ترتیبی) است.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۱۱۶ تا ۱۵۰

تیپ۲ تعریف‌های این درس (مراحل علم آمار، جامعه و اندازهٔ جامعه و نمونه و اندازهٔ نمونه) نیز ممکن است به صورت جای خالی سؤال بیاید.

حالا تو حل کن سؤال‌های ۱۰۲ تا ۱۱۵

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤال‌های امتحانی

جاهای خالی را با استفاده از کلمه‌های مناسب، تکمیل کنید.

۱۰۲- می‌خواهیم ماهی‌های سفید دریای خزر را بررسی کنیم. به دلیل عدم دسترسی به کل ..... یک ..... از ماهی‌ها انتخاب می‌کنیم.

۱۰۳- ضرب‌المثل «مشت نمونهٔ خروار است.» اشاره به انتخاب ..... از کل ..... است.

۱۰۴- هر چه جامعه بزرگ‌تر باشد، برای آن‌که نمونه بتواند بیانگر جامعه باشد، نمونه باید ..... باشد.

۱۰۵- موضوع مورد مطالعه در یک جامعه را ..... می‌نامیم.

۱۰۶- متغیرهای قابل اندازه‌گیری از نوع ..... و متغیرهای غیر قابل اندازه‌گیری از نوع ..... هستند.

۱۰۷- اندازهٔ جامعه از اندازهٔ نمونه، ..... است.

۱۰۸- با توجه به جملهٔ «برای بررسی میزان مصرف شیر در بین خانواده‌های ایرانی، ۲۰۰۰ خانوار از کل ایران انتخاب شده است. مقدار مصرف خانوادهٔ A، ۵ لیتر در ماه بوده است.» عبارت‌های سمت راست را به عبارت‌های مناسب سمت چپ وصل کنید.

جامعه	۲۰۰۰ خانوار
نمونه	۵ لیتر
متغیر	خانواده‌های ایرانی
مقدار متغیر	مقدار مصرف شیر در ماه

در هر قسمت، جامعهٔ آماری را مشخص کنید.

۱۰۹- مدت‌زمان ورزش بانوان خانه‌دار

۱۱۰- محصولات کشاورزی زمین‌های استان سمنان

۱۱۱- بررسی صلاحیت افراد یک ساختمان برای مدیریت

۱۱۲- بررسی PH شامپوهای تولیدی کارخانهٔ A

در هر مورد، نمونهٔ آماری را مشخص کنید.

۱۱۳- انتخاب افرادی که حرف اول نام آن‌ها الف است، در یک مدرسه.

۱۱۴- انتخاب افرادی که شمارهٔ کارت ملی آن‌ها به ۱ ختم می‌شود، در یک سالن همایش.

۱۱۵- انتخاب افراد بالای ۶۵ کیلوگرم از بین مسافران یک اتوبوس.

نوع هر متغیر را مشخص کنید.

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور - مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۱۶- عدی از بازهٔ (۰,۱)

۱۱۷- مقدار پارچه‌ای که برای دوخت یک پیراهن به کار می‌رود.

۱۱۸- مقدار مالیات پرداختی

۱۱۹- میزان سابقهٔ تدریس (برحسب سال)

۱۲۰- رنگ مانتوهای تولیدی

۱۲۱- تعداد نامه‌های صندوق پستی

۱۲۲- نمرهٔ درس ریاضی (۲۰ ، ۱۹/۷۵ ، ۱۹/۵ ,...)

۱۲۳- غذای مورد علاقه

۱۲۴- میزان ولتاژ

۱۲۵- وضعیت مسکن (مالک و مستأجر)

۱۲۶- مقدار سرعت یک ماشین

۱۲۷- گنجایش بنزین یک تانکر سوخت

۱۲۸- تعداد دندان‌های سالم یک فرد

۱۲۹- کیفیت میوه‌های صادراتی (درجه یک، ...)

۱۳۰- مقدار سود واریزی در ماه برحسب ریال

۱۳۱- میزان ترس از تاریکی (خیلی کم، کم، متوسط، زیاد، خیلی زیاد)

۱۳۲- زبان‌های خارجی

۱۳۳- طول عمر یک ترانزیستور

۱۳۴- زمان انتظار یک راننده پشت چراغ قرمز در هر روز

۱۳۵- تعداد غایبین کلاس

۱۳۶- وضعیت تأهل

۱۳۷- تعداد بیماران مراجعه‌کننده به یک بیمارستان

۱۳۸- تعداد ستاره‌ها

۱۳۹- وزن نامه‌های صندوق پستی

۱۴۰- حرف اول نام خانوادگی افراد

۱۴۱- مراحل زندگی یک انسان (کودکی، نوجوانی و ...)

۱۴۲- دمای هوا در روزهای تابستان

۱۴۳- روزهای هفته (شنبه، یک‌شنبه و ...)

۱۴۴- نوع کشت زمین کشاورزی (برنج، گندم و ...)

۱۴۵- میزان رضایت‌مندی (زیاد، متوسط، کم)

۱۴۶- مقدار بارش در ماه برحسب لیتر

۱۴۷- مقدار قند موجود در خون برحسب میلی‌گرم

۱۴۸- نوع کدام متغیر با بقیه متفاوت است؟

الف) کتاب‌های درسی پایهٔ دهم

ب) شمارهٔ کلاسی هر دانش‌آموز

پ) جنسیت دانش‌آموزان پایهٔ دهم

ت) رنگ روپوش دانش‌آموزان پایهٔ دهم

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۴۹- کلاسی ۳۵ دانش‌آموز دارد. می‌خواهیم مدت‌زمانی را که دانش‌آموزان این کلاس، در روز تلویزیون تماشا می‌کنند، بررسی کنیم. برای این منظور از دانش‌آموزانی که شمارهٔ کلاسی آن‌ها مضرب ۳ است، سؤال می‌پرسیم. جدول زیر را کامل کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

جامعه	نمونه	متغیر	نوع متغیر

۱۵۰- نوع متغیرهای زیر را در خانهٔ مناسب علامت بزنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

	اسمی	ترتیبی	گسسته	پیوسته
الف) درجهٔ کیفیت تلفن‌های همراه ساخته‌شده توسط کارخانهٔ A (درجه ۱، ۲ و ...)	○	○	○	○
ب) کارخانهٔ سازندهٔ تلفن همراه	○	○	○	○
پ) زمان روشن‌ماندن تلفن همراه بعد از شارژ کامل	○	○	○	○
ت) تعداد تلفن‌های همراه ساخته‌شده توسط کارخانهٔ A	○	○	○	○

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

سؤالات آزمون جمع‌بندی فصل هفتم، منتخب سؤالات امتحانی مدارس برتر کشور است.

ردیف	آزمون جمع‌بندی فصل هفتم	رشتهٔ: ریاضی و تجربی	مدت امتحان: ۹۰ دقیقه	Kheilisabz.om	نمره
۱	جای خالی را به درستی تکمیل کنید. الف) تعداد اعضای جامعه را ..... می‌گویند. ب) در پرتاب دو تاس احتمال این‌که مجموع اعداد روشده کم‌تر از ۱۸ باشد برابر با ..... است. پ) متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند، متغیر ..... می‌گوییم. ت) هر ..... از فضای نمونه را یک پیشامد می‌گوییم.				۱
۲	سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید، دو سکهٔ دیگر و اگر رو بیاید، یک تاس پرتاب می‌کنیم. الف) تعداد عضوهای فضای نمونه کدام است؟ ب) پیشامد A، این‌که سکه دقیقاً دو بار پشت بیاید را بنویسید. پ) پیشامد B، این‌که حداقل یک سکه رو یا تاس زوج بیاید.				۲/۵
۳	دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال این‌که جمع دو عدد روشده مضرب ۴ باشد، چه‌قدر است؟				۱
۴	پدر و مادر و چهار فرزندشان به طور تصادفی در یک صف می‌نشینند. چه‌قدر احتمال دارد دقیقاً یک نفر بین پدر و مادر نشسته باشد؟				۱
۵	در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز و ۵ مهرهٔ آبی وجود دارد. از این جعبه سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد: الف) هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند. ب) دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ باشند.				۲
۶	احتمال این‌که علی در کنکور قبول نشود ۰/۳ و احتمال این‌که رضا و علی در کنکور قبول شوند ۰/۵ است. احتمال این‌که فقط علی قبول شود را بیابید.				۰/۵
۷	احتمال آن‌که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود ۵۷٪ و درس شیمی قبول شود ۶۵٪ و احتمال آن‌که در هر دو درس قبول شود ۴۲٪ است. چه‌قدر احتمال دارد او در هیچ‌کدام از دو درس قبول نشود؟				۱
۸	نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید. الف) تعداد فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های کشور در سال ۹۷ ب) وضعیت مسکن (مالک ـ مستأجر) پ) کیفیت اتاق‌های یک هتل (درجه ۱ ـ درجه ۲ ـ درجه ۳) ت) میزان خسارت‌های مالی پرداخت‌شده (ناشی از تصادفات) توسط یک شرکت بیمه برحسب هزار تومان				۱
	جمع نمرات				۱۰

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ سؤال‌های امتحانی

۱- $۶\times۶\times۲=۷۲$

۲- $A\cap B$ ـ $A\cup B$

۳- ندهد ـ A'

۴- نباشند

۵- ناسازگار ـ تهی

۶- ۲^n

۷- $n(s)=(\underset{\text{اعداد فرد}}{۳}\times\underset{\text{پرتاب سکه}}{۲})\overset{\text{یا}}{+}(\underset{\text{اعداد زوج}}{۳}\times\underset{\text{پرتاب تاس}}{۶})=۲۴$

۸- $A\cup B \leftrightarrow$ A یا B (یا هر دو) رخ بدهند.

$A'\cap B' \leftrightarrow$ A رخ ندهد و B نیز رخ ندهد.

$A\cap B \leftrightarrow$ A و B هر دو رخ بدهند.

$A'\cup B' \leftrightarrow$ A رخ ندهد یا B رخ ندهد.

$B-A \leftrightarrow$ B رخ دهد ولی A رخ ندهد.

$(A-B)\cup B' \leftrightarrow$ فقط A رخ دهد یا این‌که B رخ ندهد.

$B' \leftrightarrow$ B رخ ندهد.

$(A\cap B')\cup(B\cap A') \leftrightarrow$ A رخ دهد و B رخ ندهد یا B رخ دهد و A رخ ندهد.

$A'\cup B \leftrightarrow$ A رخ ندهد یا B رخ دهد.

$(A\cap B)' \leftrightarrow$ B و A هر دو با هم رخ ندهند.

۹- $S=\{\overbrace{(پ,پ,پ),(پ,پ,د)}^{\text{همه پسر}},\overbrace{(پ,د,پ),(د,پ,پ),(پ,د,د)}^{\text{یک دختر}},\overbrace{(د,پ,د),(د,د,پ)}^{\text{دو دختر}},\overbrace{(د,د,د)}^{\text{سه دختر}}\}$

۱۰- $A=\{(پ,پ,د),(پ,د,پ),(د,پ,پ)\}$

۱۱- $B=\{(د,پ,پ),(د,پ,د),(د,د,پ),(د,د,د)\}$

۱۲- $A\cap B=\{(د,پ,پ)\}$

۱۳- $A\cup B=\{(ر,۳),(ر,۶),(پ,۱),(پ,۲),\ldots,(پ,۶)\}$
$=\{(پ,۱),(پ,۲),(پ,۴),(پ,۵)\}$

۱۴- $B-A=\{(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),\ldots,(پ,۶)\}$
$-\{(ر,۳),(ر,۶),(پ,۳),(پ,۶)\}$

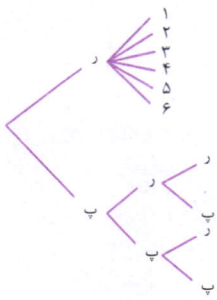
$B-A$ به معنی رخ‌دادن B و عدم رخ‌دادن A خواهد بود.

۱۵- تاس مضرب ۳ نیاید $\Rightarrow A'=$ مضرب ۳ بیاید $A=$
$=\{(ر,۱),(ر,۲),(ر,۴),(ر,۵),(پ,۱),(پ,۲),(پ,۴),(پ,۵)\}$

۱۶- $\underbrace{A'}_{\text{سکه پشت نیاید}}\ \underbrace{\cap}_{\text{و}}\ \underbrace{B'}_{\text{تاس مضرب ۳ نیاید}}$

$=A'\cap\{(ر,۱),(ر,۲),\ldots,(ر,۶)\}=\{(ر,۱),(ر,۲),(ر,۴),(ر,۵)\}$

۱۷- ابتدا بهتر است فضای نمونه‌ای را با نمودار درختی مشخص کنیم:



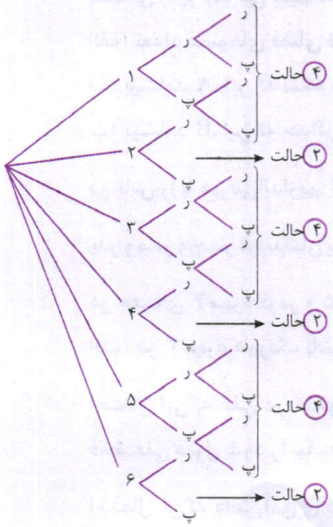
$S=\{(ر,۱),\ldots,(ر,۶),(ر,ر,پ),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(پ,پ,پ)\}$

$A=\{(ر,۱),(ر,۴),(ر,۶)\}$

۱۸- $B=\{(پ,پ,پ),(ر,پ,پ),(پ,ر,پ),(پ,پ,ر),(ر,ر,پ)\}$

۱۹- $A\cup B=\{(ر,۱),(ر,۴),(ر,۶),(پ,ر,ر),(پ,ر,پ),$
$(پ,پ,پ),(ر,پ,پ)\}$

۲۰- با توجه به نمودار درختی زیر:



$n(S)=۴+۲+۴+۲+۴+۲=۳\times۴+۳\times۲=۱۸$

۲۱- $A=\{(۲,ر),(۲,پ),(۳,ر),(۳,ر,ر),(۳,پ,ر),(۳,ر,پ),$
$(۳,پ,پ),(۵,ر,ر),(۵,پ,ر),(۵,ر,پ),(۵,پ,پ)\}$

۲۲- $B=\{(۱,ر,ر),(۳,ر,ر),(۵,ر,ر)\}$

۲۳- چون اشتراک A و B تهی نیست، پس B و A ناسازگار نیستند.

۲۴- $A=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$

۲۵- $B=\{(۱,۱),(۲,۴),(۴,۲)\}$

۲۶- $C=\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۵),(۴,۶),(۱,۴),(۲,۴),(۳,۴),$
$(۵,۴),(۶,۴),(۴,۴)\}$

۲۷- $\underbrace{A\cap C}_{\text{رخ‌دادن A, C}}-\overset{\text{رخ‌ندادن B}}{B}=\{(۴,۴)\}-B=\{(۴,۴)\}$

۲۸- پیشامد آن‌که فقط B رخ بدهد، یعنی B رخ بدهد ولی A یا C رخ ندهند. رخداد A یا C می‌شود $A\cup C$، پس پیشامد موردنظر همان $B-(A\cup C)$ خواهد بود. $B-(A\cup C)=\{(۱,۱)\}$

۲۹- $C-A=C-\{(۴,۴)\}$

۳۰- $S=\{۲,۴,۶,۸,\ldots,۱۸\}$

۳۱- $A=\{۴,۸,۱۲,۱۶\}$

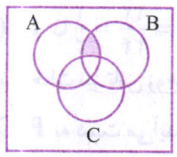
۳۲- $B=\{۶,۱۲,۱۸\}$

۳۳- $A\cup B=\{۴,۶,۸,۱۲,۱۶,۱۸\}$

۳۴- هر پیشامد، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی برابر ۲^n است. چون فضای نمونه‌ای ۹ عضو دارد، پس $۲^۹$ پیشامد می‌توان روی آن تعریف کرد.

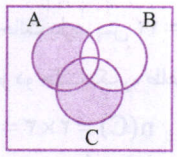
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۳۵- $(A\cap B)-C$



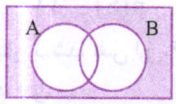
(از اشتراک B و A، مجموعهٔ C را برمی‌داریم.)

۳۶- $(A\cup C)-B$



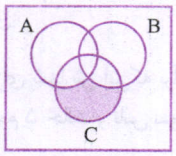
(از اجتماع C و A، مجموعهٔ B را برمی‌داریم.)

۳۷- $A'\cap B'$



(جاهایی که بیرون A و هم بیرون B هستند.)

۳۸- $C-(A\cup B)$



(کل $A\cup B$ را از C برمی‌دارید.)

۳۹- ابتدا فضای نمونه‌ای را می‌نویسیم و پیشامدهای A و B را از بین اعضای آن جدا می‌کنیم:

$$S=\{\overbrace{(1,1,1)}^{\text{همه ۱}},\overbrace{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)}^{\text{فقط یکی ۲}},\overbrace{(1,2,2),(2,1,2),(2,2,1)}^{\text{دوتا ۲}},\overbrace{(2,2,2)}^{\text{همه ۲}}\}$$

$$A=\{(1,2,1),(2,1,1),(1,2,2),(2,1,2)\}$$

$$B=\{(1,2,1),(2,1,2)\}$$

۴۰-

۴۱- $A-B$ یعنی رخداد A و عدم رخدادن B. $B-A$ نیز به معنی رخدادن B و عدم رخدادن A است، بنابراین مفهوم $(A-B)\cup(B-A)$ رخداد فقط A یا فقط B است. به عبارت دیگر رخدادن فقط یکی از پیشامدهای B و A، مجموعهٔ داده‌شده را توصیف می‌کند.

$$(A-B)\cup(B-A)=$$
$$\{(2,1,1),(1,2,2)\}\cup\varnothing=\{(2,1,1),(1,2,2)\}$$

۴۲- پیشامد $A\cap B'$ به این معنی است که A رخ بدهد و B رخ ندهد. به عبارت دیگر این پیشامد همان پیشامد $A-B$ خواهد بود، پس:

$$A-B=\{(2,1,1),(1,2,2)\}$$

۴۳- وجه‌های آبی را با A_1، A_2 و A_3 (A_1 یعنی وجه آبی شمارهٔ یک) و وجه‌های قرمز را با G_1، G_2 و G_3 نشان می‌دهیم. هر تاس ۶ حالت دارد، پس فضای نمونه‌ای ۳۶ حالت دارد.

$$A=\{(A_1,A_1),(A_1,G_1),(G_1,A_1),(G_1,G_1),$$
$$(A_2,A_2),\dots,(G_2,G_2),(A_3,A_3),\dots,(G_3,G_3)\}$$

بنابراین A، $4\times3=12$ عضو دارد.

۴۴-

$$B=\{(A_1,G_1),(A_1,G_2),(A_1,G_3),(A_2,G_1),(A_2,G_2),$$
$$(A_2,G_3),(A_3,G_1),(A_3,G_2),(A_3,G_3)\}$$

بنابراین B، $3\times3=9$ عضو دارد.

۴۵- می‌خواهیم ۳ مهره از بین $1+2+3=6$ مهره انتخاب کنیم.

این کار به $\binom{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{6}=20$ حالت امکان‌پذیر است.

۴۶-

$$A=\{A_1A_2G_1,A_1A_2G_2,A_1A_2N_1,A_1A_3G_1,A_1A_3G_2,$$
$$A_1A_3N_1,A_2A_3G_1,A_2A_3G_2,A_2A_3N_1,A_1A_2A_3\}$$

به عبارت دیگر باید دو مهرهٔ آبی و یک مهره از بقیه انتخاب کنیم یا این‌که هر سه را آبی انتخاب کنیم، پس:

$$n(S)=\binom{3}{2}\times\binom{3}{1}+\binom{3}{3}=9+1=10$$

۴۷-

$$B=\{G_1A_1A_2,G_1A_1A_3,G_1A_2A_3,G_2A_1A_2,$$
$$G_2A_1A_3,G_2A_2A_3,G_1N_1A_1,G_1N_1A_2,G_1N_1A_3,$$
$$G_2N_1A_1,G_2N_1A_2,G_2N_1A_3\}$$

به عبارت دیگر:

$$n(B)=\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{یکی قرمز}}\times\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{دوتا از بقیه}}=2\times6=12$$

۴۸-

$$C=\{\underbrace{A_1A_2G_1,A_1A_2G_2,A_1A_2N_1,A_1A_3G_1,A_1A_3G_2,A_1A_3N_1,A_2A_3G_1,A_2A_3G_2,A_2A_3N_1}_{\text{دوتا آبی و یکی از بقیه}},$$
$$\underbrace{G_1G_2A_1,G_1G_2A_2,G_1G_2A_3,G_1G_2N_1}_{\text{دوتا قرمز و یکی از بقیه}}\}$$

$$n(C)=\binom{3}{2}\times\binom{3}{1}+\binom{2}{2}\binom{4}{1}=9+4=13$$

۴۹- ناسازگار ـ چون؛ $A\cap A'=\varnothing$ و لذا:

$$P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')-\overbrace{P(A\cup A')}^{\text{صفر}}$$

۵۰- شانس ـ چون $\frac{3}{6}=$ (اول‌بودن) P در حالی که $\frac{2}{6}=$ (مضرب ۳) P.

۵۱- کم‌تر یا مساوی، چون:

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\le n(B)\xrightarrow{\div n(S)}P(A)\le P(B)$$

۵۲- سازگار ـ چون اگر B و A دو پیشامد ناسازگار باشند، $A\cap B=\varnothing$ و لذا $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. چون تساوی برقرار نیست، دو پیشامد سازگار هستند.

۵۳- $A\cap B=\varnothing$

۵۴- سازگار

۵۵- $P(A\cap B)=0$ ـ ناسازگار

۵۶- یک ـ شانس

۵۷- هر فرزند دو حالت دارد، پس $n(S)=2\times2\times2\times2=16$؛ حالت برای تولد فرزندان وجود دارد.

$$A=\{(\text{پ},\text{د},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{د},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{پ},\text{د}),$$
$$(\text{د},\text{پ},\text{پ},\text{پ})\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

۵۸-

$$B=\{(\text{پ},\text{پ},\text{د},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{پ},\text{پ}),(\text{پ},\text{پ},\text{پ},\text{پ}),$$
$$(\text{د},\text{پ},\text{د},\text{پ})\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

(اول و سوم رو پ بذارین و بعد ۴ حالت بقیه رو بنویسین.)

۵۹-

$$C=\{(\text{د},\text{پ},\text{د},\text{د}),(\text{پ},\text{د},\text{پ},\text{پ}),(\text{د},\text{پ},\text{پ},\text{پ}),$$
$$(\text{د},\text{د},\text{د},\text{پ})\}\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

با این‌که سه پیشامد یکسان نیستند ولی شانس وقوع آن‌ها برابر است.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۶۰- $A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$

۶۱- $B=\{\underbrace{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)}_{\text{مجموع برابر ۵}},\underbrace{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)}_{\text{مجموع برابر ۱۰}}\}$

$\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۷}{۳۶}$

(گفته مجموع بر ۵ بخش‌پذیر باشه نه این‌که مجموع ۵ باشه!)

۶۲- از ۳۶ حالت فضای نمونه‌ای، ۶ حالت جفت وجود دارد، پس $۳۶-۶=۳۰$ حالت وجود دارد که تاس‌ها یکسان ظاهر نشوند؛ بنابراین احتمال موردنظر $\frac{۳۰}{۳۶}=\frac{۵}{۶}$ خواهد بود.

۶۳- تعداد ۹۰ عدد دورقمی وجود دارد، پس $n(S)=۹۰$.

الف) $A=۶$ مجموع ارقام برابر $=\{۶۰,۱۵,۵۱,۲۴,۴۲,۳۳\}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۹۰}$

ب) $B=$ مربع کامل $=\{۱۶,۲۵,۳۶,۴۹,۶۴,۸۱\}$

$\Rightarrow P(B)=\frac{۶}{۹۰}$

$\Rightarrow$ شانس هر دو برابر است.

۶۴- $S=\{۲۰,۲۲,۲۳,۲۴,۲۵,۳۰,۳۲,۳۳,۳۴,۳۵,۴۰,۴۲,۴۳,۴۴,۴۵,۵۰,۵۲,۵۳,۵۴,۵۵\}$

توجه دارید که صحبتی از عدم تکرار نشده است، بنابراین رقم‌ها تکراری نیز می‌توانند باشند؛ بنابراین $n(S)=۲۰$.

$A=$ مضرب ۳ $=\{۲۴,۳۰,۳۳,۴۲,۴۵,۵۴\}$

$B=$ مضرب ۴ $=\{۲۰,۲۴,۳۲,۴۰,۴۴,۵۲\}$

$\Rightarrow A\cup B=$ مضرب ۳ یا مضرب ۴

$=\{۲۰,۲۴,۳۰,۳۲,۳۳,۴۰,۴۲,۴۴,۴۵,۵۲,۵۴\}$

بنابراین: $P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۲۰}$ *(توجه دارید که عدد تکراری ۴۲ رو یه بار نوشتیم.)*

تذکر می‌توانستیم با استفاده از قوانین احتمال نیز بنویسیم:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$\frac{۶}{۲۰}+\frac{۶}{۲۰}-\frac{۱}{۲۰}=\frac{۱۱}{۲۰}$

($A\cap B=\{۲۴\}$ بود؛ پس احتمالش $\frac{۱}{۲۰}$ شد.)

۶۵- $A-B=\{۳۰,۳۳,۴۲,۴۵,۵۴\}$ است. احتمال خواسته‌شده نیز همان $P(A-B)$ است؛ پس:

$P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{۵}{۲۰}=\frac{۱}{۴}$

۶۶- می‌توانیم با نوشتن فضای نمونه‌ای و پیشامدها و شمارش عضوهای هر پیشامد، احتمال‌ها را به دست می‌آوریم. اما در این‌جا می‌خواهیم با استفاده از اصل ضرب، مسئله را حل کنیم. ابتدا توجه کنید که $n(S)=۶\times۲\times۲=۲۴$.

در سه حالت تاس ممکن است زوج ظاهر شود. سکه‌ها نیز هر کدام دو حالت دارند، پس تعداد عضوهای این پیشامد می‌شود:

$n(A)=۳\times۲\times۲=۱۲ \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$

۶۷- دو سکه در دو حالت مثل هم می‌آید $\{(ر,ر),(پ,پ)\}$ و تاس نیز ۶ حالت دارد، پس $n(B)=۲\times۶=۱۲$ و لذا $P(B)=\frac{۱۲}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$.

۶۸- در دو حالت یک رو ظاهر می‌شود و در سه حالت نیز تاس زوج می‌آید، پس $n(C)=۲\times۳=۶$ و $P(C)=\frac{۶}{۲۴}=\frac{۱}{۴}$ به دست می‌آید.

۶۹- $n(S)=۶\times۶\times۶=۲۱۶$، اما پیشامد مجموع برابر ۶ می‌شود:

$A=\{(۱,۱,۴),(۱,۴,۱),(۴,۱,۱),(۱,۲,۳),(۱,۳,۲),(۲,۱,۳),(۲,۳,۱),(۳,۱,۲),(۳,۲,۱),(۲,۲,۲)\}$

بنابراین: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۱۶}=\frac{۵}{۱۰۸}$

۷۰- برای شمارش این‌که برآمد تاس‌ها یکسان نباشد، تاس اول ۶ حالت، تاس دوم ۵ حالت و تاس سوم ۴ حالت دارد، پس:

$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶\times۵\times۴}{۶\times۶\times۶}=\frac{۵}{۹}$

۷۱- ۷ نفر به $۷!$ روش می‌توانند در صف بایستند؛ پس $n(S)=۷!$.

دو برادر را A و B بگیرید.

$\frac{۱}{A}\times\underbrace{\quad ۵!\quad}\times\frac{۱}{B}$ یا $\frac{۱}{B}\times\underbrace{\quad ۵!\quad}\times\frac{۱}{A}$

و در ابتدا و انتهای صف قرار بدهید. بقیهٔ افراد هم $۵!$ جایگشت دارند، پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر $۲\times۵!$ می‌شود. حالا:

$P(\text{دو برادر در ابتدا و انتها})=\frac{۲\times۵!}{۷!}=\frac{۱}{۲۱}$

۷۲- حالت‌هایی که دو برادر کنار هم نیستند، زیاد است؛ پس بهتر است از متمم استفاده کنیم. برای این‌که A و B کنار هم باشند، آن‌ها را در یک دسته قرار داده (BA) و یک شیء فرض می‌کنیم. حالا ۶ شیء داریم که $۶!$ جایگشت دارند. خود A و B، $۲!$ جایگشت دارند؛ پس داریم:

$P(\text{دو برادر کنار هم نباشند})=۱-P(\text{دو برادر کنار هم})=$

$۱-\frac{۶!\times۲!}{۷!}=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$

۷۳- این‌جا باید حالت‌بندی کنیم تا ببینیم A و B کجاها می‌توانند قرار بگیرند.

$\underline{A}___\underline{B}__=\overbrace{۵!}^{\text{جایگشت بقیه}}\times\overbrace{۲!}^{\text{جایگشت A و B}}$

$_\underline{A}___\underline{B}_=۵!\times۲!$

$__\underline{A}___\underline{B}=۵!\times۲!$

پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر $۳\times۵!\times۲!$ می‌شود؛ حالا:

$P(\text{بین دو برادر ۳ فاصله})=\frac{۳\times۵!\times۲!}{۷!}=\frac{۱}{۷}$

۷۴-

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۵}{۳}}^{\text{سه تا قرمز}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{۴}{۳}}^{\text{سه تا آبی}}}{\underbrace{\binom{۵+۴}{۳}}_{\text{۳ تا از کل}}}=\frac{\frac{۵\times۴}{۲}+۴}{\frac{۹\times۸\times۷}{۶}}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

۷۵-

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{۴}{۲}}^{\text{دو تا آبی}}\times\overbrace{\binom{۵}{۱}}^{\text{یکی قرمز}}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۶\times۵}{۸۴}=\frac{۵}{۱۴}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۷۶- (حداقل یعنی دوتا یا بیشتر)

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{دوتا قرمز}}\times\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{یکی آبی}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{5}{3}}^{\text{هر سه قرمز}}}{\binom{9}{3}}=$$

$$\frac{(10\times4)+10}{84}=\frac{50}{84}=\frac{25}{42}$$

۷۷- (حداکثر یعنی یکی یا کم‌تر)

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{یک آبی}}\overset{\text{و}}{\times}\overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{دوتا قرمز}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{5}{3}}^{\text{هر سه قرمز}}}{\binom{9}{3}}=$$

$$\frac{4\times10+10}{84}=\frac{50}{84}=\frac{25}{42}$$

(یه بار دیگه پاسخ ۷۶ و ۷۷ رو بخون، هر دوتاش یه چیز می‌گن، مگه نه!)

۷۸-

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{دوتا آبی}}\overset{\text{و}}{\times}\overbrace{\binom{5}{1}}^{\text{یک قرمز}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{یکی آبی}}\overset{\text{و}}{\times}\overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{دوتا قرمز}}}{\binom{9}{3}}$$

$$=\frac{(6\times5)+(4\times10)}{84}=\frac{70}{84}=\frac{5}{6}$$

(یه بار دیگه پاسخ ۷۴ و ۷۸ رو بخون. قبول داری متمم هم هستن؟ به خاطر همین جمع احتمال‌هاشون هم ۱ می‌شه.)

۷۹-

$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{\overbrace{\binom{4}{3}}^{\text{هر سه تا آبی}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{دوتا آبی}}\times\overbrace{\binom{5}{1}}^{\text{یکی قرمز}}}{\binom{9}{3}}=$$

$$\frac{4+(6\times5)}{84}=\frac{34}{84}=\frac{17}{42}$$

۸۰- باید از هر رشته یک نفر انتخاب کنیم، یعنی یکی ریاضی و یکی تجربی و یکی انسانی، پس:

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{5+4+3}{3}}=\frac{5\times4\times3}{\frac{12\times11\times10}{6}}=\frac{3}{11}$$

۸۱- هر سه نفر هم‌رشته‌ای یعنی این‌که یا باید هر سه‌تا ریاضی یا هر سه تجربی و یا هر سه انسانی باشند، پس:

$$P(B)=\frac{\binom{5}{3}+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{10+4+1}{\frac{12\times11\times10}{6}}$$

$$=\frac{15}{2\times11\times10}=\frac{3}{44}$$

۸۲-

$$P(C)=\frac{\overbrace{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}^{\text{دوتا ریاضی و یکی تجربی}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}^{\text{دوتا تجربی و یکی ریاضی}}\overset{\text{یا}}{+}\overbrace{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}^{\text{یکی ریاضی، یکی تجربی و یکی انسانی}}}{\binom{12}{3}}$$

$$=\frac{(10\times4)+(6\times5)+(5\times4\times3)}{2\times11\times10}=\frac{130}{220}=\frac{13}{22}$$

۸۳-

$$P(D)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4+3}{1}+\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}=\frac{(10\times7)+10}{220}=\frac{80}{220}=\frac{4}{11}$$

۸۴- حل مستقیم طولانی خواهد بود اما اگر از متمم استفاده کنیم:

P (تعداد مهندس‌ها و پزشک‌ها مساوی نباشد)

$=1-P$ (تعداد مهندس‌ها و پزشک‌ها مساوی باشد، یعنی از هر کدام دو نفر)

$$=1-\frac{\binom{4}{2}\times\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}}=1-\frac{6\times15}{\frac{10!}{4!6!}}=1-\frac{6}{2\times7}=\frac{4}{7}$$

۸۵- داریم $n(s)=\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{6}=35$. در صورتی مثلث تشکیل می‌شود که دو نقطه از بالا و یک نقطه از پایین یا یک نقطه از بالا و دو نقطه از پایین انتخاب کنیم، پس:

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{18+12}{35}=\frac{30}{35}=\frac{6}{7}$$

۸۶- ماه تولد هر فرد ۱۲ حالت دارد، پس $n(S)=12\times12\times12$.

نفر اول و دوم و سوم باید در ماه تیر متولد شده باشند، همگی یک حالت داشته و لذا: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{12^3}$

۸۷- نفر اول و دوم و سوم همگی در ماه فروردین یا همگی در اردیبهشت یا ... یا همگی در ماه اسفند می‌توانند متولد شده باشند، یعنی ۱۲ حالت، برای این‌که هر سه در یک ماه متولد شده باشند، وجود دارد.

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{12}{12^3}=\frac{1}{12^2}=\frac{1}{144}$$

۸۸- نفر اول در هر یک از ۱۲ ماه ممکن است متولد شده باشد اما نفر دوم در ماه نفر اول نباید متولد شده باشد، پس ۱۱ حالت مطلوب برای آن باقی می‌ماند. به همین ترتیب برای ماه تولد نفر سوم، ۱۰ حالت وجود دارد.

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{12\times11\times10}{12\times12\times12}=\frac{55}{72}$$

۸۹- ابتدا باید ۲ نفر از ۳ نفر انتخاب کنیم. این کار به $\binom{3}{2}=3$ روش می‌تواند انجام شود. این دو نفر متولدین تیرماه هستند. نفر باقی‌مانده می‌تواند در هر یک از ماه‌های دیگر متولد شود، یعنی ۱۱ حالت برای آن وجود دارد، پس:

$$P(D)=\frac{\binom{3}{2}\times11}{12\times12\times12}=\frac{33}{12^3}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۹۰- ابتدا باید یک نفر از ۳ نفر انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۳}{۱}$ روش می‌تواند انجام شود. حالا این فرد ممکن است در ماه فروردین، اردیبهشت یا خرداد متولد شده باشد. برای هر کدام از دو نفر باقی‌مانده نیز ۹ ماه دیگر باقی می‌ماند، پس:

$$P(E)=\frac{\binom{۳}{۱}\times ۳\times ۹\times ۹}{۱۲\times ۱۲\times ۱۲}=\frac{۳\times ۹}{۴\times ۴\times ۴}=\frac{۲۷}{۶۴}$$

۹۱- $S=\frac{۶}{}\times\frac{۵}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}$

حرف l را کنار می‌گذاریم:

$$A:\frac{۵}{}\times\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}\Rightarrow P(A)=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲}{۶\times ۵\times ۴\times ۳}=\frac{۱}{۳}$$

۹۲- ابتدا یکی از چهار خانه را انتخاب کرده و در آن حرف f را قرار می‌دهیم. این کار به $\binom{۴}{۱}=۴$ طریق می‌تواند صورت گیرد. سه خانهٔ باقی‌مانده نیز، $۳\times ۴\times ۵$ حالت دارند، پس احتمال خواسته‌شده می‌شود:

$$P(B)=\frac{۴\times ۵\times ۴\times ۳}{۶\times ۵\times ۴\times ۳}=\frac{۲}{۳}$$

۹۳- سه حرف f,o,r را در یک دسته قرار می‌دهیم (*به هم می‌بندیم!*). با قراردادن $\boxed{f,o,r}$ سه خانه پر می‌گردد که خود !۳ جایگشت دارند. برای تنها خانهٔ باقی‌مانده نیز ۳ حالت {l,w,e} وجود دارد. مثلاً فرض کنید w انتخاب شده باشد. حالا؛ !۲ طریق دو شیء $\boxed{f,o,r}$ و w نیز می‌توانند جابه‌جا شوند، پس:

$$P(C)=\frac{۳!\times ۳\times ۲!}{۶\times ۵\times ۴\times ۳}=\frac{۱}{۱۰}$$

۹۴- تفاوت این سؤال با پاسخ ۹۳ در این است که دیگر حروف f,o,r نمی‌توانند بین خودشان جایگشت داشته باشند، چون می‌خواهیم عبارت low (بدون جابه‌جایی) دیده شود. پس:

$$P(D)=\frac{۳\times ۲!}{۶\times ۵\times ۴\times ۳}=\frac{۱}{۶۰}$$

۹۵- به ازای انتخاب هر ۳ نقطه، مثلث تشکیل می‌شود مگر آن‌که سه نقطه از یک ضلع انتخاب شوند. با استفاده از احتمال متمم داریم:

$$P(\text{احتمال تشکیل مثلث})=$$

$$۱-P(\text{عدم تشکیل مثلث})=۱-\frac{\left[\underbrace{\binom{۳}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ نقطه از AB}}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۳}+\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ نقطه از DC}}\right]}{\binom{۱۱}{۳}}$$

$$=۱-\frac{۱+۴+۴+۴}{۱۶۵}=\frac{۱۵۲}{۱۶۵}$$

۹۶-

الف) $\overbrace{P(A\cup B)}^{\text{احتمال حداقل یکی}}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{۲۳}{۱۰۰}+\frac{۱۵}{۱۰۰}-\frac{۷}{۱۰۰}=\frac{۳۱}{۱۰۰}$$

ب) $\overbrace{P(A-B)}^{\text{احتمال فقط ناراحتی قلبی}}=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۲۳}{۱۰۰}-\frac{۷}{۱۰۰}=\frac{۱۶}{۱۰۰}$

پ) $\underbrace{P(B')}_{\text{عدم ناراحتی کلیه}}=۱-P(B)=۱-\frac{۱۵}{۱۰۰}=\frac{۸۵}{۱۰۰}$

۹۷- $A=\{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$

$C=\underbrace{\{(۱,۳),(۲,۳),\dots,(۶,۳),(۱,۶),(۲,۶),\dots,(۶,۶)\}}_{\text{(تاس دوم را قرمز گرفتیم که می‌تواند ۳ یا ۶ باشد)}}$

$\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۳۶}=\frac{۱}{۳}$

$A\cap B=$ هر دو تاس زوج و مجموع دو تاس ۱۰ باشد.

$=\{(۴,۶),(۶,۴)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$

۹۸-

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۸}$$

$$=\frac{۹+۳-۲}{۳۶}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۹۹- توجه دارید که $C\cap B=\{(۴,۶)\}$ است، پس $P(C\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$ می‌شود:

$$\underbrace{P(C-B)}_{\text{احتمال رخداد C و عدم رخداد B}}=P(C)-P(C\cap B)=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳۶}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

۱۰۰- A,B ناسازگار $\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cap B)=۰$

$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)=P(A)+(۱-P(B'))$

$=۰/۳+(۱-۰/۷)=۰/۶$

۱۰۱- $P(A)=۰/۶\ ,\ ۲P(B')=۰/۶\Rightarrow P(B')=۰/۳$

$\Rightarrow P(B)=۱-P(B')=۱-۰/۳=۰/۷$

$\underbrace{P(A\cup B)}_{\text{رخداد A یا B}}=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=۰/۶+۰/۷-۰/۵۵=۰/۷۵$

۱۰۲- جامعه ـ نمونه

۱۰۳- نمونه ـ جامعه

۱۰۴- بزرگ‌تر

۱۰۵- متغیر

۱۰۶- کمّی ـ کیفی

۱۰۷- بزرگ‌تر

۱۰۸- جامعه ↔ خانواده‌های ایرانی نمونه ↔ ۲۰۰۰ خانوار

متغیر ↔ مقدار مصرف شیر در ماه مقدار متغیر ↔ ۵ لیتر

۱۰۹- بانوان خانه‌دار

۱۱۰- زمین‌های استان سمنان

۱۱۱- شامپوهای تولیدی کارخانهٔ A

۱۱۲- افراد ساختمان

۱۱۳- افرادی که حرف اول نام آن‌ها الف است.

۱۱۴- افرادی که شمارهٔ کارت ملی آن‌ها به ۱ ختم می‌شود.

۱۱۵- افراد بالای ۶۵ کیلوگرم

۱۱۶- کمّی پیوسته

۱۱۷- کمّی پیوسته

۱۱۸- کمّی پیوسته

۱۱۹- کمّی گسسته

۱۲۰- کیفی اسمی

۱۲۱- کمّی گسسته

۱۲۲- کمّی گسسته

۱۲۳- کیفی اسمی

۱۲۴- کمّی پیوسته

۱۲۵- کیفی اسمی

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۲۶- کمّی پیوسته
۱۲۷- کمّی پیوسته
۱۲۸- کمّی گسسته
۱۲۹- کیفی ترتیبی
۱۳۰- کمّی پیوسته
۱۳۱- کیفی ترتیبی
۱۳۲- کیفی اسمی
۱۳۳- کمّی پیوسته
۱۳۴- کمّی پیوسته
۱۳۵- کمّی گسسته
۱۳۶- کیفی اسمی
۱۳۷- کمّی گسسته
۱۳۸- کمّی گسسته
۱۳۹- کمّی پیوسته
۱۴۰- کیفی ترتیبی
۱۴۱- کیفی ترتیبی
۱۴۲- کمّی پیوسته
۱۴۳- کیفی ترتیبی
۱۴۴- کیفی اسمی
۱۴۵- کیفی ترتیبی
۱۴۶- کمّی پیوسته
۱۴۷- کمّی پیوسته
۱۴۸- الف، پ و ت همگی کیفی اسمی هستند در حالی که ب، کیفی ترتیبی است.

۱۴۹-

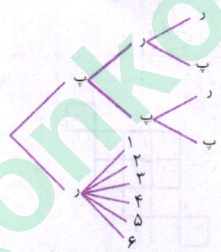
جامعه	نمونه	متغیر	نوع متغیر
۳۵ دانش‌آموز	افراد با شماره‌های کلاسی ۳۳,...,۹,۶,۳	مدت‌زمان مشاهدهٔ تلویزیون در روز	کمّی پیوسته

۱۵۰- الف) ترتیبی ب) اسمی
پ) پیوسته ت) گسسته

پاسخ آزمون جمع‌بندی فصل هفتم

۱- الف) اندازهٔ جامعه یا حجم جامعه ب) ۱
پ) کیفی ت) زیرمجموعه

۲- الف) ۱۰



ب) $A=\{(پ,پ),(پ,ر)\}$

پ) $B=\{(پ,ر),(پ,پ),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(ر,۲),(ر,۴),(ر,۴)\}$

۳- $n(S)=۶\times۶=۳۶$

$A=\{\underbrace{(۱,۳),(۳,۱),(۲,۲)}_{\text{جمع ۴}},\underbrace{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)}_{\text{جمع ۸}},\underbrace{(۶,۶)}_{\text{جمع ۱۲}}\}$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$

۴- حالت‌های مطلوب

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{۱}{M}\times\frac{۴}{}\times\frac{۱}{F}\times\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{}=۲۴\\ \frac{۴}{}\times\frac{۱}{M}\times\frac{۳}{}\times\frac{۱}{F}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{}=۲۴\\ \frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۱}{M}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{F}\times\frac{۱}{}=۲۴\\ \frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۲}{}\times\frac{۱}{M}\times\frac{۱}{}\times\frac{۱}{F}=۲۴\end{array}\right\}$$

جابه‌جایی پدر و مادر بین خودشان

$\xrightarrow{\oplus} ۹۶\times۲=۱۹۲ \Rightarrow P(A)=\frac{۱۹۲}{۶!}$

۵-

الف) $P(A)=\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴+۱۰}{۸۴}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۷}{۴۲}=\frac{۱}{۶}$

ب) $P(B)=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۳۰+۴۰}{۸۴}=\frac{۷۰}{۸۴}=\frac{۳۵}{۴۲}=\frac{۵}{۶}$

۶- $\left.\begin{array}{l}A=\text{قبولی علی}\\ B=\text{قبولی رضا}\end{array}\right\}\Rightarrow P(A')=۰/۳$

$\Rightarrow P(A)=۱-P(A')=۰/۷$

$P(A\cap B)=۰/۵$

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۷-۰/۵=۰/۲$

۷- $P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)$

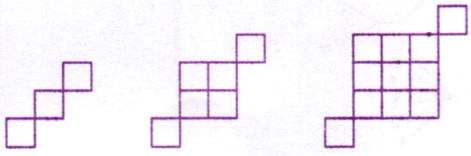
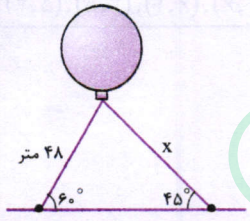
$=۱-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$

$=۱-[\frac{۵۷}{۱۰۰}+\frac{۶۵}{۱۰۰}-\frac{۴۲}{۱۰۰}]=۰/۲$

۸- الف) کمّی گسسته ب) کیفی اسمی
پ) کیفی ترتیبی ت) کمّی گسسته

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نمونه امتحان نیم‌سال اول	رشتهٔ ریاضی و تجربی	ریاضی ۱ (دهم)
امتحان شمارهٔ ۱	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com

ردیف		نمره
۱	**جاهای خالی را تکمیل کنید.** الف) اگر مجموعهٔ A نامتناهی و مجموعهٔ B متناهی باشد، $A\cap B$ مجموعه‌ای ..... است. ب) ریشه‌های دوم عدد $\frac{1}{4}$ برابر ..... هستند. پ) کسر $\frac{x^2-1}{x^2-9}$ به ازای اعداد ..... تعریف‌نشده است. ت) اگر $\sin\theta\tan\theta<0$ باشد، θ در ربع‌های ..... یا ..... خواهد بود. ث) اگر در معادلهٔ $y=ax^2+bx+c$ ، $a>0$ باشد، رأس سهمی ..... نقطهٔ سهمی است. ج) اگر $0<a<1$ باشد، $\sqrt[3]{a}$ ..... $\sqrt{a}$ چ) ..... $=(\mathbb{W}-\mathbb{N})'$ (مجموعهٔ مرجع را $\mathbb{Z}$ در نظر بگیرید.)	۲
۲	اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid \lvert x\rvert\geq 2\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x+1<4\}$ باشد، الف) مجموعه‌های $A\cup B$ ، $A\cap B$ و $A-B$ را با بازه‌ها نمایش دهید. ب) اگر مجموعهٔ مرجع برابر $\mathbb{R}$ باشد، B' را به دست آورید.	۱/۵
۳	جملهٔ عمومی الگوی زیر را به دست آورید. آیا این الگو خطی است؟  (۱) (۲) (۳)	۰/۵
۴	الف) در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ دهم برابر ۳۴ و جمله هفدهم برابر ۱۰۴ است. جملهٔ صدم این دنباله را به دست آورید. ب) در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ چهارم و جمله هفتم به ترتیب برابر ۴۰ و ۳۲۰ هستند. جملهٔ عمومی این دنباله را به دست آورید.	۱/۵
۵	یک بالن تبلیغاتی با دو طناب به صورت مقابل، به زمین بسته شده است. x را به دست آورید.  	۱
۶	الف) اگر نقطهٔ $P(\frac{-1}{\sqrt{7}},\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{7}})$ روی دایرهٔ مثلثاتی باشد، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید. ب) اگر $\sin\theta=\frac{1}{5}$ و θ در ربع دوم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید.	۱/۵
۷	درستی اتحاد مثلثاتی مقابل را نشان دهید. $1-\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\sin\theta$	۱
۸	الف) عدد $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}$ را با توان‌های گویا نوشته و حاصل آن را با یک رادیکال نمایش دهید. ب) از معادلهٔ $\sqrt[x]{3\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ ، x را به دست آورید.	۱/۵
۹	الف) حاصل عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید. ۱) $(\frac{x}{2}+2y)^3=$ ۲) $(2a-3)(2a+3)(16a^4+36a^2+81)=$ ب) عبارت $3x^2+11x-4$ را تجزیه کنید.	۱/۵

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۰	ابتدا مخرج کسر را گویا و سپس حاصل را به صورت یک کسر بنویسید. $A=\frac{1}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}$	۱
۱۱	معادله‌های درجه‌دوم را با روش خواسته‌شده حل کنید. (الف) $x^2-3x+1=0$ (روش مربع کامل) (ب) $3x^2-7x+4=0$ (روش کلی یا Δ)	۱/۵
۱۲	الف) مختصات رأس سهمی $y=x^2-4x+3$ را به دست آورید. ب) سهمی را رسم کنید.	۱
۱۳	عبارت مقابل را تعیین علامت کنید. $A=\frac{(1+x)^5(x^2-x+3)}{(x^2-6x+5)(x-3)^4}$	۱/۵
۱۴	نامعادلهٔ مقابل را حل کرده و جواب را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید. $\frac{x}{x-1}\le\frac{x+1}{x-2}$	۱
۱۵	حدود m را چنان تعیین کنید که عبارت $A=x^2-3mx+1$ همواره مثبت باشد.	۱
۱۶	نامعادلهٔ $\left\|\frac{x+1}{2}+3\right|<3$ را حل کنید.	۱
	جمع نمرات	۲۰

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ‌نامهٔ تشریحی امتحان شمارهٔ (۱)

۱- الف) $A\cap B\subseteq B$ است و چون B متناهی است، پس $A\cap B$ مجموعه‌ای متناهی است.

ب) $\pm\frac{1}{2}$

پ) $x^2-9=0$، پس $x^2=9$ و لذا $x=\pm 3$. پس کسر به ازای اعداد $x=\pm 3$ تعریف‌نشده است.

ت) $\tan\theta$ و $\sin\theta$ غیرهم‌علامت هستند، پس θ در ربع‌های دوم یا سوم خواهد بود.

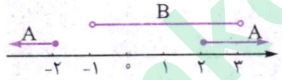
ث) پایین‌ترین

ج) $\sqrt{a}<\sqrt[3]{a}$

چ) $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0\}\Rightarrow\{0\}'=\mathbb{Z}-\{0\}=$
$\{\dots,-3,-2,-1,1,2,3,\dots\}$

۲- الف) $A:|x|\geq 2\Rightarrow x\geq 2$ یا $x\leq -2$

$B:0<x+1<4\xrightarrow{-1}-1<x<3$



$A\cup B=(-\infty,-2]\cup(-1,+\infty)$

$A\cap B=[2,3)$ و $A-B=(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$

ب) $B'=\mathbb{R}-B=\mathbb{R}-(-1,3)=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

۳- $a_1=2+1,\ a_2=2+2^2,\ a\ =2+3^2,\dots\Rightarrow a_n=2+n^2$

چون جملهٔ عمومی نسبت به n از درجهٔ دوم است، پس خطی نیست.

۴- الف)
$$\begin{cases}t_{10}=34\Rightarrow a+9d=34\\ t_{17}=104\Rightarrow a+16d=104\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{کم}}7d=70\Rightarrow d=10\Rightarrow a=-56$

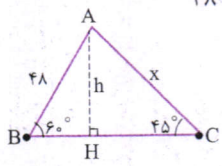
$\Rightarrow t_n=a+(n-1)d\Rightarrow t_{100}=-56+99(10)=934$

ب)
$$\begin{cases}t_4=40\Rightarrow ar^3=40\\ t_7=320\Rightarrow ar^6=320\end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{تقسیم}}\frac{ar^6}{ar^3}=\frac{320}{40}\Rightarrow r^3=8$

$\Rightarrow r=2\Rightarrow a=5\Rightarrow t_n=ar^{n-1}=5\times 2^{n-1}$

۵- $\overset{\Delta}{ABH}:\sin 60^\circ=\frac{h}{48}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{h}{48}\Rightarrow h=\frac{48\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$



$\overset{\Delta}{ACH}:\sin 45^\circ=\frac{h}{x}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{24\sqrt{3}}{x}\Rightarrow x=\frac{48\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{48\sqrt{6}}{2}=24\sqrt{6}$

۶- الف) $\sin\theta=y_p=\frac{-\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$, $\cos\theta=x_P=\frac{-1}{\sqrt{7}}$

$\tan\theta=\frac{y_P}{x_P}=\frac{-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}}{\frac{-1}{\sqrt{7}}}=\sqrt{6}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

ب) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\Rightarrow\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

$\Rightarrow\cos^2\theta=1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}\Rightarrow\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{24}}{5}$

چون θ در ربع دوم است، پس $\cos\theta$ منفی بوده و لذا:

$\cos\theta=\frac{-\sqrt{24}}{5}$.

$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=-\sqrt{24}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{5}}{-\frac{\sqrt{24}}{5}}=-\frac{1}{\sqrt{24}}$

۷-
$$1-\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta-\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\frac{1+\sin\theta-(1-\sin^2\theta)}{1+\sin\theta}$$
$$=\frac{\overbrace{\sin\theta+\sin^2\theta}^{\sin\theta(1+\sin\theta)}}{1+\sin\theta}=\sin\theta$$

۸- الف) $\sqrt[4]{5\sqrt[3]{5}}=\sqrt[4]{5\times 5^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[4]{5^{\frac{4}{3}}}=(5^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$

ب) $\sqrt[x]{3\sqrt{3}}=3^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\sqrt[x]{3\times 3^{\frac{1}{2}}}=3^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\sqrt[x]{3^{\frac{3}{2}}}=3^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{3}{2x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=3$

۹- الف)

۱) $(\frac{x}{2}+2y)^3=(\frac{x}{2})^3+3(\frac{x}{2})^2(2y)+3(\frac{x}{2})(2y)^2+(2y)^3$

$=\frac{x^3}{8}+\frac{3}{2}x^2y+6xy^2+8y^3$

۲) $\underbrace{(2a-3)(2a+3)}_{4a^2-9}(16a^4+36a^2+81)=$

$(4a^2)^3-9^3=64a^6-729$

ب) $3x^2+11x-4\xrightarrow[\text{و ضرب آن‌ها ۱۲- باشد.}]{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها ۱۱}}+12,-1$

$\Rightarrow 3x^2+11x-4=3x^2+12x-x-4$

$=3x(x+4)-(x+4)=(x+4)(3x-1)$

۱۰-
$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1}\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow A=\frac{\sqrt{x}+1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۱- الف) $x^2-3x+1=0 \Rightarrow x^2-3x=-1$

$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم که می‌شود } \frac{9}{4}]{\text{ضریب x را نصف و به توان ۲}} x^2-3x+\frac{9}{4}=-1+\frac{9}{4}$

$$\Rightarrow (x-\frac{3}{2})^2=\frac{5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \\ x-\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

ب) $a=3,\ b=-7,\ c=4 \Rightarrow \Delta=b^2-(4ac)$

$=49-48=1>0 \Rightarrow$ دو ریشه دارد.

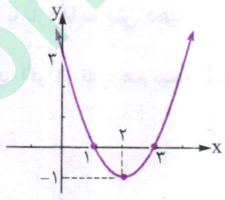
$$\begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7+1}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{7-1}{6}=1 \end{cases}$$

۱۲-

طول راس $=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2 \Rightarrow y=2^2-4(2)+3=-1$

$\Rightarrow$ راس $(2,-1)$

x	1	2	3
y	0	-1	0



۱۳- $(1+x)^5=0 \Rightarrow 1+x=0 \Rightarrow x=-1$

$x^2-x+3=0 \Rightarrow \Delta=1-12=-11<0$ ریشه ندارد

$\Rightarrow$ همواره موافق علامت a

$x^2-6x+5=0 \Rightarrow (x-1)(x-5)=0 \Rightarrow x=1,5$

$(x-3)^4=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

x		-1		1		3		5	
$(1+x)^5$	-	0	+		+		+		+
x^2-x+3	+		+		+		+		+
x^2-6x+5	+		+	0	-		-	0	+
$(x-3)^4$	+		+		+	0	+		+
A	-	0	+	ت.ن	-	ت.ن	-	ت.ن	+

۱۴- $\frac{x}{x-1} \le \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow 0 \le \frac{x+1}{x-2}-\frac{x}{x-1}=$

$$\frac{(x+1)(x-1)-x(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\frac{2x-1}{(x-2)(x-1)}$$

$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

x		$\frac{1}{2}$		1		2	
$2x-1$	-	0	+ ج		+		+ ج
$x-2$	-		-		-	0	+
$x-1$	-		-	0	+		+
کسر	-	0	+	ت.ن	-	ت.ن	+

جواب $=[\frac{1}{2},1)\cup(2,+\infty)$

۱۵-

$$\begin{cases} \Delta<0 \Rightarrow 9m^2-4<0 \Rightarrow 9m^2<4 \xrightarrow{\sqrt{}} |3m|<2 \\ \Rightarrow -2<3m<2 \Rightarrow -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3} \\ a>0 \Rightarrow 1>0 \text{ همواره برقرار} \end{cases}$$

بنابراین جواب $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$ خواهد بود.

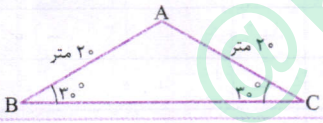
۱۶-

$|\frac{x+1}{2}+3|<3 \Rightarrow -3<\frac{x+1}{2}+3<3 \xrightarrow{-3}$

$-6<\frac{x+1}{2}<0 \xrightarrow{\times 2} -12<x+1<0 \xrightarrow{-1} -13<x<-1$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نمونه امتحان نیم‌سال اول	رشتهٔ ریاضی و تجربی	ریاضی ۱ (دهم)
امتحان شمارهٔ ۲	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید. (درست / نادرست)	۲
	الف) $(۱,۴) = [۲,۳]$	
	ب) دنباله‌ای وجود ندارد که هم حسابی و هم هندسی باشد.	
	پ) اگر $A \subseteq B$ باشد، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.	
	ت) مختصات رأس سهمی $y = x^۲ + ۲x - ۱$ به صورت $(۱,۲)$ است.	
	ث) اگر $۰ < \alpha < ۴۵^\circ$ باشد، $\tan\alpha < \cot\alpha$ خواهد بود.	
	ج) همواره $\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$	
	چ) $\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲} + \sqrt[۳]{(۱-\sqrt{۳})^۳} = ۰$	
۲	اگر $A = (۲,+\infty)$ و $B = [۰,۴]$ و $C = (-۱,۳]$ باشد، مجموعهٔ $(A \cup B) - (B \cap C)$ را با بازه‌ها نمایش دهید.	۱
۳	از بین ۴۰ کارمند یک شرکت، ۲۶ نفر بیمهٔ تأمین اجتماعی و ۲۰ نفر بیمهٔ حوادث شده‌اند. اگر ۱۱ نفر، هم بیمهٔ تأمین اجتماعی و هم بیمهٔ حوادث شده باشند:	۱
	الف) چند نفر نه بیمهٔ تأمین اجتماعی و نه بیمهٔ حوادث شده‌اند؟	
	ب) چند نفر فقط بیمهٔ تأمین اجتماعی شده‌اند؟	
	پ) چند نفر تحت پوشش فقط یکی از بیمه‌ها شده‌اند؟	
۴	جملهٔ عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{۵n+۴}{۲n-۱}$ است.	۰/۵
	الف) جملهٔ سوم دنباله را به دست آورید. ب) جملهٔ چندم دنباله برابر ۳ است؟	
۵	در یک دنبالهٔ حسابی، $t_۷ = ۵$ و $t_{۱۰}^۲ - t_۴^۲ = ۱۲۰$ است. جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.	۱
۶	مقدار x را طوری تعیین کنید که اعداد $x+۴$، $۲x+۵$ و $۴x-۳$:	۱
	الف) تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند. ب) تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند.	
۷	زمینی به صورت مقابل است. مساحت و محیط این زمین را به دست آورید.	۱
		
۸	معادلهٔ خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ ۶۰° ساخته و محور yها را در نقطه‌ای به عرض -۱ قطع کند.	۱
۹	اگر نقطهٔ $P(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲})$ را به مبدأ دایرهٔ مثلثاتی وصل کنیم، زاویهٔ ۴۵° به دست می‌آید. با استفاده از دایرهٔ مثلثاتی، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۲۵° را به دست آورید.	۱
۱۰	اتحاد مقابل را ثابت کنید. $\frac{۱}{\cos\theta} - \tan\theta = \frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}$	۱
۱۱	الف) برای هر عدد مثبت a، با استفاده از توان‌های کسری نشان دهید $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.	۱/۵
	ب) اگر $\sqrt[۱۰]{x^۹} = \frac{۸^{\frac{۱}{۳}} \times \sqrt{۳۲}}{\sqrt[۵]{۱۶}}$ باشد، x را به دست آورید. $(x > ۰)$	
	پ) حاصل $\sqrt[۳]{۲} \times \sqrt[۶]{۳}$ را با یک رادیکال نمایش دهید.	

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۲	عبارت‌های مقابل را تجزیه کنید.	۱
	الف) $a^5+a^3-a^4-a^2$ ب) $2x^2+3x+1$	
۱۳	مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.	۲
	الف) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{27}}$ ب) $\frac{1}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}$ پ) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$	
۱۴	نامعادلهٔ مقابل را حل کنید.	۱/۵
	$\frac{(3x^2-7x+2)(1-x^2)}{\lvert x+2\rvert(4+x^2)}\le 0$	
۱۵	معادلهٔ سهمی را مشخص کنید که محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده و از نقطه‌های (۱,-۳) و (-۱,۲) نیز عبور کند.	۱
۱۶	حدود m را به گونه‌ای مشخص کنید که سهمی $y=mx^2+(m-2)x+\frac{1}{4}m$ بالای محور x ها باشد.	۱
۱۷	نامعادله‌های مقابل را حل کنید و جواب را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید.	۱/۵
	الف) $\frac{\lvert 2x+1\rvert}{3}<\frac{1}{2}$ ب) $\lvert x-2\rvert\ge\frac{1}{3}$	
	جمع نمرات	۲۰

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ‌نامهٔ تشریحی امتحان شمارهٔ (۲)

۱- الف) نادرست است. مثلاً $۳/۵ \in (۱,۴)$ ولی $۳/۵ \in [۲,۳]$

ب) نادرست است. مثلاً دنبالهٔ ...,۲,۲,۲، هم حسابی (با قدرنسبت صفر) و هم هندسی (با قدرنسبت یک است.)

پ) درست است.

ت) نادرست است. طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{۲a} = -۱$ است.

ث) درست است. اگر $۰ < \alpha < ۴۵^\circ$ باشد، $۰ < y_p < x_p$ است، پس $\tan\alpha = \frac{y_p}{x_p} < ۱ < \frac{x_p}{y_p} = \cot\alpha$ خواهد بود.

ج) نادرست است. اگر n زوج باشد، رابطه درست خواهد بود ولی اگر n فرد باشد $\sqrt[n]{a^n} = a$.

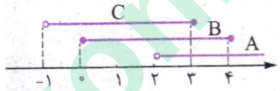
چ) درست است.

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^۲} + \sqrt[۳]{(۱-\sqrt{۳})^۳} = |\underbrace{۱-\sqrt{۳}}_{-}| + ۱ - \sqrt{۳}$$

$$= \sqrt{۳} - ۱ + ۱ - \sqrt{۳} = ۰$$

۲- $A \cup B = [۰,+\infty)$ $B \cap C = [۰,۳]$

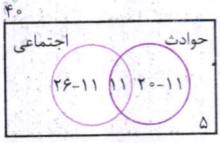
$$(A \cup B) - (B \cap C) = [۰,+\infty) - [۰,۳] = (۳,+\infty)$$



۳- افراد بیمهٔ تأمین اجتماعی و حوادث را به ترتیب با T و H نمایش می‌دهیم:

$$n(T \cup H) = n(T) + n(H) - n(T \cap H) = ۲۶ + ۲۰ - ۱۱ = ۳۵$$

۳۵ نفر یا بیمهٔ تأمین اجتماعی یا بیمهٔ حوادث هستند (حداقل یک بیمه دارند).



الف) $n(T' \cap H') = n(U) - n(T \cup H) = ۴۰ - ۳۵ = ۵$

ب)

$$n(T \cap H') = n(T - H) = n(T) - n(T \cap H) = ۲۶ - ۱۱ = ۱۵$$

۱۵ نفر تحت پوشش فقط بیمهٔ تأمین اجتماعی

پ) $n(T' \cap H) = n(H - T) = ۲۰ - ۱۱ = ۹$

$$\Rightarrow n(T \cap H') + n(T' \cap H) = ۱۵ + ۹ = ۲۴$$

۹ نفر تحت پوشش فقط حوادث

۲۴ نفر تحت پوشش فقط یکی از بیمه‌ها هستند.

۴- الف) $a_۳ = \frac{۵(۳)+۴}{۲(۳)-۱} = \frac{۱۹}{۵}$

ب) $\frac{۵n+۴}{۲n-۱} = ۳ \Rightarrow ۵n + ۴ = ۶n - ۳ \Rightarrow n = ۷$ جملهٔ هفتم

۵-

$$\begin{cases} t_۷ = ۵ \Rightarrow a + ۶d = ۵ \\ t_{۱۰}^۲ - t_۴^۲ = ۱۲۰ \Rightarrow (a+۹d)^۲ - (a+۳d)^۲ = ۱۲۰ \\ \Rightarrow ۱۲ad + ۷۲d^۲ = ۱۲۰ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div ۱۲} ad + ۶d^۲ = ۱۰ \Rightarrow d(\underbrace{a+۶d}_{۵}) = ۱۰ \Rightarrow d = ۲$$

$$\Rightarrow a = -۷ \Rightarrow t_n = a + (n-۱)d = -۷ + (n-۱)(۲) = ۲n - ۹$$

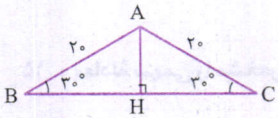
۶-

الف) $\frac{۴x - ۳ + x + ۴}{۲} = ۲x + ۵ \Rightarrow ۵x + ۱ = ۴x + ۱۰ \Rightarrow x = ۹$

ب) $(۴x-۳)(x+۴) = (۲x+۵)^۲ \Rightarrow ۴x^۲ + ۱۳x - ۱۲$

$$= ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۵ \Rightarrow -۷x = ۳۷ \Rightarrow x = -\frac{۳۷}{۷}$$

۷-



$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AH}{۲۰} \Rightarrow AH = ۱۰$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{BH}{۲۰} \Rightarrow BH = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ACH}: \cos ۳۰^\circ = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{HC}{۲۰} \Rightarrow HC = ۱۰\sqrt{۳}$$

$$\text{محیط مثلث } ABC = AB + AC + BC = ۲۰ + ۲۰ + ۱۰\sqrt{۳} + ۱۰\sqrt{۳} = ۴۰ + ۲۰\sqrt{۳}$$

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{AH \times BC}{۲} = \frac{۱۰ \times ۲۰\sqrt{۳}}{۲} = ۱۰۰\sqrt{۳}$$

۸-

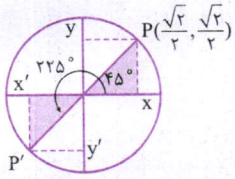
$$m = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳} \quad , \quad \text{عرض از مبدأ} = -۱ \Rightarrow y = \sqrt{۳}x - ۱$$

۹- با توجه به شکل، دو مثلث همنهشت‌اند، پس داریم:

$$P'(x', y') = P'(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, -\frac{\sqrt{۲}}{۲})$$

$$\sin ۴۵^\circ = y_p = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \ , \ \cos ۴۵^\circ = x_p = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\sin ۲۲۵^\circ = y'_{p'} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \ , \ \cos ۲۲۵^\circ = x'_{p'} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$



۱۰-

$$\frac{۱}{\cos\theta} - \tan\theta = \frac{۱}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{۱-\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{۱+\sin\theta}{۱+\sin\theta} = \frac{۱-\sin^۲\theta}{\cos\theta(۱+\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^۲\theta}{\cos\theta(۱+\sin\theta)} = \frac{\cos\theta}{۱+\sin\theta}$$

۱۱- الف) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{۱}{n}})^{\frac{۱}{m}} = a^{\frac{۱}{nm}} = \sqrt[nm]{a}$

ب)

$$\sqrt[۱۰]{x^۹} = \frac{۸^{\frac{۱}{۳}} \times \sqrt{۳۲}}{\sqrt[۵]{۱۶}} \Rightarrow x^{\frac{۹}{۱۰}} = \frac{(۲^۳)^{\frac{۱}{۳}} \times ۲^{\frac{۵}{۲}}}{۲^{\frac{۴}{۵}}} = ۲^{۱+\frac{۵}{۲}-\frac{۴}{۵}} = ۲^{\frac{۲۷}{۱۰}}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } ۱۰} (x^{\frac{۹}{۱۰}})^{۱۰} = (۲^{\frac{۲۷}{۱۰}})^{۱۰} \Rightarrow x^۹ = ۲^{۲۷}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } \frac{۱}{۹}} x = ۲^۳ = ۸$$

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پ) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{2^2}\times\sqrt[6]{3}=\sqrt[6]{12}$

۱۲- الف) $\underline{a^5}+\underline{a^3}-\underline{\underline{a^4}}-\underline{\underline{a^2}}=a^3(a^2+1)-a^2(a^2+1)$

$=(a^2+1)(a^3-a^2)=(a^2+1)(a^2)(a-1)$

ب) $2x^2+3x+1 \xrightarrow[\text{برابر ۳ و ضرب آن‌ها ۲ باشد.}]{\text{دو عدد پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها}} 1,2$

پس $3x$ را به صورت $2x+x$ می‌نویسیم.

$2x^2+\underline{3x}+1=\underline{2x^2}+\underline{2x}+\underline{\underline{x}}+\underline{\underline{1}}=2x(x+1)+(x+1)$

$=(x+1)(2x+1)$

۱۳- الف) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{27}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{3^3}}\times\frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{(\sqrt{2})(\sqrt[5]{9})}{3}$

ب) $\frac{1}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}\times\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}=\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{4x-9y}$

پ) $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{x(\sqrt[3]{x}-1)}{x-1}$

۱۴- $3x^2-7x+2=0 \xrightarrow{\Delta=25} x_{1,2}=\frac{7\pm5}{6}=2,\frac{1}{3}$

$1-x^2=0 \Rightarrow 1=x^2 \Rightarrow x=\pm1$

$|x+2|=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$4+x^2=0 \Rightarrow x^2=-4$ ریشه ندارد

$\Rightarrow$ ضریب x^2 مثبت است، پس عبارت همواره مثبت است.

x		-2		-1		$\frac{1}{3}$		1		2	
$3x^2-7x+2$	+		+		+	0	−		−	0	+
$1-x^2$	−		−	0	+		+	0	−		−
$\lvert x+2\rvert$	+	0	+		+		+		+		+
$4+x^2$	+		+		+		+		+		+
کسر	−	∄	−	0	+	0	−	0	+	0	−

ت. ن

جواب $=(-\infty,-2)\cup(-2,-1]\cup[\frac{1}{3},1]\cup[2,+\infty)$

۱۵- معادلهٔ سهمی را به صورت $y=ax^2+bx+c$ در نظر می‌گیریم.

جای‌گذاری $(0,-1) \Rightarrow -1=c$

جای‌گذاری $(1,-3) \Rightarrow -3=a+b+c$

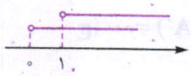
$\xrightarrow{c=-1} a+b=-2$

جای‌گذاری $(-1,2) \Rightarrow 2=a-b+c \xrightarrow{c=-1} \underline{a-b=3}$

$a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=-\frac{5}{2} \Rightarrow y=\frac{x^2}{2}-\frac{5x}{2}-1$

۱۶- شرط همواره مثبت بودن

$\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow (m-2)^2-4m(\frac{1}{4}m)<0 \\ \Rightarrow m^2-4m+4-m^2<0 \Rightarrow 1<m \quad (1) \\ a>0 \Rightarrow m>0 \quad (2)\end{cases}$



با اشتراک (۱) و (۲) جواب به صورت $1<m$ خواهد بود.

۱۷- الف)

$\frac{|2x+1|}{3}<\frac{1}{2} \xrightarrow{\times3} |2x+1|<\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}<2x+1<\frac{3}{2}$

$\xrightarrow{-1} -\frac{5}{2}<2x<\frac{1}{2} \xrightarrow{\div2} -\frac{5}{4}<x<\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ جواب $=(-\frac{5}{4},\frac{1}{4})$

بنابراین $(-\infty,\frac{5}{3}]\cup[\frac{7}{3},+\infty)$ جواب خواهد بود.

ب) $|x-2|\geq\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases}x-2\geq\frac{1}{3} \Rightarrow x\geq\frac{7}{3} \\ x-2\leq-\frac{1}{3} \Rightarrow x\leq\frac{5}{3}\end{cases}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

	نمونه امتحان نیم‌سال دوم	رشتهٔ ریاضی و تجربی	ریاضی ۱ (دهم)
ردیف	امتحان شمارهٔ ۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره

۱ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. (به ۴ قسمت، به دلخواه پاسخ دهید.) — ۱

الف) برد تابع $y=|x|-1$ بازهٔ ..... است.

ب) خط $x=2$ تابع ..... در حالی که خط $y=2$ تابع ..... .

پ) حاصل $10\times9\times8$ با نمادهای فاکتوریلی برابر است با ..... .

ت) تعداد مثلث‌هایی که با ۷ نقطه روی محیط دایره می‌توان ساخت برابر است با ..... .

ث) $\binom{10}{4}=\binom{9}{3}+\binom{9}{\dots}$

ج) $P(A\cup A')=\cdots$ در حالی که $P(A\cap A')=\cdots$

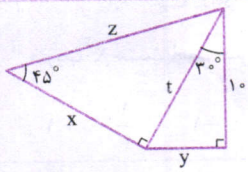
چ) مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات را ..... می‌نامیم.

ح) بررسی همهٔ اعضای جامعه را ..... می‌گوییم.

۲ a_n و b_n دنباله‌های زیر هستند. بیست و هفتمین جملهٔ دنبالهٔ a_n برابر k است. k و b_k را به دست آورید. — ۱/۵

$$\begin{cases} a_n=-5,-1,3,7,\dots \\ b_n=2\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\dots \end{cases}$$

۳ در شکل مقابل طول اضلاع t، z، y و x را به دست آورید. — ۱



۴ الف) با استفاده از توان‌های گویا، حاصل عبارت $(\sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}})^{48}$ را به دست آورید. — ۲

ب) عبارت x^6-1 را تجزیه کنید.

۵ مجموعه جواب نامعادلهٔ مقابل را به وسیلهٔ بازه‌ها نمایش دهید. — ۱

$$\frac{x^2-25}{x(x-3)^3}\geq 0$$

۶ حدود a را طوری تعیین کنید که عبارت $(a+2)x^2-2ax+(a-3)$ همواره منفی باشد. — ۱

۷ تابع f به صورت مقابل تعریف شده است: — ۱

$$f=\{\dots,(-2,4),(-1,2),(0,2),(1,-2),\dots\}$$

الف) دامنه و برد تابع f را مشخص کنید.

ب) نمایش جبری تابع f را بنویسید.

پ) حاصل $2f(-2)-\frac{f(1)}{2}$ را به دست آورید.

۸ f تابعی خطی است که $f(-2)=4$ و نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. — ۱

الف) نمایش جبری تابع f را به دست آورید.

ب) تابع را با دامنهٔ $[-1,2)$ رسم کنید.

۹ — ۱

الف) نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-1 \\ -1 & -1\leq x<1 \\ 2x+1 & x\geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید.

ب) حاصل $f(-3)+f(1)$ را به دست آورید.

پ) $f(f(-2))$ را به دست آورید.

۱۰ الف) نمودار تابع $f(x)=-|x+1|+2$ را با استفاده از انتقال تابع $y=|x|$ رسم کنید. (با رسم مراحل) — ۰/۵

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۱	الف) نمودار پیکانی تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن ۳ عضوی ولی برد آن تک‌عضوی باشد. ب) تابع همانی که دامنهٔ آن ۴ عضوی باشد، معرفی کنید.	۰/۵
۱۲	با ارقام ۰، ۱، ۵، ۷ و ۸ و بدون تکرار ارقام: الف) چند عدد سه‌رقمی فرد می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد سه‌رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت؟ پ) چند عدد سه‌رقمی که دهگان آن ۷ باشد، می‌توان نوشت؟	۱/۵
۱۳	با حروف کلمهٔ «مهربانی» و بدون تکرار حروف: الف) چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان ساخت؟ ب) چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان ساخت که در آن واژهٔ «مهر» به کار رفته باشد؟ پ) چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان ساخت که دو حرف «م» و «ن» کنار هم باشند؟	۱/۵
۱۴	اگر $P(n,4) = 12C(n-2,2)$ باشد، مقدار n را به دست آورید.	۱
۱۵	دو تاس سالم را با هم می‌اندازیم، مطلوب است: الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای ب) پیشامد A که در آن مجموع اعداد داده‌شده برابر ۸ باشد. پ) پیشامد B که در آن حاصل‌ضرب اعداد داده‌شده، مضرب ۱۵ باشد. ت) پیشامد آن‌که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.	۱
۱۶	از بین ۱۲ دانشجو می‌خواهیم ۴ نفر را به صورت تصادفی انتخاب کنیم. ۷ نفر از دانشجویان در رشتهٔ فیزیک و ۵ نفر در رشتهٔ ریاضی مشغول به تحصیل‌اند. احتمال آن‌که: الف) فقط یک دانشجوی رشتهٔ فیزیک انتخاب شود. ب) حداقل ۳ نفر از رشتهٔ ریاضی انتخاب شود.	۱/۵
۱۷	می‌خواهیم مدت‌زمانی که دانش‌آموزان مدرسهٔ حکمت، صرف مطالعهٔ کتاب‌های درسی می‌کنند را بررسی کنیم. به همین منظور، نفرات اول تا سوم لیست هر کلاس را انتخاب می‌کنیم. در این بررسی، جامعه، نمونه، متغیر مورد بررسی و نوع آن را مشخص کنید.	۱
۱۸	نوع هر متغیر را مشخص کنید. الف) میزان تحصیلات ب) گروه خونی افراد پ) تعداد طبقات ساختمان ت) زمان تأثیر یک دارو	۱
	جمع نمرات	۲۰

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ‌نامهٔ تشریحی امتحان شمارهٔ (۳)

۱- الف) $[-1,+\infty)$

ب) خط $x=2$ تابع نیست در حالی که خط $y=2$ تابع است.

پ) $\frac{10!}{7!}=\frac{7\times6\times\cdots\times1}{7\times6\times\cdots\times1}\times8\times9\times10$

ت) $\binom{7}{3}=35$

ث) طبق رابطهٔ $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}$ کافی است در جای خالی عدد ۴ قرار دهیم.

ج) $P(A\cup A')=P(S)=1$ در حالی که:

$P(A\cap A')=P(\varnothing)=0$

چ) آمار

ح) سرشماری

۲-

$a_n=a+(n-1)d \Rightarrow a_n=-5+(n-1)(4)=4n-9$

$\Rightarrow a_{27}=4(27)-9=99 \Rightarrow k=99$

$b_n=ar^{n-1}=2\sqrt{2}(\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow b_{99}=2\sqrt{2}(\frac{1}{2})^{98}$

$=\sqrt{2}(\frac{1}{2})^{97}=\frac{\sqrt{2}}{2^{97}}$

۳-

$\tan 30^\circ=\frac{y}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{y}{10} \Rightarrow y=\frac{10\sqrt{3}}{3}$

$\cos 30^\circ=\frac{10}{t} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{10}{t} \Rightarrow t=\frac{20}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{20\sqrt{3}}{3}$

$\tan 45^\circ=\frac{t}{x} \Rightarrow 1=\frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{x} \Rightarrow x=\frac{20\sqrt{3}}{3}$

$\sin 45^\circ=\frac{t}{z} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{z} \Rightarrow z=\frac{\frac{40\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{40\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{6}}{3}$

۴- الف) $(\sqrt[4]{2\sqrt{\sqrt[3]{3}}})^{48}=(2\sqrt{\sqrt[3]{3}}^{\frac{1}{4}})^{48}=(2\sqrt{\sqrt[3]{3}})^{12}$

$=2^{12}\times(\sqrt[3]{3})^6=2^{12}\times(3^{\frac{1}{3}})^6=2^{12}\times3^2$

ب) $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)$

$(x+1)(x^2-x+1)$

۵-

x		-5		0		3		5	
x^2-25	+	0	−		−		−	0	+
x	−		−	0	+		+		+
$(x-3)^3$	−		−		−	0	+		+
کسر	+ (ج)	0	−	ت.ن	+ (ج)	ت.ن	−	0	+ (ج)

$x^2-25=0 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=\pm5$

$x=0\ ,\ (x-3)^3=0 \Rightarrow x=3$

جواب $=(-\infty,-5]\cup(0,3)\cup[5,+\infty)$

۶-

$\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow 4a^2-4(a+2)(a-3)<0\\ \Rightarrow 4a^2-(4a^2-4a-24)<0 \Rightarrow a<-6\ (1)\\ x^2\text{ ضریب}<0 \Rightarrow a+2<0 \Rightarrow a<-2\ (2)\end{cases}$

$\xrightarrow{\cap} a<-6$

۷- $f_{\text{برد}}=\{\dots,-6,-4,-2,0,2,4,\dots\}$

الف) $f_{\text{دامنهٔ}}=\{\dots,-2,-1,0,1,\dots\}=\mathbb{Z}$

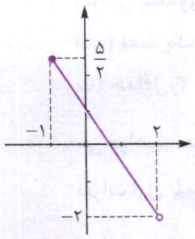
ب) $f(n)=-2n$

پ) $2f(-2)-\frac{f(1)}{2}=2(4)-\frac{-2}{2}=9$

۸- $f(x)=ax+b \Rightarrow$

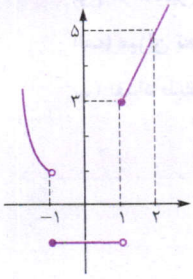
الف) $\begin{cases}f(-2)=4 \Rightarrow -2a+b=4\\ (0,1)\in f \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow 0+b=1 \Rightarrow b=1\\ \Rightarrow a=-\frac{3}{2} \Rightarrow f(x)=-\frac{3}{2}x+1\end{cases}$

ب)



x	-1	2
y	$\frac{5}{2}$	-2

۹-



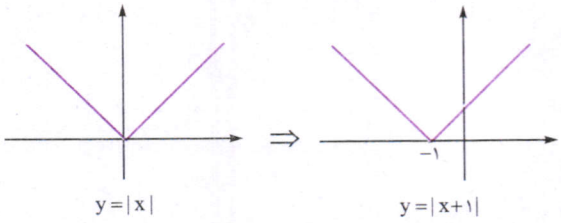
$f(x)=\begin{cases}x^2 & x<-1\\ -1 & -1\le x<1\\ 2x+1 & x\ge1\end{cases}$

$f(-3)=(-3)^2=9\ ,\ f(1)=2(1)+1=3$

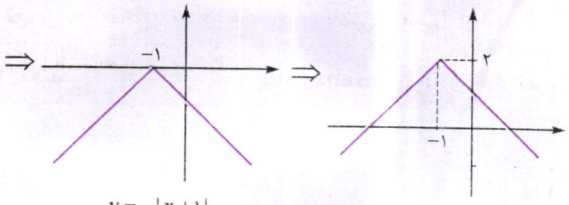
$\Rightarrow f(-3)+f(1)=12$

$f(-2)=(-2)^2=4 \Rightarrow f(f(-2))=f(4)=2(4)+1=9$

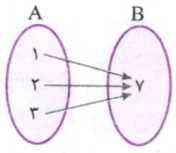
۱۰-



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria



۱۱- الف) برای نمونه می‌توانیم، نمودار زیر را رسم کنیم:



ب) $f=\{(۱,۱),(۳,۳),(۵,۵),(۱۰,۱۰)\}$

۱۲- الف) $\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۳}{\{۱,۵,۷\}}=۲۷$

ب) رقم یکان صفر باشد: $\frac{۴}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۱}{}=۱۲$

رقم یکان ۵ باشد: $\frac{۳}{}\times\frac{۳}{}\times\frac{۱}{}=۹$

$\xrightarrow{\text{اصل جمع}} ۱۲+۹=۲۱$

پ) $\frac{۳}{\{۱,۵,۸\}}\times\frac{۱}{\{۷\}}\times\frac{۳}{}=۹$

۱۳- الف) $۷!$

ب) «مهر» را یک شیء در نظر می‌گیریم، پس ۵ شیء «مهر»، «ب»، «ا»، «ن»، «ی» داریم که $۵!$ جایگشت دارند.

پ) دو حرف «م ن» را در یک دسته قرار می‌دهیم، پس ۶ شیء داریم، بنابراین تعداد کلمه‌ها برابر است با:

$\underbrace{۶!}_{\text{جایگشت‌های «م ن»}}\times ۲!$

۱۴-

$$\left.\begin{array}{l}P(n,۴)=\frac{n!}{(n-۴)!}\\ C(n-۲,۲)=\frac{(n-۲)!}{۲!(n-۴)!}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{\overbrace{n!}^{n(n-۱)(n-۲)!}}{\cancel{(n-۴)!}}=۱۲\times\frac{\cancel{(n-۲)!}}{۲!\cancel{(n-۴)!}}$$

$\Rightarrow n(n-۱)=۶\Rightarrow n=۴$

۱۵- الف) $n(s)=۶\times۶=۳۶$

ب) $A=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$

پ) $B=\{(۳,۵),(۵,۳),(۶,۵),(۵,۶)\}$

ت) $A-B=\{(۲,۶),(۴,۴),(۶,۲)\}$

۱۶- الف) $P(A)=\frac{\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۲}{۴}}=\frac{۷\times۱۰}{۱۱\times۵\times۹}=\frac{۱۴}{۹۹}$

ب) $P(B)=\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۷}{۱}+\binom{۵}{۴}}{\binom{۱۲}{۴}}=\frac{(۱۰\times۷)+۵}{۱۱\times۵\times۹}=\frac{۷۵}{۴۹۵}=\frac{۵}{۳۳}$

۱۷- جامعه: دانش‌آموزان مدرسهٔ حکمت

متغیر: زمان مطالعهٔ کتاب‌های درسی

نمونه: ۳ نفر اول لیست هر کلاس

نوع متغیر: کمّی پیوسته

۱۸- الف) کیفی ترتیبی

ب) کیفی اسمی

پ) کمّی گسسته

ت) کمّی پیوسته

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نمونه امتحان نیم‌سال دوم	رشتهٔ ریاضی و تجربی	ریاضی ۱ (دهم)
امتحان شمارهٔ ۴	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com

ردیف		نمره
۱	جای خالی را با عبارت‌های مناسب تکمیل کنید. الف) جملهٔ ..... در دنبالهٔ ۲۰۸,۲۰۴,۲۰۰,... برابر صفر است. ب) اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ باشد، $\tan\alpha$ همواره عددی ..... است. پ) تابع ثابت، تابعی است که ..... آن تنها یک عضو دارد. ت) عرض بالاترین نقطهٔ سهمی $y=-x^2+4x-1$ برابر است با ..... . ث) $P(n,n)=\cdots\cdots$ در حالی که $C(n,n)=\cdots\cdots$. ج) تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی از مجموعهٔ $\{1,2,\dots,9\}$ که حتماً شامل عدد ۱ باشد، برابر است با ..... . چ) دو پیشامد ..... هیچ‌گاه با هم رخ نمی‌دهند. ح) نتیجهٔ استفاده از علم آمار ..... در مورد پدیده‌هاست.	۲/۵
۲	در یک دنبالهٔ هندسی $t_1+t_2+t_3=-18$ و $t_2+t_3+t_4=36$. جملهٔ عمومی دنباله را به دست آورید.	۱/۲۵
۳	اتحاد مقابل را ثابت کنید. $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{4\tan\theta}{\cos\theta}$	۱/۲۵
۴	الف) حاصل عبارت‌های $(25)^{-\frac{3}{2}}$ و $81^{\frac{5}{4}}$ را به دست آورید. ب) حاصل $\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{\sqrt{x}+2}+\frac{4}{x^2-16}$ را به صورت یک کسر بنویسید.	۲
۵	نامعادلهٔ $\frac{2x^2+x-5}{4x-x^2-4}\geq -2$ را حل کنید.	۱
۶	مختصات رأس سهمی $y=2(x+1)^2-4$ را به دست آورده و سهمی را رسم کنید.	۱
۷	رابطهٔ $\{(x-1,2),(5,x-2),(x-2,y+3),(3,5),(5,3)\}$ تابع است. الف) y و x را به دست آورید. ب) دامنه و برد تابع را مشخص کنید. پ) نمودار تابع را رسم کنید.	۰/۷۵
۸	در تابع خطی $f(x)=ax+b$ داریم: $f(1)=4$ و $f(x-1)=2+f(x)$. الف) ضابطهٔ تابع $f(x)$ را مشخص کنید. ب) نمودار تابع را در بازهٔ $(0,+\infty)$ رسم کنید.	۰/۷۵
۹	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x<0\\ \lvert x+2\rvert & 0\leq x\leq 3\\ -1 & x>3\end{cases}$ را رسم کنید.	۱
۱۰	فرض کنید $f(x)=\lvert x\rvert$ باشد. نمودار تابع‌های $y=f(x-1)$ و $y=f(x)-1$ و $y=f(x+1)-2$ را رسم کنید.	۱
۱۱	الف) رمز دستگاهی از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه‌ها ارقام ۰ تا ۹ و گزینهٔ دیگر یک حرف الفبای انگلیسی است. چند حالت برای رمز دستگاه وجود دارد؟ ب) آزمونی از ۵ سؤال دوگزینه‌ای تشکیل یافته است. به چند طریق می‌توان به سؤال‌ها پاسخ داد اگر مجبور باشیم، به ۳ سؤال اول حتماً پاسخ دهیم اما پاسخ به دو سؤال بعدی، اختیاری باشد؟	۱/۵
۱۲	از میان ۶ مهندس، ۶ کارآفرین و ۶ مدیر، می‌خواهیم کمیته‌ای تشکیل دهیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد هرگاه: الف) کمیته ۶ نفره بوده و از هر شغل، ۲ نفر در آن عضو باشند؟	۱/۵

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

	ب) کمیته ۳ نفره بوده که هر سه دارای یک شغل باشند؟ پ) کمیته ۲ نفره بوده که دارای شغل‌های متفاوتی باشند؟	
۱۳	سکه‌ای را می‌اندازیم. اگر رو بیاید تاس و اگر پشت بیاید، دو بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم. الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید. ب) پیشامد A ، آن‌که تاس فرد بیاید را بنویسید. پ) پیشامد B ، آن‌که سکه حداقل دو بار پشت بیاید را بنویسید. ت) پیشامد آن‌که تاس فرد نیاید را بنویسید.	۱/۵
۱۴	از ۷ نفر که دو نفر آن‌ها زن و شوهر هستند، می‌خواهیم به صورت تصادفی کنار هم ایستاده تا از آن‌ها عکس یادگاری بگیریم. الف) چه‌قدر احتمال دارد، زن و شوهر کنار هم نباشند؟ ب) چه‌قدر احتمال دارد زن و شوهر یکی در ابتدا و دیگری در انتهای ردیف باشند؟	۱
۱۵	اگر $P(A\cup B)=\frac{۶}{۷}$ و $P(A\cap B)=\frac{۱}{۷}$ و $P(A')=\frac{۵}{۷}$ باشد، $P(B)$ را به دست آورید.	۱
	یکی از سؤال‌های ۱۶ و ۱۷ را به دلخواه پاسخ دهید.	
۱۶	متغیر کمّی پیوسته را تعریف کنید و دو نمونه برای آن ذکر کنید.	۱
۱۷	هر متغیر در ستون سمت راست را به نوع آن در ستون سمت چپ متصل کنید. جنسیت افراد ○ ○ کمّی پیوسته نمرهٔ ریاضی ○ ○ کمّی گسسته روزهای هفته (شنبه ، یکشنبه و ...) ○ ○ کیفی اسمی وزن افراد ○ ○ کیفی ترتیبی	
	جمع نمرات	۲۰

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ‌نامهٔ تشریحی امتحان شمارهٔ (۴)

۱- الف) جملهٔ پنجاه و سوم

$t_n = a+(n-1)d \Rightarrow t_n = 208+(n-1)(-4) =$

$-4n+212=0 \Rightarrow n=53$

ب) منفی است.

پ) برد

ت) عرض بالاترین نقطه

طول رأس $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{-2}=2 \Rightarrow y=-4+8-1=3$

ث) $C(n,n)=\frac{n!}{0!n!}=1$ و $P(n,n)=\frac{n!}{0!}=n!$

ج) $\binom{8}{4}$

چ) ناسازگار

ح) قضاوت و پیش‌بینی مناسب

۲-

$$\begin{cases} t_1+t_2+t_3 = a+ar+ar^2 = a(1+r+r^2) = -18 \\ t_2+t_3+t_4 = ar+ar^2+ar^3 = ar(1+r+r^2) = 36 \\ \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} \Rightarrow r=-2 \\ \Rightarrow a(1-2+4) = -18 \Rightarrow a=-6 \Rightarrow t_n = ar^{n-1} \\ = -6(-2)^{n-1} \end{cases}$$

۳-

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2-(1-\sin\theta)^2}{\underbrace{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}_{1-\sin^2\theta}}$$

$$=\frac{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-1+2\sin\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{4\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}=\frac{4\tan\theta}{\cos\theta}$$

۴- الف) $81^{\frac{5}{4}}=(3^4)^{\frac{5}{4}}=3^5=243$, $25^{-\frac{3}{2}}=(5^2)^{-\frac{3}{2}}$

$=5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$

ب) $\frac{2}{\sqrt{x}-2}+\frac{3}{\sqrt{x}+2}=\frac{2\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$

$\Rightarrow \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}+\frac{4}{x^2-16}=\frac{(5\sqrt{x}-2)(x+4)+4}{x^2-16}$

$=\frac{5x\sqrt{x}+20\sqrt{x}-2x-4}{x^2-16}$

۵-

		$\frac{13}{9}$		2	
$9x-13$	−	0	+		+
$-(x-2)^2$	−		−	0	−
	+ (ج)	0	−	ت.ن	+ (ج)

$\frac{2x^2+x-5}{4x-x^2-4}+2\ge 0 \Rightarrow \frac{2x^2+x-5+8x-2x^2-8}{-x^2+4x-4}\ge 0$

$\Rightarrow \frac{9x-13}{-(x-2)^2}\ge 0$

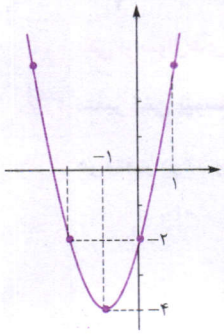
$9x-13=0 \Rightarrow x=\frac{13}{9}$

$-(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$

جواب $=(-\infty,\frac{13}{9}]\cup(2,+\infty)$

۶- $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow$ راس $(-1,-4)$

x	−3	−2	−1	0	1
y	4	−2	−4	−2	4



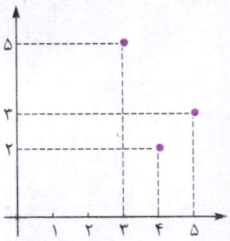
۷- $x-2=3 \Rightarrow x=5 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} (x-2,y+3)$

$=(3,y+3) \Rightarrow y+3=5 \Rightarrow y=2$

$\xrightarrow{y=2,\ x=5} f=\{(4,2),(5,3),(3,5),(3,5),(5,3)\}$

$=\{(4,2),(5,3),(3,5)\} \Rightarrow$ دامنه $=\{4,5,3\}$

برد $=\{2,3,5\}$



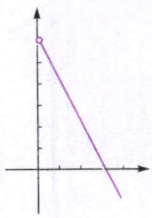
۸- الف) $f(1)=4 \Rightarrow a+b=4$

$f(x-1)=2+f(x) \Rightarrow a(x-1)+b=2+ax+b$

$\Rightarrow ax-a+b=2+ax+b \Rightarrow a=-2 \Rightarrow b=6$

ب) $f(x)=-2x+6$

x	0	3
y	6	0

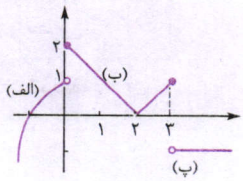


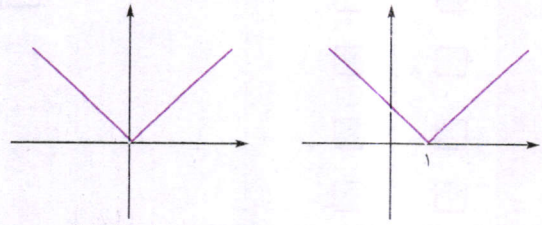
۹-

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & x<0 \quad \text{(الف)} \\ |x-2| & 0\le x\le 3 \quad \text{(ب)} \\ -1 & x>3 \quad \text{(پ)} \end{cases}$$

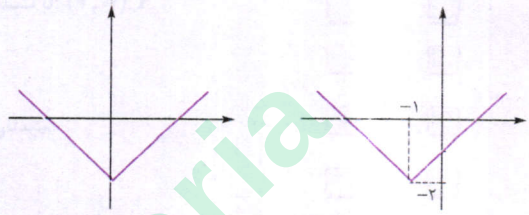
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۰-





$f(x)=|x|$ $\qquad$ $y=f(x-1)=|x-1|$



$y=f(x)-1=|x|-1$ $\qquad$ $y=f(x+1)-2=|x+1|-2$

۱۱-

الف) $\underset{\text{اولی رقم}}{۱۰} \times \underset{\text{دومی حرف}}{۲۶} \underset{\text{یا}}{+} \underset{\text{اولی حرف}}{۲۶} \times \underset{\text{دومی رقم}}{۱۰} = ۵۲۰$

ب) سؤال‌های ۱ تا ۳، هر کدام دو حالت دارند. به سؤال‌های ۴ و ۵ می‌توانیم پاسخ هم ندهیم، پس سه حالت دارند، بنابراین:

$۲\times۲\times۲\times۳\times۳=۷۲$ حالت برای پاسخگویی وجود دارد.

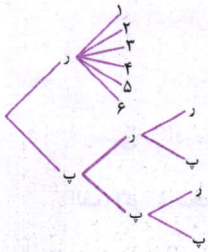
۱۲-

الف) $\binom{۶}{۲}\times\binom{۶}{۲}\times\binom{۶}{۲}=۱۵\times۱۵\times۱۵=۱۵^۳$

ب) $\binom{۶}{۳}+\binom{۶}{۳}+\binom{۶}{۳}=۲۰+۲۰+۲۰=۶۰$

پ) $\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{ابتدا ۲ شغل انتخاب می‌کنیم}}\underbrace{\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۱}}_{\text{از هر شغل یک نفر را انتخاب می‌کنیم}}=۳\times۶\times۶=۱۰۸$

۱۳-



الف) $S=\{(ر,۱),\dots,(ر,۶),(پ,ر,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(پ,پ,پ)\}$

ب) $A=\{(ر,۱),(ر,۳),(ر,۵)\}$

پ) $B=\{(پ,ر,پ),(پ,پ,ر),(پ,پ,پ)\}$

ت) $A'=S-A=\{(ر,۲),(ر,۴),(ر,۶),(پ,ر,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ),(پ,پ,پ)\}$

۱۴-

الف) $P(\text{کنار هم نبودن زن و شوهر})=۱-P(\text{کنار هم بودن زن و شوهر})$

$=۱-\frac{۶!\times۲!}{۷!}=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$

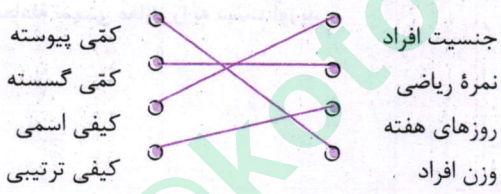
ب) $P(B)=\frac{۲!\times۵!}{۷!}=\frac{۱}{۲۱}$

۱۵- $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵}{۷}=\frac{۲}{۷}$

$\overbrace{P(A\cup B)}^{\frac{۶}{۷}}=\overbrace{P(A)}^{\frac{۲}{۷}}+P(B)-\overbrace{P(A\cap B)}^{\frac{۱}{۷}}\Rightarrow P(B)=\frac{۵}{۷}$

۱۶- متغیر قابل اندازه‌گیری که اگر دو مقدار a و b را بپذیرد، هر مقداری بین آن‌ها را نیز بتواند بپذیرد ـ قد و وزن.

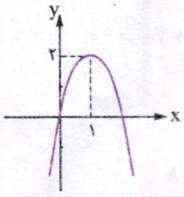
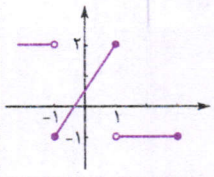
۱۷-



@kotob_konkoria

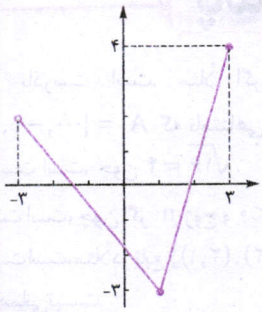
بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

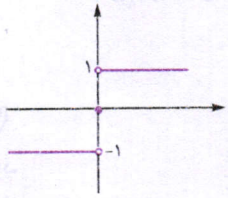
	نمونه امتحان نیم‌سال دوم	رشتهٔ ریاضی و تجربی	ریاضی ۱ (دهم)
ردیف	امتحان شمارهٔ ۵	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com

ردیف		درست	نادرست	
۱	درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.			۲
	الف) اگر U مجموعه‌ای نامتناهی و A نیز نامتناهی باشد، A' متناهی است.	☐	☐	
	ب) $\sqrt{16} = \pm 4$	☐	☐	
	پ) اگر a منفی و n زوج باشد $\sqrt[n]{a^n} = -a$	☐	☐	
	ت) اگر دامنه و برد تابع مساوی باشد، تابع همانی است.	☐	☐	
	ث) تعداد حالت‌های انتخاب نفرات اول تا سوم از بین ۱۰ ورزشکار برابر است با: $C(10,3)$.	☐	☐	
	ج) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A' \Rightarrow P(B') \le P(A')$	☐	☐	
	چ) اگر $A \cap B \cap C = \varnothing$ باشد، C، B و A را سه پیشامد ناسازگار می‌نامیم.	☐	☐	
	ح) طول قد علی ۱۷۰ cm است، پس متغیر قد برابر ۱۷۰ cm است.	☐	☐	
۲	فرض کنید A و B زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ مرجع U باشند که $n(U) = 150$، $n(A) = 25$، $n(B) = 48$ و $n(A \cap B) = 15$، مطلوب است: الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B')$			۱/۵
۳	نقطهٔ $(x, 2x)$ روی دایرهٔ مثلثاتی، زاویه θ را در ربع سوم به وجود می‌آورد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ را به دست آورید.			۲
۴	الف) مشخص کنید عبارت گویای $A = \frac{x^2 - 1}{6x^2 + 5x + 1}$ به ازای چه مقادیری تعریف‌نشده است.			۱/۵
	ب) مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$ را گویا کنید.			
۵	معادلهٔ سهمی مقابل را به دست آورید. 			۱
۶	نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید. الف) $-3 \le -\frac{x-1}{2} < 6$ ب) $x - 3 \le 2x + 1 \le -x + 5$			۱
۷	تابع f به صورت مقابل است: $f = \{(x,y) \mid x \in \{0,1,2,3\}, y = \frac{x}{2} - 1\}$ تابع f را با زوج‌های مرتب نمایش دهید.			۰/۵
۸	مشخص کنید هر رابطه، تابع را مشخص می‌کند یا خیر (پدیدهٔ اول x و پدیدهٔ دوم y است.) الف) رابطهٔ بین دانش‌آموزان یک کلاس و نمرهٔ ریاضی پایان‌ترم آن‌ها ب) رابطهٔ بین هر فرد و پدر و مادر او			۰/۵
۹	ضابطهٔ تابع f با نمودار مقابل را نوشته و مقادیر خواسته‌شده را به دست آورید. الف) $f(-1) = \cdots\cdots$ ب) $f(f(-2)) = \cdots\cdots$ 			۱

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

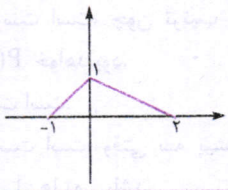
۱۰ دامنه و برد تابع‌های زیر را با استفاده از بازه‌ها نمایش دهید. **۱**



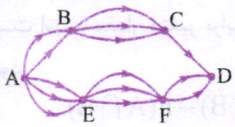


۱۱ الف) نمودار تابع g با ضابطهٔ $g(x) = -(x-۲)^۲ + ۳$ را رسم کنید. **۱**

ب) اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، نمودار تابع $y = f(x+۱) - ۲$ را رسم کنید.



۱۲ به چند طریق می‌توان از جاده‌های یک‌طرفهٔ شکل مقابل از A به D رفت؟ مشخص کنید در محاسبه، از اصل جمع استفاده کرده‌اید یا از اصل ضرب؟ **۱**

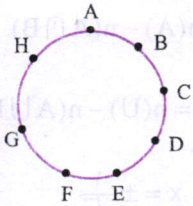


۱۳ ۸ نقطه مطابق شکل، روی محیط دایره قرار گرفته‌اند. با این نقاط: **۲**

الف) چند پاره‌خط می‌توان ساخت که ابتدا و انتهای آن‌ها از این نقاط انتخاب شوند؟

ب) چند مثلث می‌توان ساخت که یکی از رأس‌های آن A باشد؟

پ) چند چهارضلعی می‌توان ساخت که AF یکی از قطرهای آن باشد؟



۱۴ یک سکهٔ سالم را سه بار پرتاب می‌کنیم: **۱/۵**

الف) پیشامد A، آن‌که در بار آخر پشت ظاهر شود را بنویسید.

ب) پیشامد B، آن‌که حداکثر یک بار رو بیاید را بنویسید.

پ) پیشامد آن‌که حداقل یکی از A و B رخ بدهد را بنویسید.

۱۵ احتمال این‌که علی در درس ریاضی قبول شود، ۴۸٪ و احتمال این‌که در فیزیک قبول شود ۳۷٪ و احتمال قبولی در هر دو ۲۵٪ است. **۱/۵**

الف) احتمال این‌که در حداقل یکی از دو درس قبول شود، چه‌قدر است؟

ب) احتمال این‌که در فیزیک قبول نشود، چه‌قدر است؟

پ) احتمال این‌که در هیچ‌کدام از دو درس قبول نشود، چه‌قدر است؟

۱۶ هر متغیر در ستون سمت راست را به نوع آن در ستون سمت چپ متصل کنید. (هر متغیر به دوتا از ستون سمت چپ وصل می‌شود.) **۱**

وزن نامه‌های رسیده به اداره	کمّی
تعداد افراد خانواد	کیفی
درآمد یک رانندهٔ تاکسی در پایان ماه	پیوسته
درجهٔ میوه‌های باغ (یک، دو، ...)	گسسته
	ترتیبی
	اسمی

جمع نمرات **۲۰**

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ‌نامهٔ تشریحی امتحان شمارهٔ (۵)

۱- الف) نادرست است. مثلاً اگر $U=\mathbb{Z}$ و $A=\mathbb{N}$ باشد، $A'=\{\cdots,-2,-1,0\}$ که نامتناهی است.

ب) نادرست است، چون $\sqrt{16}=4$.

پ) درست است، چون اگر n زوج و $a<0$ باشد، $\sqrt[n]{a^n}=|a|=-a$.

ت) نادرست است، مثلاً در تابع $\{(1,2),(2,1)\}$ داریم $\{1,2\}=$ دامنه $=$ برد، ولی تابع همانی نیست.

ث) نادرست است، چون ترتیب بین افراد مهم است، پس پاسخ $P(10,3)$ خواهد بود.

ج) درست است.

چ) نادرست است. وقتی سه پیشامد ناسازگار هستند که اشتراک دوبه‌دوی آن‌ها تهی باشد.

ح) نادرست است. مقدار متغیر برابر $170\,cm$ است، متغیر، همان قد خواهد بود.

۲- الف) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=25+48-15=58$

ب) $n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=25-15=10$

پ) $n(A'\cap B')=n((A\cup B'))=n(U)-n(A\cup B)$
$=150-58=92$

۳- $x+(2x)^2=1 \Rightarrow 5x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\xrightarrow[\text{است } x<0]{\text{در ربع سوم}} x=-\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow P(\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}})$

$\cot\theta=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\tan\theta=\frac{y_p}{x_p}=2$

$\cos\theta=x_p=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\sin\theta=y_p=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

۴- الف) $6x^2+5x+1=0 \xrightarrow{\Delta=25-24>0}$

$$\begin{cases} x_1=\frac{-5+1}{12}=\frac{-4}{12}=-\frac{1}{3} \\ x_2=\frac{-5-1}{12}=-\frac{6}{12}=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

به ازای این دو مقدار عبارت تعریف نمی‌شود.

ب) $\frac{1}{\sqrt{2}(\underbrace{\sqrt{x}-\sqrt{y}})}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\underbrace{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{2(x-y)}$

۵- رأس سهمی $(1,2)$ بوده و سهمی از نقطهٔ $(0,0)$ هم عبور می‌کند. معادلهٔ سهمی را به صورت $y=a(x-h)^2+k$ در نظر می‌گیریم، پس $(h,k)=(1,2)$ و معادلهٔ سهمی $y=a(x-1)^2+2$ خواهد بود.

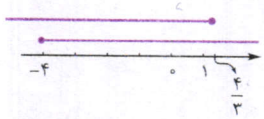
جای‌گذاری $(0,0)$ در معادله $\Rightarrow 0=a(-1)^2+2 \Rightarrow a=-2$

$\Rightarrow y=-2(x-1)^2+2$

۶- الف) $-3\le-\frac{x-1}{2}<6 \xrightarrow{\times(-2)} 6\ge x-1>-12$

$\xrightarrow{+1} 7\ge x>-11$

پس جواب بازهٔ $(-11,7]$ خواهد بود.



ب) $\begin{cases} x-3\le 2x+1 \Rightarrow -4\le x \\ 2x+1\le -x+5 \Rightarrow 3x\le 4 \Rightarrow x\le\frac{4}{3} \end{cases}$

اشتراک دو جواب بالا بازهٔ $[-4,\frac{4}{3}]$ است، بنابراین جواب نامعادله، بازهٔ $[-4,\frac{4}{3}]$ خواهد بود.

۷- $x=0 \Rightarrow y=-1\ ,\ x=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}\ ,\ x=2$

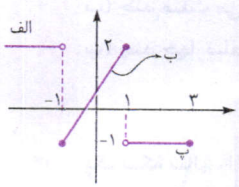
$\Rightarrow y=0\ ,\ x=3 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

پس $f=\{(0,-1),(1,-\frac{1}{2}),(2,0),(3,\frac{1}{2})\}$ خواهد بود.

۸- الف) هر دانش‌آموز فقط یک نمرهٔ ریاضی در امتحان پایان‌ترم دارد؛ پس تابع است.

ب) هر فرد پدر و مادر دارد (یعنی به ۲ عضو نظیر می‌شود)؛ پس تابع نیست.

۹-



الف: $y=2 \qquad x<-1$

ب: $y=ax+b \xrightarrow[(1,2)\ ,\ (-1,-1)]{\text{با جای‌گذاری نقطه‌های}} a=\frac{3}{2}\ ,\ b=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \qquad -1\le x\le 1$

پ: $y=-1 \qquad 1<x\le 3$

پس:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & x<-1 \\ \frac{3}{2}x+\frac{1}{2} & -1\le x\le 1 \\ -1 & 1<x\le 3 \end{cases}$$

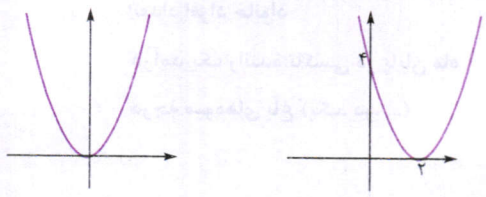
الف) $f(-1)=-1$

ب) $f(f(-2))=f(2)=-1$

۱۰- دامنه، تصویر نمودار روی محور xها و برد تصویر نمودار روی محور yها است؛ پس:

الف) $\begin{cases} \text{دامنه}=(-3,3] \\ \text{برد}=[-3,4] \end{cases}$ $\qquad$ ب) $\begin{cases} \text{دامنه}=\mathbb{R} \\ \text{برد}=\{-1,0,1\} \end{cases}$

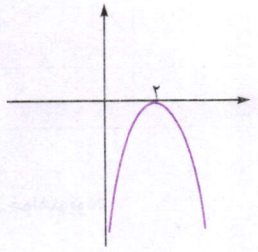
۱۱- الف) روش اول: انتقال



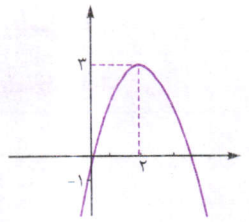
$y=x^2$ $\qquad$ $y=(x-2)^2$

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

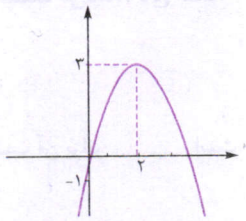


$y=-(x-۲)^۲$



$y=-(x-۲)^۲+۳$

روش دوم: نقطه‌یابی

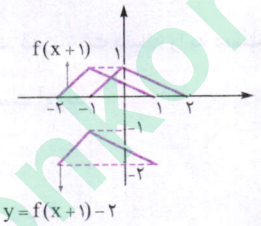


$y=-(x-۲)^۲+۳$

رأس سهمی $=(۲,۳)$

ب)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	-۱	۲	۳	۲	-۱



$y=f(x+۱)-۲$

۱۲-

مسیرهای از A به B و از B به C و از C به D

$\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}} ۲\times۳\times۱=۶$

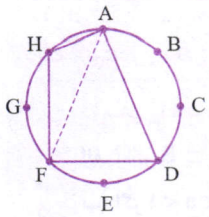
مسیرهای از A به E و از E به F و از F به D

$\xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}} ۳\times۳\times۲=۱۸$

$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} ۶+۱۸=۲۴$

۱۳- الف) هر ۲ نقطه که انتخاب می‌کنیم، دقیقاً یک پاره‌خط به دست می‌آید. به $\binom{۸}{۲}=۲۸$ روش می‌توان ۲ نقطه انتخاب کرد، پس ۲۸ پاره‌خط به وجود می‌آید.

ب) به ازای هر ۳ نقطه که انتخاب می‌کنیم، دقیقاً یک مثلث به دست می‌آید. یکی از این نقطه‌ها A است، پس کافی است ۲ نقطه از ۷ نقطهٔ باقی‌مانده انتخاب کنیم، بنابراین $\binom{۷}{۲}=۲۱$ مثلث که یکی از رأس‌های آن A باشد، می‌توان ساخت.



پ) دو رأس دیگر باید انتخاب کنیم تا چهارضلعی ساخته شود. یکی از رأس‌ها از بین G,H و دیگری باید از بین B,C,D,E انتخاب شوند پس $\binom{۴}{۱}\binom{۲}{۱}=۸$ چهارضلعی می‌توان ساخت که AF قطر آن باشد.

۱۴-

الف) $A=\{(پ,ر,ر),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(پ,پ,پ)\}$

ب) $B=\{(پ,پ,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ)\}$

پ) $A\cup B=\{(پ,پ,پ),(پ,ر,پ),(پ,پ,ر),(پ,ر,ر)\}$

۱۵- احتمال قبولی ریاضی $=P(A)$ و احتمال قبولی فیزیک $=P(B)$

الف) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{۴۸}{۱۰۰}+\frac{۳۷}{۱۰۰}=\frac{۲۵}{۱۰۰}=\frac{۶۰}{۱۰۰}$

ب) $P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۳۷}{۱۰۰}=\frac{۶۳}{۱۰۰}$

پ) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$

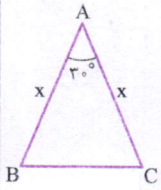
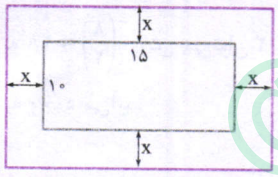
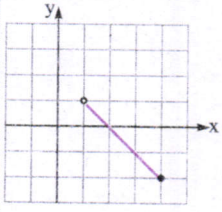
$=۱-\frac{۶۰}{۱۰۰}=\frac{۴۰}{۱۰۰}$

۱۶-

	کمّی	کیفی	پیوسته	گسسته	ترتیبی	اسمی
وزن نامه‌های رسیده به یک اداره	✓		✓			
تعداد افراد خانواده	✓			✓		
درآمد یک رانندهٔ تاکسی در پایان ماه	✓			✓		
درجهٔ میوه‌های باغ		✓			✓	

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نمونه امتحان نیم‌سال دوم	رشته: ریاضی و تجربی		ریاضی دهم
امتحان شمارهٔ ۶ ـ نهایی خرداد ۱۴۰۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisahz.com	

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A نیز متناهی خواهد بود. ب) اگر $0 < a < 1$ آن‌گاه $\sqrt{a} > \sqrt[3]{a}$. ج) رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی کم‌تر از ۴ مقسوم‌علیه‌های آن را نسبت می‌دهد، تابع است. د) تعداد جایگشت‌های متمایز حروف کلمهٔ «نرگس» برابر !۴ است.	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) اگر زاویهٔ خطی با جهت مثبت محور افقی 45° باشد، آن‌گاه شیب آن برابر ..... است. ب) عبارت $\sqrt{\sqrt{81}}$ برابر با عدد صحیح ..... است. ج) مجموعه جواب نامعادلهٔ $\lvert x \rvert \leq 6$ بازهٔ ..... است. د) تعداد ..... تابع خطی وجود دارد که دامنهٔ آن $[0,2]$ و برد آن $[-2,1]$ باشد.	۱
۳	اگر $n(A) = 60$، $n(B) = 70$ و $n(A-B) = 15$ آن‌گاه $n(A \cup B)$ را به دست آورید.	۱
۴	جمله‌های چهارم و هفتم یک دنبالهٔ هندسی به ترتیب ۲۴ و ۱۹۲ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.	۰/۷۵
۵	مساحت مثلث متساوی‌الساقین ABC برابر ۹ است. اندازهٔ x را به دست آورید.  	۰/۷۵
۶	اگر $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ و $\tan\alpha = \frac{-4}{3}$، نسبت‌های مثلثاتی $\cot\alpha$ و $\cos\alpha$ را به دست آورید.	۱
۷	الف) صورت و مخرج کسر $\frac{x^2+x}{x^2-x-2}$ را تجزیه و عبارت را ساده کنید. ب) مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ را گویا کنید.	۱/۵
۸	یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع قرار دارد. اگر فاصلهٔ همهٔ لبه‌های عکس تا قاب برابر x باشد، مقدار x را پیدا کنید.  	۱/۵
۹	مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{-(x-4)^2}{2x+1} \geq 0$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۰	در سهمی $y = ax^2 + 2x + 3$ خط $x = 2$ محور تقارن آن است. مقدار a را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۱	تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید، $f(-4)$ و $f(0)$ را به دست آورید.	۱/۲۵
۱۲	دامنه و برد تابع خطی مقابل را بنویسید و ضابطهٔ آن را به دست آورید.  	۱/۵
۱۳	ابتدا نمودار تابع $y = \lvert x \rvert$ را رسم کرده و با کمک انتقال آن، نمودار تابع $f(x) = \lvert x-3 \rvert + 2$ را رسم کنید.	۰/۷۵

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نمونه امتحان نیم‌سال دوم	رشته: ریاضی و تجربی	ریاضی دهم	
امتحان شمارهٔ ۶ ـ نهایی خرداد ۱۴۰۳	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	Kheilisabz.com	نمره
ردیف			
۱۴	با ارقام ۰,۲,۳,۴,۷ چند عدد ۴رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟		۱/۲۵
۱۵	برای برگزاری یک دوره مسابقات ریاضی از بین ۴ دبیر، ۳ دانشجو و ۲ دانش‌آموز قرار است گروهی تشکیل شود. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد اگر: الف) گروه ۴نفره باشد؟ ب) گروه ۵نفره باشد و حداقل یک دبیر در آن باشد؟		۱/۵
۱۶	دو تاس را با هم می‌اندازیم. پیشامد A را «هر دو تاس مضرب ۵ باشند.» و پیشامد B را «مجموع دو تاس ۱۱ باشد.» تعریف می‌کنیم؛ الف) A و B را با نمایش اعضا مشخص کنید. ب) آیا این دو پیشامد ناسازگارند؟ چرا؟		۱
۱۷	اگر ۶ نامزد انتخابات شورای مدرسه که دو نفر از آن‌ها همکلاسی هستند به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چه‌قدر احتمال دارد که این دو همکلاسی کنار هم باشند؟		۱
۱۸	نوع متغیرهای زیر را از نظر کمّی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی و ترتیبی مشخص کنید. الف) میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر ب) گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس		۱
	موفق باشید		۲۰

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

پاسخ‌نامهٔ تشریحی امتحان شمارهٔ (۶)

۱- الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵)

ج) نادرست (۰/۲۵) د) درست (۰/۲۵)

۲- الف) ۱ (۰/۲۵) ب) ۳ (۰/۲۵)

ج) $[-6,6]$ (۰/۲۵) د) ۲ (۰/۲۵)

۳- **روش اول:**

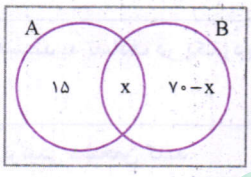
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow 15=60-n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B)=45$ (۰/۲۵)

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow n(A\cup B)=60+70-45=85$ (۰/۲۵)

روش دوم:



$60=15+x \Rightarrow x=45$ (۰/۵)

$n(A\cup B)=15+45+(70-45)=85$ (۰/۲۵)

۴- $\frac{t_7}{t_4}=\frac{t_1r^6}{t_1r^3}=r^3 \Rightarrow r^3=\frac{192}{24}=8$ (۰/۵) $\Rightarrow r=2$ (۰/۲۵)

۵- $S=\frac{1}{2}x^2\sin 30^\circ=9$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \frac{1}{2}\times x^2\times\frac{1}{2}=36 \xrightarrow{x>0} x=6$ (۰/۵)

۶- **روش اول:** استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{9}{25} \Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{3}{5}$ (۰/۲۵)

$\xrightarrow{\alpha \text{ در ناحیهٔ چهارم}} \cos\alpha=+\frac{3}{5}$ (۰/۲۵)

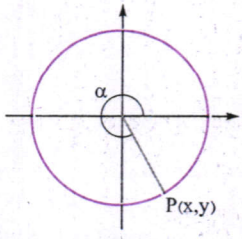
$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{3}{4}$ (۰/۲۵)

روش دوم: استفاده از دایرهٔ مثلثاتی

$\tan\alpha=-\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{y}{x}=-\frac{4}{3} \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x$ (۰/۲۵)

$x^2+y^2=1 \Rightarrow x=\frac{3}{5}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{5}$ (۰/۲۵) , $\cot\alpha=-\frac{3}{4}$ (۰/۲۵)



۷- الف) $\frac{x^2+x}{x^2-x-2}=\underbrace{\frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)}}_{(0/5)}=\frac{x}{x-2}$ (۰/۲۵)

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}\times\frac{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1}}_{(0/5)}$

$=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ (۰/۲۵)

۸- **روش اول:** استفاده از روش کلی در حل معادلهٔ درجه۲

$(10+2x)(15+2x)=300$

$\Rightarrow 4x^2+50x-150=0$ (۰/۲۵)

$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\\ x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow \begin{cases}\Delta=4900 \text{ (۰/۲۵)}\\ \underbrace{x_1=\frac{5}{2}}_{(0/25)} \text{ قابل قبول (۰/۲۵)}, x_2=-15 \text{ (۰/۲۵)}\end{cases}$

روش دوم: استفاده از تجزیه در حل معادلهٔ درجه۲

$(10+2x)(15+2x)=300$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow 4x^2+50x-150=0$ (۰/۲۵)

$(2x+30)(2x-5)=0$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow x=-15$ (۰/۲۵) , $x=\frac{5}{2}$ قابل قبول (۰/۵)

۹- $-(x-4)^2=0 \Rightarrow x=4$ (۰/۲۵)

$2x+1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		4		$+\infty$	
$-(x-4)^2$		$-$		$-$	0	$-$		(۰/۲۵)
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		(۰/۲۵)
$\frac{-(x-4)^2}{2x+1}$		$+$	تعریف نشده	$-$	0	$-$		(۰/۲۵)

مجموعه جواب: $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup\{4\}$ (۰/۲۵)

۱۰- **روش اول:**

$x=\frac{-b}{2a}=2$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x=\frac{-2}{2a}=2$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

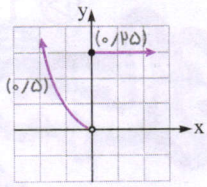
روش دوم:

$f(1)=f(3)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a+5=9a+9$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

۱۱- $f(0)=3$ (۰/۲۵) , $f(-4)=16$ (۰/۲۵)



۱۲- روش اول:

$a=\frac{-2-0}{4-2}=-1$ (۰/۲۵)

$y=ax+b$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y=-x+b$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{(4,-2)}$ $b=2$ (۰/۲۵)

$D=(1,4]$ (۰/۲۵) , $R=[-2,1)$ (۰/۲۵)

روش دوم:

$m=\frac{-2-0}{4-2}=-1$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow y-(-2)=-1(x-4)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y=-x+2$ (۰/۲۵)

$D=(1,4]$ (۰/۲۵) , $R=[-2,1)$ (۰/۲۵)

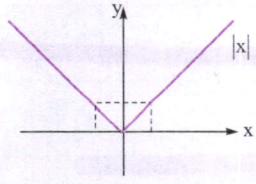
روش سوم:

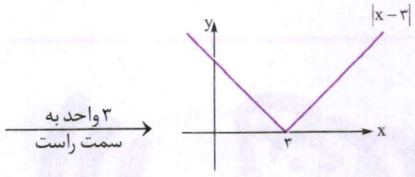
$f(x)=ax+b$ (۰/۲۵)

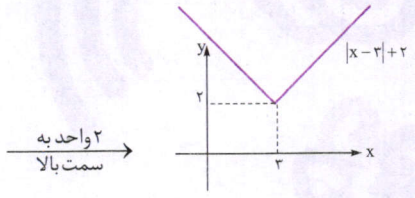
$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ 4a+b=-2 \end{cases}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \begin{cases} a=-1 \text{ (۰/۲۵)} \\ b=2 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases}$

$D=(1,4]$ (۰/۲۵) , $R=[-2,1)$ (۰/۲۵)

۱۳-







۱۴-

حالت اول که رقم سمت راست صفر باشد: $4\times3\times2\times1=24$ (۰/۵)

حالت دوم که رقم سمت راست ۲ یا ۴ باشد: $3\times3\times2\times2=36$ (۰/۵)

$\Rightarrow 24+36=60$ تعداد کلی اعداد (۰/۲۵)

۱۵- الف) $\binom{9}{4}$ (۰/۲۵) $=\frac{9!}{4!\times5!}$ (۰/۲۵) $=126$ (۰/۲۵)

ب) **روش اول**: استفاده از روش متمم

$\binom{9}{5}-\binom{5}{5}$ (۰/۵) $=125$ (۰/۲۵)

روش دوم: به روش مستقیم

$\binom{4}{1}\binom{5}{4}+\binom{4}{2}\binom{5}{3}+\binom{4}{3}\binom{5}{2}+\binom{4}{4}\binom{5}{1}$ (۰/۵) $=125$ (۰/۲۵)

۱۶- الف) $A=\{(5,5)\}$ (۰/۲۵) , $B=\{(6,5),(5,6)\}$ (۰/۲۵)

ب) خیر (۰/۲۵)؛ زیرا: $A\cap B=\varnothing$ (۰/۲۵)

۱۷- $n(s)=6!$ (۰/۲۵) , $n(A)=5!$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow P(A)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$ (۰/۵)

۱۸- الف) کمّی پیوسته (۰/۵)

ب) کیفی اسمی (۰/۵)

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

توی دنیای مجازی پی ما رو بگیرین

توی وبسایت **خیلی‌سبز** هم می تونین خرید کنید هم سؤال بپرسین و هم جوابشو بگیرین و هم از اوضاع و احوال کتاب های جدید باخبر بشین.

www.Kheilisabz.com

کانال تلگرام **خیلی‌سبز** هم هست، توی این کانال ما با شما حرف می زنیم، از اتفاقات روزمره زندگی بگیر تا کتابای جدید و حتی انتخاب رشته کنکور!

telegram.me/kheilisabzpub

ما **خیلی‌سبزیا** کلاً تصویر دوست داریم، میدونین که! توی اینستاگرام خیلی‌سبز هم میتونیم با هم حرف بزنیم هم عکسامون رو نشون بدیم!

instagram.com/kheilisabz

راستی هنوز تلفنم داریم:

۰۲۱-۶۳۵۶۳

دانلود از:

www.Kheilisabz.com

اپلیکیشن خیلی بوکز

کتاب های دیجیتال خیلی سبز

- برای کاهش هزینه ها!
- برای جلوگیری از قطع درخت ها!
- برای دسترسی راحت تر!
- و برای کلی چیزهای خوب دیگه!

از همهٔ آدم‌های باحال، سرحال و توانمند در حوزهٔ بازاریابی و فروش، منابع انسانی، سخت‌افزار و نرم‌افزار، مالی و اداری بازرگانی، تحلیل و توسعهٔ کسب و کار، زنجیرهٔ تامین و تولید کتاب دعوت می‌کند به صرف چای، شیرینی و همکاری:

HR@kheilisabz.com

همچنین از همهٔ آدم‌های خلاقی که ایده‌ای برای تولید محتوای آموزشی دارند یا به همکاری در تألیف و ویراستاری کتاب های کمک آموزشی دوره‌های ابتدایی، متوسطه اول، متوسطه دوم و کنکور علاقه‌مندند، دعوت می‌شود برای یک گپ دوستانه و تولید کتاب:

talent@kheilisabz.com

خیلی سبز! سلام برون!

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

porteghalpub | www.porteghaal.com

پرتقال!

بهترین کتاب‌های جهان
برای بچه‌های ایران

GAME
زینگو zingo
کارخونه‌ی بازی‌های باحال!
BINGO
PLAY
MON

zingobazi | www.zingobazi.com

Elipon®
DRAW YOUR DREAM
www.elipon.com
elipon.iran

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

کتاب‌های ماجرای بیست نسل جدید کتاب‌های ماجراهای من و درسام

خیلی سبز!

کتاب‌های جی‌بی

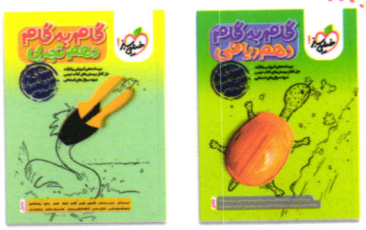
درس‌هات رو بذار تو جیبت!!!

- چکیده زیست‌شناسی دهم
- چکیده فیزیک تجربی دهم
- چکیده فیزیک ریاضی دهم
- چکیده هندسه دهم
- چکیده شیمی دهم
- چکیده ریاضی دهم

گام به گام

همراه همیشگی درسایت

درسنامه | حل پرسش‌های کتاب درسی | نمونه سؤال امتحانی



- یادگیری مطالب آموزشی، با درسنامه‌های کارآمد
- تسلط روی مفاهیم، با حل پرسش‌های کتاب درسی
- آمادگی برای امتحان‌ها، با نمونه سؤال‌های امتحانی

kheilisabz | @kheilisabzpub

9 786222 308773

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

خیلی سبز!

ضمیمه ماجرای بیست ریاضی ۱

هلا به خیلی سبزی

مریم نظری

مرور سریع ریاضی دهم ویژهٔ ایام امتحانات به همراه مثال‌های فراوان

@kotob_konkoria

خیلی سبز!

خیلی سبز! آزمون

تجربی | ریاضی | انسانی

کتاب + آزمون آزمایشی
یه ترکیب برنده

فکر کردیم حالا که درس خوندن و کتاباتون خیلی سبزه! چرا آزموناتون خیلی سبز نباشه

برای ثبت نام و اطلاعات بیشتر عدد ۱ را به شماره ۲۰۰۰۶۳۵۶۲۰۰۰۰۰ پیامک کنید
و یا این قسمت را اسکن کنید.

شب امتحان

شب امتحان راحت بخوابید

| امتحان | درسنامه |

- زیست دهم
- شیمی دهم
- ریاضی دهم
- جغرافیا دهم
- هندسه دهم
- فیزیک ریاضی دهم
- فیزیک تجربی دهم

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

به نام خدا

عنوان و نام پدیدآوران: ضمیمهٔ رایگان- ماجرای بیست- ریاضی دهم
نظری، مریم
مشخصات نشر: تهران، خیلی‌سبز، ۱۴۰۳
مشخصات ظاهری: ۲۶ ص. مصور، جدول ۲۲×۲۹، س‌م.
شابک: ۲-۹۵۷-۲۳۰-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
موضوع: ریاضیات--راهنمای آموزشی (متوسطه).
موضوع: ریاضیات--پرسش‌ها و پاسخ‌ها (متوسطه).
شماره کتابشناسی ملی: ۵۴۷۸۵۸۷
۵۰۱۶۸۰۱

www.kheilisabz.com kheilisabzpub kheilisabz

نام کتاب: ضمیمهٔ رایگان - ماجرای بیست - ریاضی دهم
ناشر: خیلی‌سبز وابسته به توسعه خیلی‌سبز
مؤلف: مریم نظری
ویراستاران علمی: علیرضا کاظمی‌بقا - فرامرز سلطان‌کریمی
ویراستاران فنی: هادی نوروزی - جواد احمدی
طراح جلد: سپیده زمانی
گرافیست جلد: زهرا گنجی - ندا رنجبر
طراح گرافیک متن: رعنا جمالی
رسم شکل: علی چهارنایی
صفحه‌آرایی: اکرم کیامنش - هلیا خدادادی
لیتوگرافی: هم‌میهن
چاپخانه: هم‌میهن
نوبت چاپ: چهارم - ۱۴۰۳
تیراژ: ۲۵۰۰ جلد
قیمت: رایگان
تلفن مرکز پخش: ۶۳۵۶۳ (۰۲۱)
صندوق پستی: ۸۱۷۷ - ۱۴۱۵۵
SMS: ۳۰۰۰۶۳۵۶۳

سلام بر سون!

محتوای این کتاب، مرور سریع ریاضی دهم است.

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

درس ۱: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

یادآوری: مجموعه‌های مهم:

مجموعهٔ اعداد طبیعی: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

مجموعهٔ اعداد حسابی: $\mathbb{W}=\{0,1,2,3,\dots\}$

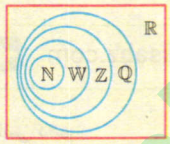
مجموعهٔ اعداد صحیح: $\mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

مجموعهٔ اعداد گویا: $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},n\neq 0\}$

مجموعهٔ اعداد گنگ: $\mathbb{Q}'=$ (مجموعهٔ اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.)

مجموعهٔ اعداد حقیقی: $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$

نکته: $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$



مثال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\dots,-2,-1,0\}$

ب) اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه $(\mathbb{Q}-\mathbb{N})\cap\mathbb{Z}=\mathbb{W}$.

پ) مجموعهٔ $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ یک عضو دارد.

پاسخ: الف) نادرست $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=\{\dots,-3,-2,-1\}$

ب) نادرست $(\mathbb{Q}-\mathbb{N})\cap\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0\}$

پ) درست $\mathbb{W}-\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}-\{1,2,3,\dots\}=\{0\}$

نکته: اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A\cup B=B$ و $A\cap B=A$ و $A-B=\varnothing$.

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(\mathbb{Z}-\mathbb{W})\cup\mathbb{N}$ ب) $(\mathbb{W}\cup\mathbb{Z})\cap\mathbb{Q}$

پاسخ: الف) $(\mathbb{Z}-\mathbb{W})=\{\dots,-3,-2,-1\}\Rightarrow(\mathbb{Z}-\mathbb{W})\cup\mathbb{N}$
$=\{\dots-3,-2,-1,1,2,3,\dots\}=\mathbb{Z}-\{0\}$

ب) $\underbrace{(\mathbb{W}\cup\mathbb{Z})}_{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\qquad(\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z},\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q})$

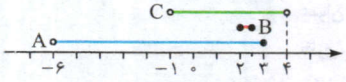
بازه‌ها زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کنندهٔ یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم. اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a<b$، آن‌گاه:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	a b
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$	a b
نیم‌باز	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$	a b
نیم‌باز	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$	a b

مثال: اگر $A=(-6,3]$ و $B=[2,\frac{5}{2}]$ و $C=(-1,4)$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

الف) $(A\cup C)$ ب) $(C-B)\cap A$

پاسخ:



الف) $(A\cup C)=(-6,3]\cup(-1,4)=(-6,4)$

ب) $C-B=(-1,4)-[2,\frac{5}{2}]=(-1,2)\cup(\frac{5}{2},4)$

$\Rightarrow(C-B)\cap A=(-1,2)\cup(\frac{5}{2},3]$

نکته: $\mathbb{R}-\{a\}=(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی **مجموعه‌های متناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها یک عدد حسابی باشد.

مجموعه‌های نامتناهی: مجموعه‌هایی که متناهی نباشند. در واقع تعداد اعضای این مجموعه‌ها از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

نکته: ۱ اگر $A\subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آن‌گاه A متناهی خواهد بود.

۲ اگر $A\subseteq B$ و A مجموعه‌ای نامتناهی باشد، آن‌گاه B نامتناهی خواهد بود.

۳ اگر $A\cap B=\varnothing$، آن‌گاه $A-B=A$ و $B-A=B$.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -7<x\le 80\}$

ب) مجموعهٔ مضرب‌های زوج عدد ۱۳

پ) مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۴۲

ت) $(\mathbb{Z}\cap[-1,5))-\mathbb{N}$

پاسخ: الف) متناهی $A=\{-6,-5,\dots,79,80\}$

ب) نامتناهی $B=\{2\times13,4\times13,6\times13,\dots\}$

پ) متناهی $C=\{1,2,3,6,7,14,21,42\}$

ت) متناهی $\mathbb{Z}\cap[-1,5)=\{-1,0,1,2,3,4\}$

$(\mathbb{Z}\cap[-1,5))-\mathbb{N}=\{-1,0\}$

درس ۲: متمم یک مجموعه

مجموعهٔ مرجع: در هر مبحث مجموعه‌ای را که همهٔ مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعهٔ آن باشند، مجموعهٔ مرجع می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

متمم: هرگاه U مجموعهٔ مرجع باشد و $A\subseteq U$، آن‌گاه مجموعهٔ $U-A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال: اگر $\mathbb{W}$ مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه اعضای $\mathbb{N}'$ را مشخص کنید. *(مشابه کتاب درسی)*

پاسخ: $\mathbb{N}' = \mathbb{W} - \mathbb{N} = \{۰,۱,۲,...\} - \{۱,۲,۳,...\} = \{۰\}$

نکته:

۱) $(A')' = A$

۲) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۳) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۴) $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$

۵) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۶) $U' = \varnothing$

۷) $\varnothing' = U$

۸) $A \cap A' = \varnothing$

۹) $A \cup A' = U$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $B \cap (A \cup B)'$

ب) $A = (-۶,۵], B = [۳,۷]$

۱) $(A - B) \cap (B \cap A)'$ ۲) A'

پاسخ:

الف) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$B \cap (A \cup B)' = B \cap (A' \cap B') = \underbrace{(B \cap B')}_{\varnothing} \cap A'$

$= \varnothing \cap A' = \varnothing$

ب)

۱) $A - B = (-۶,۵] - [۳,۷] = (-۶,۳)$

$A \cap B = [۳,۵] \Rightarrow (A \cap B)' = (-\infty,۳) \cup (۵,+\infty)$

$(A - B) \cap (A \cap B)' = (-۶,۳) \cap ((-\infty,۳) \cup (۵,+\infty))$

$= (-۶,۳)$

۲) $A' = \mathbb{R} - (-۶,۵] = (-\infty,-۶] \cup (۵,+\infty)$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی دلخواه باشند، داریم:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

نکته: به هر دو مجموعهٔ A و B که فاقد عضو مشترک باشند، یعنی $A \cap B = \varnothing$، دو مجموعهٔ جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

مثال: در یک کلاس ۳۶نفره، تعداد ۲۳ نفر عضو گروه فوق برنامهٔ دوچرخه‌سواری و ۱۷ نفر عضو گروه فوق برنامهٔ کوهنوردی و ۴ نفر هم عضو هیچ گروهی نیستند. چند نفر از این کلاس در هر دو گروه فوق برنامه عضو هستند؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ: مجموعهٔ شامل تمام افراد کلاس را با U، مجموعهٔ افراد گروه دوچرخه‌سواری را با A و مجموعهٔ افراد گروه کوهنوردی را با B نمایش می‌دهیم.

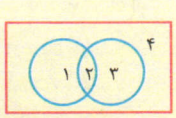
$n(U) = ۳۶, n(A) = ۲۳, n(B) = ۱۷, n(A \cup B)' = ۴$

$n(A \cup B) = n(U) - n(A \cup B)' = ۳۶ - ۴ = ۳۲$

$\Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\Rightarrow ۳۲ = ۲۳ + ۱۷ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۸$

نکته: نمودار وِن مربوط به دو مجموعه را می‌توان به چهار ناحیهٔ جداگانه تقسیم کرد:



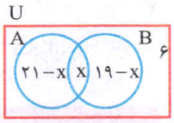
مثال: در یک شرکت ۳۷نفری، ۲۱ نفر دورهٔ کسب و کار و ۱۹ نفر دورهٔ بازاریابی را گذرانده‌اند. اگر ۶ نفر از این شرکت هیچ دوره‌ای را نگذرانده باشند، آن‌گاه: *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) چند نفر هر دو دوره را شرکت کرده‌اند؟

ب) چند نفر فقط در یک دوره شرکت کرده‌اند؟

پ) چند نفر فقط دورهٔ بازاریابی را شرکت کرده‌اند؟

پاسخ: الف) **روش اول:** با استفاده از نمودار ون، مقدار x را به دست می‌آوریم:



$(۲۱ - x) + x + (۱۹ - x) + ۶ = ۳۷ \Rightarrow x = ۹$

روش دوم: چون ۶ نفر در هیچ دوره‌ای شرکت نکرده‌اند، پس:

$n(A \cup B) = ۳۱ \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\Rightarrow ۳۱ = ۲۱ + ۱۹ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۹$

ب) فقط در یک دوره یعنی یا فقط در دورهٔ A یا فقط در دورهٔ B شرکت کرده باشند؛ بنابراین:

$n(A - B) \cup n(B - A) = n(A - B) + n(B - A)$

$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$

$= n(A) + n(B) - ۲n(A \cap B) = ۲۱ + ۱۹ - ۲ \times ۹ = ۲۲$

پ) $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۱۹ - ۹ = ۱۰$

درس ۳: الگو و دنباله

الگو: به طور کلی می‌توان گفت الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، نمادها یا اعداد است که ممکن است تکرارشونده یا رشدکننده یا ترکیبی از این دو باشد.

با بررسی اشکال و اعداد و ... می‌توانیم قانون مربوط به الگو را پیدا کنیم و جملهٔ عمومی الگو را بنویسیم. به کمک جملهٔ عمومی می‌توانیم مقدار هر جمله از الگو را به دست آوریم.

نکته: عبارت‌های $a_۱$، $a_۲$ و ... متغیرهای اندیس‌دار نامیده می‌شوند.

مثال: به الگوی زیر توجه کنید: *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) جملهٔ عمومی الگو را بیابید.

ب) شکل دهم این الگو چند نقطه دارد؟

پاسخ:

الف) $a_۱ = ۱, a_۲ = ۲ \times ۳ - ۱, a_۳ = ۳ \times ۴ - ۱, a_۴ = ۴ \times ۵ - ۱$

$\Rightarrow a_n = n(n+۱) - ۱$

ب) $n = ۱۰ \Rightarrow a_{۱۰} = ۱۰ \times ۱۱ - ۱ = ۱۰۹$

الگوی خطی

به طور کلی، الگوهایی را که جملهٔ عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ است الگوهای خطی می‌نامیم که در آن، a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

نکته: اختلاف هر دو جملهٔ متوالی در الگوی خطی برابر ضریب n است.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال: در یک الگوی خطی، جملات پنجم و نهم به ترتیب ۱۲ و ۱۸ هستند. جملهٔ عمومی الگو را بیابید. *(مشابه مثال کتاب درسی)*

پاسخ: جملهٔ عمومی الگوی خطی برابر است با $a_n = an + b$. پس داریم:

$$\begin{cases} a_5 = 5a + b \\ a_9 = 9a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 12 \\ 9a + b = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{9}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

بنابراین: $a_n = \frac{3}{2}n + \frac{9}{2}$

الگوی غیرخطی

اگر جملات الگو با یک مقدار غیرثابت زیاد یا کم شوند، الگو را غیرخطی می‌نامیم:

$t_1 = 2(1)\,,\ t_2 = 2(1+2)\,,\ t_3 = 2(1+2+3)$

$\Rightarrow t_n = 2(1+2+3+\cdots+n)$

بنابراین جملهٔ عمومی برابر است با: $t_n = 2(\frac{n(n+1)}{2}) = n(n+1)$

چون اختلاف بین جملات مقداری ثابت نیست، بنابراین این الگو غیرخطی است.

n	۱	۲	۳	۴	...
t_n	۲	۶	۱۲	۲۰	...

+۴ +۶ +۸

دنباله

هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

توجه: ممکن است جملات دنباله فاقد الگو باشند.

مثال: الف) جملهٔ عمومی دنبالهٔ زیر را به دست آورید.

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots$

ب) مجموع جمله‌های سوم، هفتم و دهم دنباله با جملهٔ عمومی $n^2 - n - 1$ را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پ) جملهٔ چندم دنباله‌ای با جملهٔ عمومی $t_n = \frac{6n-1}{n+1}$ برابر با ۵ است؟

پاسخ:

الف) $a_n = (-\frac{1}{3})^n$

ب) $a_3 = 5, a_7 = 41, a_{10} = 89$

$\Rightarrow a_3 + a_7 + a_{10} = 5 + 41 + 89 = 135$

پ) $\frac{6n-1}{n+1} = 5 \Rightarrow 6n - 1 = 5n + 5 \Rightarrow n = 6$

پس، جملهٔ ششم دنباله برابر با ۵ است: $t_6 = 5$

نکته: اگر جملهٔ عمومی دنباله، یک چندجمله‌ای درجه‌دوم باشد، دنباله را یک دنبالهٔ درجه ۲ می‌نامیم.

مثال: برای هر یک از دنباله‌های درجه‌دوم زیر، جملهٔ عمومی به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) $3, 8, 15, 24, \ldots$ ب) $0, -3, -8, -15, \ldots$

پاسخ: جملهٔ عمومی دنبالهٔ درجه‌دوم به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ است.

بنابراین:

الف)
$$\begin{cases} t_1 = a + b + c = 3 \\ t_2 = 4a + 2b + c = 8 \\ t_3 = 9a + 3b + c = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow t_n = n^2 + 2n$$

ب)
$$\begin{cases} t_1 = a + b + c = 0 \\ t_2 = 4a + 2b + c = -3 \\ t_3 = 9a + 3b + c = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow t_n = -n^2 + 1$$

درس ۴: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنبالهٔ حسابی

دنباله‌ای که در آن، هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) با اضافه‌شدن عددی ثابت به جملهٔ قبل از خودش به دست آید، یک **دنبالهٔ حسابی** نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، «قدرنسبت دنباله» می‌گویند.

جملهٔ nاُم یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول t_1 و قدرنسبت d به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

مثال: در یک دنبالهٔ حسابی، جملات هشتم و یازدهم به ترتیب ۴۴ و ۶۵ اند. جملهٔ بیستم دنباله را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:

$$\begin{cases} t_8 = t_1 + 7d \\ t_{11} = t_1 + 10d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 7d = 44 \\ t_1 + 10d = 65 \end{cases} \Rightarrow t_1 = -5, d = 7$$

$\Rightarrow t_n = -5 + 7(n-1) \Rightarrow t_{20} = -5 + 7 \times 19 = 128$

واسطهٔ حسابی بین دو عدد یعنی اعدادی را بین این دو عدد بیابیم به طوری که با این دو عدد، تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند.

نکته: واسطهٔ حسابی بین دو عدد a و b برابر است با: $\frac{a+b}{2}$.

دنبالهٔ $a, \frac{a+b}{2}, b$ تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند.

مثال: بین دو عدد ۱۳ و ۶۷، پنج عدد به دست آورید که با این دو عدد تشکیل دنبالهٔ حسابی بدهند.

پاسخ:

$t_1 = 13$

$t_7 = 67 \Rightarrow t_1 + 6d = 67 \Rightarrow d = \frac{67-13}{6} = 9$

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	۵۸	۶۷

مثال: در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع چهار جملهٔ اول ۸۰ و مجموع چهار جملهٔ بعدی آن ۱۹۲ است. دنباله را مشخص کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:

$$\begin{matrix} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 80 \Rightarrow \\ t_5 + t_6 + t_7 + t_8 = 192 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} 4t_1 + 6d = 80 \\ 4t_1 + 22d = 192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 7 \\ t_1 = \frac{19}{2} \end{cases}$$

$t_n = \frac{19}{2} + 7(n-1) \Rightarrow \frac{19}{2}, \frac{33}{2}, \frac{47}{2}, \ldots$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

دنبالهٔ هندسی

دنباله‌ای است که در آن، هر جمله (به‌جز جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبل از خودش در عددی ثابت و غیر صفر به دست می‌آید و این عدد ثابت را «قدرنسبت دنباله» می‌نامیم. جملهٔ اول هم باید غیر صفر باشد.

جملهٔ nاُم دنبالهٔ هندسی به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است که در آن، t_1 جملهٔ اول و r قدرنسبت هستند. $(t_1, r \neq 0)$

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۴ و ۱۹۲ هستند. جملهٔ اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ:

$$\begin{matrix} t_3 = t_1 r^2 \\ t_7 = t_1 r^6 \end{matrix} \Rightarrow \frac{t_7}{t_3} = \frac{r^6}{r^2} = r^4 \Rightarrow \frac{192}{24} = r^4 \Rightarrow r^4 = 18$$

$$r = \sqrt[4]{8} \Rightarrow t_1 = \frac{t_3}{r^2} = \frac{24}{\sqrt[2]{8}} = 3\sqrt{8} = 6\sqrt{2}$$

مثال: پیمان خودرویی را به قیمت ۴۰۰ میلیون تومان خرید. اگر قیمت خودرو در هر سال ۳۰ درصد نسبت به سال قبل کاهش یابد:

الف) بعد از ۵ سال خودرو را به چه قیمتی می‌تواند بفروشد؟

ب) قیمت خودرو را بعد از گذشت n سال به دست آورید.

پاسخ:

الف $t_5 = 400(\frac{7}{10})^5 = 67/228$

ب $t_n = 400(\frac{7}{10})^n$

نکته: واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b برابر است با: $\sqrt{ab}$

مثال: بین اعداد ۷ و ۴۴۸ چهار عدد بیابید به طوری که با این دو عدد تشکیل دنبالهٔ هندسی بدهند.

پاسخ:

$t_1 = 7$

$t_6 = 448 \Rightarrow t_1 r^5 = 448 \Rightarrow r^5 = 64 \Rightarrow r = 2\sqrt[5]{2}$

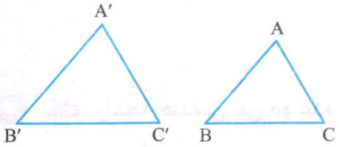
t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
۷	$14\sqrt[5]{2}$	$28\sqrt[5]{4}$	$56\sqrt[5]{8}$	$112\sqrt[5]{16}$	۴۴۸

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

فصل ۲: مثلثات

درس ۱: نسبت‌های مثلثاتی

تشابه دو مثلث با هم متشابه‌اند، هرگاه زوایای نظیر در آن‌ها برابر و نسبت اضلاع متناظر نیز با هم برابر باشند.



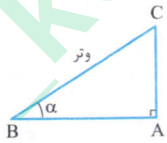
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}, \hat{A} = \hat{A}',$$
$$\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$$

نکته: ۱ هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.

۲ اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مثلث‌های قائم‌الزاویه (رأس‌های A و A′ قائمه) و داشته باشیم $\hat{C} = \hat{C}'$، آن‌گاه $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$.

نسبت‌های مثلثاتی

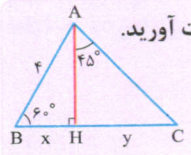
در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.



$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$
$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{AC}{AB}$$
$$\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} = \frac{AB}{AC}$$

رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC: $BC^2 = AC^2 + AB^2$

مثال: در شکل مقابل مقادیر x و y را به دست آورید.



پاسخ:

$$\overset{\Delta}{ABH}: \cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = 2$$

مثلث AHC متساوی‌الساقین است. $\overset{\Delta}{AHC}: \hat{A} = \hat{C} = 45^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow AH = HC$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای °۳۰، °۴۵ و °۶۰

مقدار	sin	cos	tan	cot
°۳۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
°۴۵	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
°۶۰	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$1)\ A = \frac{2\sin^2 60^\circ - \tan 30^\circ}{3\cos^2 30^\circ + 4\cot 45^\circ}$$

$$2)\ B = \frac{1}{\tan^2 60^\circ} - \frac{5\cos 45^\circ}{\sqrt{2}\sin 45^\circ} + 3\sin^3 30^\circ$$

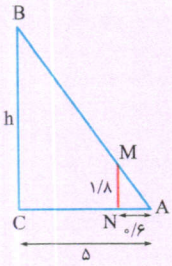
پاسخ:

$$1)\ A = \frac{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{3(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + 4\times 1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{9}{4} + 4} = \frac{18 - 4\sqrt{3}}{75}$$

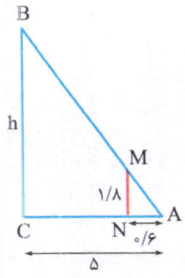
$$2)\ B = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} - \frac{5(\frac{\sqrt{2}}{2})}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}} + 3(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{17 - 60\sqrt{2}}{24}$$

مثال: مینا می‌خواهد ارتفاع یک ساختمان دو طبقه را که طول سایهٔ آن ۵ متر است، حساب کند. قد مینا ۱/۸ متر و طول سایهٔ او در همان لحظه ۰/۶ متر است. ارتفاع ساختمان را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*



پاسخ: با توجه به شکل مقابل در مثلث‌های AMN و ABC داریم:

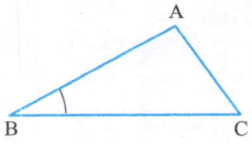


$$\tan\hat{A} = \frac{MN}{AN} = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1/8}{0/6} = \frac{h}{5} \Rightarrow h = 15$$

ارتفاع ساختمان ۱۵ متر است.

مساحت مثلث

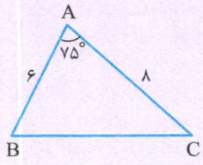


اگر در مثلث ABC طول دو ضلع و اندازهٔ زاویهٔ بین آن‌ها معلوم باشد، آن‌گاه:

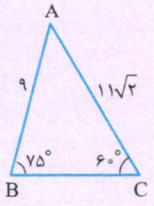
$$\text{مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}\times AB\times BC\times\sin\hat{B}$$

مثال: مساحت مثلث ABC را به دست آورید. $(\sin 75^\circ = 0/96)$ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف)



ب)



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

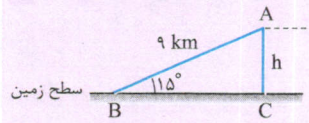
پاسخ:

الف) $S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 75^\circ = 24 \times 0/96 \simeq 23/04$

ب) $\hat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$

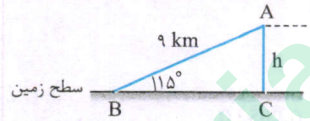
$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{1}{2} \times 9 \times 11\sqrt{2} \times \sin 45^\circ = \frac{99}{2}$

مثال: یک هواپیما با زاویهٔ 15° نسبت به افق، از سطح زمین در حال بلندشدن است. بعد از طی‌کردن مسافت ۹ کیلومتر، به نقطهٔ اوج خود می‌رسد. ارتفاع هواپیما در لحظهٔ رسیدن به اوج، از زمین چه‌قدر است؟ $(\sin 15^\circ = 0/28)$



(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ:

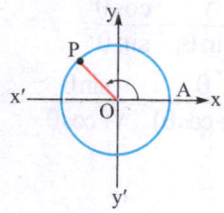


$\sin 15^\circ = \frac{h}{9} \Rightarrow h = 9 \times \sin 15^\circ = 9 \times 0/28 = 2/52$

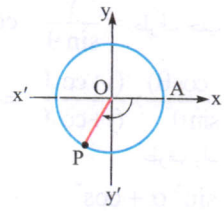
بنابراین هواپیما در نقطهٔ اوج ۲/۵۲ کیلومتر از زمین ارتفاع دارد.

درس ۲: دایرهٔ مثلثاتی

دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم که جهت مثبت آن خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و جهت منفی آن در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

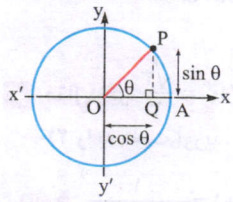


$A\hat{O}P = 135^\circ$



$A\hat{O}P = -120^\circ$

فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه روی دایرهٔ مثلثاتی باشد و θ زاویه‌ای است که نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ می‌سازد. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ θ برابر است با:

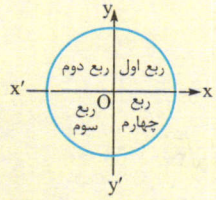


$\sin\theta = PQ, \cos\theta = OQ,$

$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ}, \cot\theta = \frac{OQ}{PQ}$

نکته: فاصلهٔ Q تا مبدأ با $\cos\theta$ برابر است و فاصلهٔ P تا پای عمود با $\sin\theta$ برابر است.

نکته: دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ صفحه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. هر یک از این قسمت‌ها را یک «ناحیه» یا یک «ربع مثلثاتی» می‌نامیم.



نکته: زاویه‌های 0°، 90°، 180°، 270° و 360° زوایای مرزی هستند و آن‌ها را در هیچ‌کدام از ناحیه‌های مشخص‌شده در نظر نمی‌گیریم.

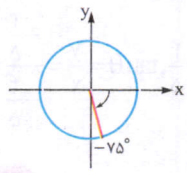
مثال: انتهای کمان مربوط به هر یک از زاویه‌های زیر، در کدام‌یک از نواحی قرار دارد؟ (مشابه کتاب درسی)

الف) -75° ب) 165°

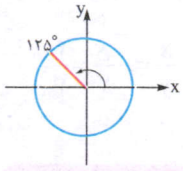
پ) -95° ت) 290°

پاسخ:

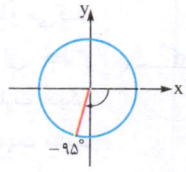
الف) ربع چهارم



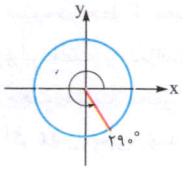
ب) ربع دوم



پ) ربع سوم



ت) ربع چهارم



نسبت‌های مثلثاتی زوایای 0°، 90°، 180°، 270° و 360°:

مقدار	0°	90°	180°	270°	360°
sin	صفر	۱	صفر	−۱	صفر
cos	۱	صفر	−۱	صفر	۱
tan	صفر	تعریف‌نشده	صفر	تعریف‌نشده	صفر
cot	تعریف‌نشده	صفر	تعریف‌نشده	صفر	تعریف‌نشده

نکته:

۱) $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Leftarrow \alpha$ در ربع اول

۲) $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Leftarrow \alpha$ در ربع دوم

۳) $180^\circ < \alpha < 270^\circ \Leftarrow \alpha$ در ربع سوم

۴) $270^\circ < \alpha < 360^\circ \Leftarrow \alpha$ در ربع چهارم

نکته:

مقدار	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

مثال: اگر $\cot\alpha \sin\alpha < 0$ و $\cos\alpha \sin\alpha > 0$ باشد، α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی قرار دارد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ:

$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\sin\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha < 0 \quad (I)$

$\cos\alpha \sin\alpha > 0 \xrightarrow{(I)} \sin\alpha < 0 \quad (II)$

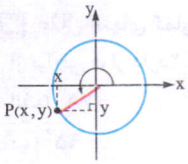
از (I) و (II) نتیجه می‌شود α در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

نکته: برای هر زاویهٔ دلخواه θ، $-1 \le \sin\theta \le 1$ و $-1 \le \cos\theta \le 1$.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال: اگر α در ناحیهٔ سوم مثلثاتی و $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:



$\sin\alpha = y = -\frac{3}{5}$

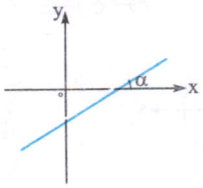
طبق رابطهٔ فیثاغورس، در مثلث قائم‌الزاویه داریم: $x^2 + y^2 = 1$

بنابراین $x^2 = \frac{16}{25}$؛ پس $x = -\frac{4}{5}$.

چون θ زاویه‌ای در ربع سوم است، $x < 0$ است. حال داریم:

$$\cos\theta = x = -\frac{4}{5}, \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}, \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

رابطهٔ شیب خط با تانژانت زاویه



شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویهٔ بین آن خط و جهت مثبت محور افقی. به عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه:

شیب خط $= \tan\alpha$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که زاویهٔ آن با جهت مثبت محور xها 30° و از نقطهٔ $A(3,-1)$ نیز بگذرد. *(مشابه کتاب درسی)*

پاسخ:

$$m = \tan\alpha = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - (\sqrt{3} + 1)$$

درس ۳: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱ اگر α زاویهٔ دلخواهی باشد، همواره داریم: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

۲ رابطهٔ تانژانت برحسب کسینوس:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$$

۳ رابطهٔ کتانژانت برحسب سینوس:

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)$$

۴ $\tan\alpha . \cot\alpha = 1$

مثال: اگر α در ناحیهٔ دوم مثلثاتی و $\tan\alpha = -\frac{6}{5}$ باشد، آن‌گاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ α را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{61} \xrightarrow[\cos\alpha<0]{90^\circ<\alpha<180^\circ} \cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{61} = \frac{36}{61}$$

$$\xrightarrow[\sin\alpha>0]{90^\circ<\alpha<180^\circ} \sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{61}}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{5}{6}$$

اتحاد مثلثاتی

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم بین دو عبارت مثلثاتی یک تساوی یا اتحاد مثلثاتی برقرار است، می‌توانیم یک طرف تساوی را بنویسیم و با توجه به روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، به طرف دیگر برسیم.

نکته: به کمک اتحاد مزدوج داریم:

۱ $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

۲ $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$

مثال: درستی هر یک از اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید. *(مشابه مثال کتاب درسی)*

الف) $1 - \frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \cos\alpha$

ب) $\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 2\cos\alpha\sin\alpha$

پ) $\frac{1}{\sin\theta} - \cot\theta = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

ت) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

پاسخ:

الف) طرف چپ $= 1 - \frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$

$= \frac{\cos^2\alpha+\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha(\cos\alpha+1)}{1+\cos\alpha} = \cos\alpha =$ طرف راست

ب) طرف چپ $= \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = 2\tan\alpha \times \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$

$= 2\tan\alpha\cos^2\alpha = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \cos^2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$=$ طرف راست

پ) طرف چپ $= \frac{1}{\sin\theta} - \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \times \frac{(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)} = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$=$ طرف راست

ت) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\xrightarrow[\text{می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}} (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1$

$\Rightarrow \sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

مثال: اگر $\tan 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$، آن‌گاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویهٔ 210° را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ:

$$\tan^2 210^\circ + 1 = \frac{1}{\cos^2 210^\circ} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 210^\circ}$$

$$\Rightarrow \cos^2 210^\circ = \frac{3}{4} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos 210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 210^\circ = 1 - \cos^2 210^\circ = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cot 210^\circ = \frac{1}{\tan 210^\circ} \Rightarrow \cot 210^\circ = \sqrt{3}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

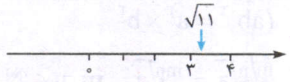
فصل ۳ : توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درس ۱: ریشه و توان

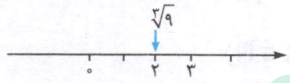
ریشه و توان رابطهٔ دوسویه با هم دارند، مثلاً:

$(-۴)^۳ = -۶۴ \Leftrightarrow \sqrt[۳]{-۶۴} = -۴$

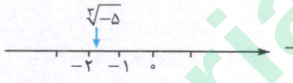
ریشهٔ عددها را می‌توانیم به طور تقریبی روی محور اعداد نشان دهیم:



$۹ < ۱۱ < ۱۶ \Rightarrow ۳ < \sqrt{۱۱} < ۴$



$۸ < ۹ < ۲۷ \Rightarrow ۲ < \sqrt[۳]{۹} < ۳$



$-۸ < -۵ < -۱ \Rightarrow -۲ < \sqrt[۳]{-۵} < -۱$

نکته: هر عدد مثبت دارای دو ریشهٔ زوج است که قرینهٔ یکدیگرند. عددهای منفی ریشهٔ زوج ندارند. برای nهای زوج داریم:

$a > ۰ \ , \ x^n = a \Rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a} \quad (n \in \mathbb{N})$

نکته: هر عدد مثبت یا منفی دارای یک ریشهٔ فرد است. اگر عدد مثبت باشد، ریشهٔ فرد آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشهٔ فرد آن منفی است.

برای nهای فرد: $x^n = a \Rightarrow x = \sqrt[n]{a} \quad (n \in \mathbb{N})$

مثال: ریشه‌های ششم و هفتم اعداد زیر را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$-۱۲۸, ۸, -۲۷\sqrt{۳}, ۲۱۶$

پاسخ: اعداد منفی ریشهٔ ششم ندارند و اعداد مثبت دو ریشهٔ مرتبهٔ ششم دارند.

عدد	-۱۲۸	۸	$-۲۷\sqrt{۳}$	۲۱۶
ریشهٔ ششم	x	$\pm\sqrt[۶]{۸}$	x	$\pm\sqrt[۶]{۲۱۶}$
ریشهٔ هفتم	$\sqrt[۷]{-۱۲۸} = -۲$	$\sqrt[۷]{۸}$	$\sqrt[۷]{-۲۷\sqrt{۳}} = -\sqrt{۳}$	$\sqrt[۷]{۲۱۶}$

مثال: ریشهٔ پنجم عددی با خودش برابر است. آن عدد را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ: $\sqrt[۵]{a} = a \Rightarrow a = -۱, ۰, ۱$

نکته:

۱) $۰ < a < ۱ \Rightarrow ۰ < a < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۴]{a} < \cdots < ۱$

۲) $a > ۱ \Rightarrow ۱ < \cdots < \sqrt[۳]{a} < \sqrt{a} < a$

۳) $-۱ < a < ۰ \Rightarrow \cdots < \sqrt[۵]{a} < \sqrt[۳]{a} < a < ۰$

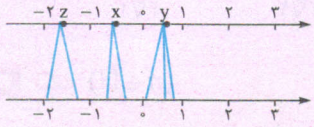
۴) $a < -۱ \Rightarrow a < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۵]{a} < \sqrt[۷]{a} < \cdots$

مثال: اگر $-۱ < a < ۰$ باشد، در این صورت ریشه‌های سوم و چهارم و پنجم a را با هم مقایسه کنید.

پاسخ: چون a منفی است، بنابراین ریشهٔ چهارم ندارد:

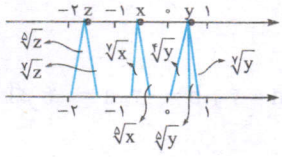
$-۱ < a < ۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{a} > \sqrt[۵]{a}, \sqrt[۴]{a} \notin \mathbb{R}$

مثال: اعداد x، y و z در محور پایین، به ریشه‌های چهارم، پنجم و هفتم خود وصل شده‌اند. مشخص کنید هر کدام از پاره‌خط‌ها مربوط به کدام ریشه است.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ: x و z منفی هستند؛ بنابراین ریشه‌های چهارم ندارند:



مثال: الف) اگر a ریشهٔ منفی ششم ۶۴ باشد، حاصل $a^۳ + ۲a$ برابر است با .....

ب) $(۰/۳)^۵ \bigcirc (۰/۳)^۷$ پ) $(-۰/۶)^۵ \bigcirc (-۰/۶)^۳$

پاسخ: الف) ریشهٔ ششم ۶۴ برابر $\pm\sqrt[۶]{۶۴} = \pm ۲$؛ بنابراین $a = -۲$.

حال داریم: $a^۳ + ۲a = (-۲)^۳ + ۲(-۲) = -۱۲$

ب) $(-۰/۶)^۳ < (-۰/۶)^۵$ پ) $(۰/۳)^۷ < (۰/۳)^۵$

درس ۲: ریشهٔ nاُم عدد a

a > ۰	n زوج	a دارای دو ریشهٔ nاُم $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$
	n فرد	a دارای یک ریشهٔ nاُم $\sqrt[n]{a}$
a < ۰	n زوج	a ریشهٔ زوج ندارد.
	n فرد	a دارای یک ریشهٔ nاُم $\sqrt[n]{a}$

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید. (مشابه کتاب درسی)

الف) $-\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱}$ ب) $\sqrt[۷]{۰}$

پ) $\sqrt[۱۱]{-۱}$ ت) $\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۲۴۳}}$

پاسخ: الف) $\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱} = -۰/۱$ ب) $\sqrt[۷]{۰} = ۰$

پ) $\sqrt[۱۱]{-۱} = -۱$ ت) $\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۲۴۳}} = -\frac{۱}{۳}$

نکته: وقتی می‌نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n را زوج فرض می‌کنیم، a را مثبت یا برابر صفر در نظر می‌گیریم.

ویژگی‌های رادیکال

۱) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{ab} & \text{زوج } n \text{ و } a, b \geq ۰ \\ \sqrt[n]{ab} & \text{فرد } n \text{ دلخواه و } a, b \end{cases}$

۲) $\sqrt[k]{a^m} = (\sqrt[k]{a})^m$ اگر k زوج باشد، a باید مثبت باشد.

۳) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{فرد } n \\ |a| & \text{زوج } n \end{cases}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(\sqrt[7]{3})^4 \times \sqrt[7]{27}$ ب) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^{12}}}$

پ) $\dfrac{\sqrt[5]{27}\times\sqrt[5]{18}}{2\sqrt[5]{2}}$

پاسخ:

الف) $\sqrt[7]{3^4}\times\sqrt[7]{3^3}=\sqrt[7]{3^7}=3$

ب) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{(5^3)^4}}=\sqrt[4]{(\sqrt[3]{5^3})^4}=\sqrt[4]{5^4}=5$

پ) $\dfrac{\sqrt[5]{3^3}\times\sqrt[5]{3^2\times 2}}{2\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^3}\times\sqrt[5]{3^2}\times\sqrt[5]{2}}{2\sqrt[5]{2}}=\dfrac{\sqrt[5]{3^5}\times\sqrt[5]{2}}{2\sqrt[5]{2}}=\dfrac{3}{2}$

نکته: $(n\in\mathbb{N})$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & \text{فرد } n \text{ و } b\neq 0\\[2mm] \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} & a,b \text{ مثبت و } n \text{ زوج}\end{cases}$$

اگر $a=-4$، $b=-3$ و $n=4$ آن‌گاه: $\sqrt[4]{\dfrac{-4}{-3}}\neq\dfrac{\sqrt[4]{-4}}{\sqrt[4]{-3}}$

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) $\sqrt[6]{(-4)^6}$ ب) $\sqrt[7]{3^{-7}}$

پاسخ:

الف) $\sqrt[6]{(-4)^6}=|-4|=4$ ب) $\sqrt[7]{3^{-7}}=\sqrt[7]{(\frac{1}{3})^7}=\frac{1}{3}$

درس ۳: توان‌های گویا

برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$، توان $\frac{1}{n}$ عدد مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\quad,\quad n\geq 2, a>0$$

مثلاً: $2^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}, 32^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{32}=2$

نکته: اگر $a<0$، $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف نمی‌شود.

هرگاه $a>0$ باشد، برای هر دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

اگر $a>0$ و m و n دو عدد طبیعی باشند، $a^{\frac{m}{n}}$ به صورت زیر هم تعریف می‌شود: $a^{\frac{m}{n}}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(a^m)^{\frac{1}{n}}$

بنابراین $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$، هم‌چنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود: $a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(مشابه سخت‌تر تمرین کتاب درسی)

الف) $\sqrt[5]{(3+\sqrt{7})^5}\times\sqrt[6]{(3-\sqrt{7})^6}$ ب) $(12^{\frac{1}{4}})^{\frac{3}{2}}$

پ) $\sqrt[24]{25^6}$ ت) $\sqrt{\sqrt[3]{243}}$

پاسخ:

الف) $(3+\sqrt{7})^{\frac{5}{5}}\times(3-\sqrt{7})^{\frac{6}{6}}=(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=9-7=2$

ب) $12^{\frac{3}{8}}=\sqrt[8]{12^3}$

پ) $25^{\frac{6}{24}}=25^{\frac{1}{4}}=(5^2)^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

ت) $\sqrt{(243)^{\frac{1}{3}}}=((3^5)^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{3^5}$

اگر r و s دو عدد گویا باشند و a و b اعدادی مثبت باشند، داریم:

۱) $a^r\times a^s=a^{r+s}$ ۲) $(ab)^r=a^r\times b^r$

۳) $(a^r)^s=a^{rs}$ ۴) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\quad m,n\in\mathbb{N}$

۵) $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}\quad (m,n,k\in\mathbb{N})$

۶) $\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(مشابه سخت‌تر تمرین کتاب درسی)

الف) $2\sqrt[5]{\sqrt[8]{64}}-5\sqrt[8]{625}$ ب) $\sqrt[4]{\dfrac{256}{81}}+\sqrt[3]{\dfrac{125}{-216}}$

پاسخ:

الف) $2\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^6}}}-5\sqrt[8]{5^4}=2\sqrt[5]{2^3\times 2^2}-5\sqrt{5}$

$=2\sqrt[5]{2^5}-5\sqrt{5}=4-5\sqrt{5}$

ب) $\sqrt[4]{\dfrac{2^8}{3^4}}+\sqrt[3]{\dfrac{5^3}{-6^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^8}}{\sqrt[4]{3^4}}+\dfrac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{-6^3}}=\dfrac{2^2}{3}+\dfrac{5}{-6}=\dfrac{3}{6}$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $\sqrt[7]{3\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3\sqrt[4]{3}}}}$ ب) $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[5]{5}}}$

پاسخ: الف) از داخلی‌ترین رادیکال شروع می‌کنیم:

$3\sqrt[4]{3}=3\times 3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{5}{4}}$

$3\underbrace{\sqrt[5]{3\sqrt[4]{3}}}_{3^{\frac{5}{4}}}=3\times(3^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{5}}=3\times 3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{5}{4}}$

$3\underbrace{\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3\sqrt[4]{3}}}}_{3^{\frac{5}{4}}}=3((3)^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{6}}=3\times 3^{\frac{5}{24}}=3^{\frac{29}{24}}$

$\underbrace{\sqrt[7]{3\sqrt[6]{3\sqrt[5]{3\sqrt[4]{3}}}}}_{3^{\frac{29}{24}}}=(3^{\frac{29}{24}})^{\frac{1}{7}}=3^{\frac{29}{168}}$

ب) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[5]{5}}=\dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{5}}}=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}=5^{\frac{2}{15}}$

$\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[5]{5}}}=\sqrt[4]{5^{\frac{2}{15}}}=(5^{\frac{2}{15}})^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{30}}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

درس ۴: عبارت‌های جبری

اتحادها

۱) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ اتحاد دوجمله‌ای

۲) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

۳) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

۴) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

۵) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

۶) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$

۷) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

۸) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

مثال: عبارت‌های زیر را تجزیه کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) $64x^3 - 27$ ب) $2a^3 - ba^2 + 2ab - b^2$

پاسخ:

الف) $(4x)^3 - 3^3 = (4x-3)((4x)^2 + 12x + 9)$

ب) $a^2(2a-b) + b(2a-b) = (2a-b)(a^2+b)$

کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت‌های جبری (ک.م.م)

برای به دست آوردن ک.م.م ابتدا باید عبارت‌های جبری را تا حد ممکن تجزیه کنیم، سپس عوامل مشترک با بیشترین توان را در عوامل غیرمشترک ضرب می‌کنیم تا ک.م.م به دست آید.

مثال: کوچک‌ترین مضرب مشترک $x^4 + 2x^2 + 1$ و $x^4 - 1$ را به دست آورید.

پاسخ:

$x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2+1)^2$

$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1)$

$$\Rightarrow [x^4-1, x^4+2x^2+1] = \underbrace{(x^2+1)^2}_{\text{عامل مشترک با بیشترین توان}}\overbrace{(x^2-1)}^{\text{عامل غیرمشترک}}$$

مثال: حاصل‌جمع کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید. *(مشابه کتاب درسی)*

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{2x+3} + \frac{1}{4x^2-9}$$

پاسخ: $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x+3)$؛ پس ک.م.م مخرج هر سه کسر برابر $4x^2 - 9$ است؛ بنابراین:

$$\frac{(2x+3)+(2x-3)+1}{4x^2-9} = \frac{4x+1}{4x^2-9}$$

گویاکردن مخرج کسرها

برای گویاکردن مخرج کسرهایی که شامل یک عبارت رادیکالی هستند، می‌توانیم آن کسر را در یک عبارت رادیکالی مناسب ضرب و تقسیم کنیم تا مخرج کسر گویا شود.

نکته: ۱) برای گویاکردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{a}}$ صورت و مخرج را در $\sqrt{a}$ ضرب می‌کنیم. برای گویاکردن مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ صورت و مخرج کسر را در $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$ ضرب می‌کنیم.

۲) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$

دو عبارت $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ و $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ مزدوج یکدیگر هستند و از این روش می‌توانیم برای گویاکردن کسرها استفاده کنیم.

۳) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a - b$

$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}) = a + b$

از اتحادهای مجموع و تفاضل مکعب می‌توانیم برای گویاکردن کسرهایی مانند $\frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$ و $\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$ استفاده کنیم.

مثال: مخرج کسرهای زیر را گویا کنید. *(مشابه سخت‌تر تمرین کتاب درسی)*

الف) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ب) $\frac{3}{\sqrt[5]{a^2}}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{8}}}$ ت) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

ث) $\frac{x+8}{\sqrt[3]{x^2}+4}$ ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}}$

پاسخ:

الف) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

ب) $\frac{3}{\sqrt[5]{a^2}} \times \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{3\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \frac{3\sqrt[5]{a^3}}{a}$

پ) $\frac{1}{\sqrt[3]{4-\sqrt{8}}} \times \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{4+\sqrt{8}}} = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{16-8}} = \frac{\sqrt[3]{4+\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{8}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{4+\sqrt{8}}$

ت) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$

$= \sqrt{x} - \sqrt{y}$

ث) $\frac{x+8}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{64}} \times \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{64x^2} + \sqrt[3]{64^2}}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{64x^2} + \sqrt[3]{64^2}}$

$= \frac{(x+8)(x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 16)}{x^2 + 64}$

ج) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}} \times \frac{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^4})}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x^4})}$

$= \frac{(\sqrt[3]{x^2} + x + x\sqrt[3]{x})}{x - x^2}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال: با استفاده از اتحادها حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) ۱۷×۷ ب) $۹۹۹^۳ , ۹۹۹^۲$

پ) $(۱/۰۱)^۲$ ت) $(۰/۹۹)^۲$

پاسخ:

الف) $۱۷\times۷=(۱۲+۵)(۱۲-۵)=۱۲^۲-۵^۲$

$=۱۴۴-۲۵=۱۱۹$

ب) $۹۹۹^۳=(۱۰۰۰-۱)^۳=(۱۰۰۰)^۳-۳(۱۰۰۰)^۲+۳(۱۰۰۰)-۱^۳$

$=۹۹۷۰۰۲۹۹۹$

$۹۹۹^۲=(۱۰۰۰-۱)^۲=(۱۰۰۰)^۲-۲(۱۰۰۰)+۱$

$=۱۰۰۰۰۰۰-۲۰۰۰+۱=۹۹۸۰۰۱$

پ) $(۱/۰۱)^۲=(۱+۰/۰۱)^۲=۱^۲+۲(۰/۰۱)+(۰/۰۱)^۲$

$=۱+۰/۰۲+۰/۰۰۰۱=۱/۰۲۰۱$

ت) $(۰/۹۹)^۲=(۱-۰/۰۱)^۲=۱^۲-۲(۰/۰۱)+(۰/۰۱)^۲$

$=۱-۰/۰۲+۰/۰۰۰۱=۰/۹۸۰۱$

مثال: اگر $\sqrt{۲x^۳+۶}-\sqrt{۲x^۳-۹}=۵$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{۲x^۳+۶}+\sqrt{۲x^۳-۹}$ را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ: از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $\sqrt{۲x^۳+۶}+\sqrt{۲x^۳-۹}=A$. حال طرفین دو تساوی را در هم ضرب می‌کنیم.

$$(\sqrt{۲x^۳+۶}-\sqrt{۲x^۳-۹})(\sqrt{۲x^۳+۶}+\sqrt{۲x^۳-۹})=۵\times A$$

$$((۲x^۳+۶)-(۲x^۳-۹))=۵\times A$$

$$\Rightarrow ۱۵=۵\times A \Rightarrow A=۳$$

بنابراین: $\sqrt{۲x^۳+۶}+\sqrt{۲x^۳-۹}=۳$

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

فصل ۴: معادله‌ها و نامعادله‌ها

درس ۱: معادلهٔ درجه‌دوم و روش‌های مختلف حل آن

هر معادله به شکل $ax^2+bx+c=0$,$(a\neq 0)$ که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادلهٔ درجه‌دوم می‌نامیم. روش‌های حل معادلهٔ درجه‌دوم عبارت‌اند از:

۱. حل معادلهٔ درجه‌دوم به روش تجزیه

تجزیهٔ یک عبارت به معنای تبدیل آن به حاصل‌ضرب حداقل دو عبارت است.

تجزیه‌هایی که در حل معادلهٔ درجه‌دوم استفاده می‌شوند عبارت‌اند از:

۱ فاکتورگیری: $ax^2+bx=x(ax+b)$

۲ تجزیه به کمک اتحاد مزدوج: $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

۳ تجزیه به کمک اتحاد جمله‌مشترک:

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

نکته: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB=0$، آن‌گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است؛ یعنی:

$$AB=0 \Rightarrow A=0 \text{ یا } B=0$$

مثال: معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید. *(مشابه کتاب درسی)*

الف) $5t^2-25t=0$ ب) $2x^2-6x=-(8-x^2)$

پاسخ:

الف) $5t(t-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} 5t=0 \Rightarrow t=0 \\ t-5=0 \Rightarrow t=5 \end{cases}$

ب) $2x^2-6x=-8+x^2 \Rightarrow x^2-6x+8=0$

$$\Rightarrow (x-2)(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} (x-2)=0 \Rightarrow x=2 \\ (x-4)=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

۲. حل معادلهٔ درجه‌دوم به کمک ریشه‌گیری

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $x^2=a$ عبارت‌اند از: $x=-\sqrt{a}\,,x=\sqrt{a}$

مثال: هر یک از معادله‌های زیر را با ریشهٔ دوم گرفتن حل کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) $(5k-7)^2=9$ ۲) $x^2-10x=-9$

پاسخ:

۱) $\begin{cases} 5k-7=\sqrt{9}=3 \Rightarrow k=2 \\ 5k-7=-\sqrt{9}=-3 \Rightarrow k=\frac{4}{5} \end{cases}$

۲) $x^2-10x+9=0 \Rightarrow x^2-10x+25-16=0$

$$\Rightarrow (x-5)^2=16 \Rightarrow \begin{cases} x-5=4 \Rightarrow x=9 \\ x-5=-4 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

۳. حل معادلهٔ درجه‌دوم به روش مربع کامل

در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ مراحل زیر را اجرا می‌کنیم:

۱ تقسیم بر a: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$

۲ عدد ثابت را به راست می‌بریم: $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$

۳ مجذور نصف ضریب x را به طرفین اضافه می‌کنیم:

$$x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$$

۴ با توجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای خواهیم داشت:

$$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

در نهایت، اگر عدد سمت راست تساوی نامنفی بود، از طرفین جذر می‌گیریم.

مثال: معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) $3x(3x+10)=-18$ ب) $r^2-5r+6=0$

پاسخ:

الف) $9x^2+30x+18=0 \xrightarrow{\div 9} x^2+\frac{10}{3}x+2=0$

$$\Rightarrow x^2+\frac{10}{3}x=-2 \xrightarrow{+(\frac{10}{6})^2} x^2+\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}=\frac{25}{9}-2$$

$$\Rightarrow (x+\frac{10}{6})^2=\frac{25}{9}-2=\frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+\frac{10}{6}=\frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{10}{6} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{7}-5}{3} \\ x+\frac{10}{6}=-\frac{\sqrt{7}}{3} \rightarrow x=-\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{10}{6} \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{7}-5}{3} \end{cases}$$

ب) $r^2-5r+6=0 \Rightarrow r^2-5r=-6$

$$\xrightarrow{+(-\frac{5}{2})^2} r^2-5r+(\frac{5}{2})^2=-6+(-\frac{5}{2})^2 \Rightarrow (r-\frac{5}{2})^2$$

$$=\frac{25}{4}-6=\frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} r-\frac{5}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow r=\frac{6}{2}=3 \\ r-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow r=\frac{4}{2}=2 \end{cases}$$

۴. حل معادلهٔ درجه‌دوم به روش فرمول کلی

برای حل معادلات درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ که در آن $a\neq 0$ است، به روش فرمول کلی ابتدا باید دلتا (Δ) را در معادله به دست آوریم:

$$\Delta=b^2-4ac$$

۱ اگر $\Delta<0$ باشد، معادلهٔ درجه‌دوم ریشه ندارد.

۲ اگر $\Delta=0$ باشد، معادله تنها یک ریشه به صورت $x=-\frac{b}{2a}$ دارد.

۳ اگر $\Delta>0$ باشد، معادله دو ریشه به صورت $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ دارد.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال: معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.
(مشابه تمرین کتاب درسی)

الف) $5x^2-3x+2=0$ ب) $-\frac{1}{2}x^2+3x-4=0$

پ) $a^2-\sqrt{17}a=8$ ت) $\frac{r^2}{4}-\frac{r}{3}+\frac{4}{3}=0$

پاسخ:

الف) $\Delta=(-3)^2-4(5)(2)=9-40=-31$

$\xrightarrow{\Delta<0}$ معادله ریشه ندارد.

ب) $\Delta=3^2-4(-\frac{1}{2})(-4)=9-8=1 \xrightarrow{\Delta>0} x=\frac{-3\pm1}{-1}$

$\Rightarrow x=4, x=2$

پ) $a^2-\sqrt{17}a-8=0 \Rightarrow \Delta=(-\sqrt{17})^2-4(1)(-8)=49$

$\xrightarrow{\Delta>0} x=\frac{\sqrt{17}\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{\sqrt{17}\pm7}{2}$

ت) $\Delta=(-\frac{1}{3})^2-4(\frac{1}{4})(\frac{4}{3})=\frac{1}{9}-\frac{4}{3}=-\frac{11}{9}$

$\xrightarrow{\Delta<0}$ معادله ریشه ندارد.

مثال: اختلاف سنی پویا و پدرش ۲۴ سال است. ۹ سال بعد، حاصل‌ضرب سن پویا و پدرش ۳۸۵ می‌شود. سن پدر پویا را به دست آورید.
(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ: سن پویا را با a و سن پدرش را با b نمایش می‌دهیم:

$b=a+24 \quad , \quad (b+9)(a+9)=385$

$\xrightarrow{a=b-24} (b+9)(b-15)=385$

$\Rightarrow b^2-6b-135=385 \Rightarrow b^2-6b-520=0$

$\Rightarrow \Delta=(-6)^2-4(1)(-520)=2116$

$\Rightarrow b=\frac{6\pm\sqrt{2116}}{2}=\frac{6\pm46}{2} \xrightarrow{b>0} b=26$

درس ۲: سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y=ax^2+bx+c$ را که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و $a\neq0$، یک سهمی می‌گوییم که به یکی از دو صورت روبه‌رو است:

نقطهٔ S را در شکل‌های بالا رأس سهمی می‌گوییم.

اگر $a>0$ باشد، S پایین‌ترین نقطهٔ سهمی و اگر $a<0$ باشد، S بالاترین نقطهٔ سهمی است. هم‌چنین خط عمودی که از رأس سهمی می‌گذرد، خط تقارن سهمی نامیده می‌شود.

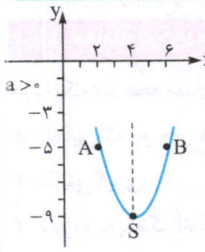
نکته: معادلهٔ خط تقارن سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ و مختصات رأس سهمی نقطهٔ $S(-\frac{b}{2a},\frac{-\Delta}{4a})$ است.

برای رسم سهمی، از مختصات رأس سهمی و دو نقطه در دو طرف رأس کمک می‌گیریم.

مثال: نمودار معادلهٔ $y=x^2-8x+7$ را رسم کنید.
(مشابه تمرین کتاب درسی)

پاسخ:

x	$y=x^2-8x+7$	(x,y)	
۲	$y=4-16+7=-5$	$A(2,-5)$	
۴	$y=16-32+7=-9$	$(4,-9)$	مختصات رأس سهمی
۶	$y=36-48+7=-5$	$B(6,-5)$	



$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-8}{2}=4$

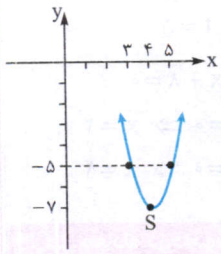
توجه: نقاطی از سهمی که عرض یکسان دارند، نسبت به خط تقارن قرینه‌اند.

نکته: هر سهمی به صورت $y=a(x-h)^2+k$ که $a\neq0$ است، رأسی به مختصات (h,k) و خط تقارنی با معادلهٔ $x=h$ دارد.

مثال: معادلهٔ محور تقارن و مختصات رأس سهمی $y=2(x-4)^2-7$ را به دست آورید و سپس نمودار سهمی را رسم کنید.
(مشابه کتاب درسی)

پاسخ: خط تقارن سهمی به معادلهٔ $x=4$ و رأس سهمی نقطهٔ $(4,-7)$ است.

$a>0$، بنابراین سهمی مینیمم دارد؛ یعنی رأس سهمی پایین‌ترین نقطهٔ سهمی است.



x	$y=2(x-4)^2-7$
۳	$y=-5$
۵	$y=-5$

مثال: الف) اگر نقاط $(3,11)$ و $(-1,11)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادلهٔ خط تقارن این سهمی را به دست آورید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

ب) نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۶- و محور xها را در نقاط ۱- و ۳ قطع کرده است. معادلهٔ این سهمی را بنویسید و سهمی را رسم کنید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ: الف) نقاط $(3,11)$ و $(-1,11)$ عرض یکسان دارند؛ بنابراین نسبت به خط تقارن قرینه‌اند؛ بنابراین طول رأس سهمی برابر است با میانگین طول‌های این دو نقطه و معادلهٔ محور تقارن برابر است با:

$x_S=\frac{-1+3}{2}=1$

ب) سه نقطهٔ $(0,-6)$، $(-1,0)$ و $(3,0)$ روی منحنی قرار دارند؛ بنابراین:

$(0,-6) \Rightarrow -6=a\times0+b\times0+c \Rightarrow c=-6$

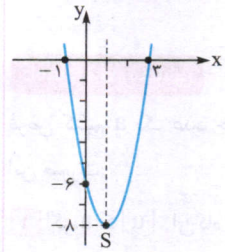
$(-1,0) \Rightarrow 0=a(-1)^2+b(-1)+c$

$\Rightarrow a-b-6=0 \Rightarrow a-b=6$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

$(۳,۰) \Rightarrow ۰=a(۳)^۲+b\times ۳+c \Rightarrow ۹a+۳b-۶=۰$

$\Rightarrow ۹a+۳b=۶ \Rightarrow ۳a+b=۲$



$\begin{cases} a-b=۶ \\ ۳a+b=۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=-۴ \end{cases}$

بنابراین: $y=۲x^۲-۴x-۶$

رأس سهمی برابر است با:

$x_S=-\frac{-۴}{۴}=۱$ و $y_S=-۸$

درس ۳: تعیین علامت

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌اول $y=ax+b$

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$y=ax+b$	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

مثال: هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید. *(مشابه سخت‌تر تمرین کتاب درسی)*

الف) $A=\frac{(۲x-۱)(x+۳)}{x^۲(۵-x)}$ ب) $B=(۶x-۴)^۳(x-۱۶)^۲$

پاسخ: هر کدام از عبارت‌های درجه‌اول را تعیین علامت می‌کنیم:

الف

x		-۳		۰		$\frac{۱}{۲}$		۵	
$x+۳$	−	۰	+		+		+		+
$۲x-۱$	−		−		−	۰	+		+
$x^۲$	+		+	۰	+		+		+
$۵-x$	+		+		+		+	۰	−
A	+	۰	−	ت.ن	−	۰	+	ت.ن	−

- عبارت کسری در ریشه‌های مخرج تعریف‌نشده است (ت.ن).
- عبارت $x^۲$ همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است؛ بنابراین تأثیری در علامت عبارت A ندارد، فقط در $x=۰$ عبارت A تعریف‌نشده است.

ب

x		$\frac{۴}{۶}$		۱۶	
$(۶x-۴)^۳$	−	۰	+		+
$(x-۱۶)^۲$	+		+	۰	+
B	−	۰	+	۰	+

- عبارت $(x-۱۶)^۲$ همواره نامنفی است؛ بنابراین تأثیری در علامت عبارت B ندارد.

تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌دوم $P(x)=ax^۲+bx+c$

۱ اگر معادلهٔ $P(x)=۰$ دارای دو ریشهٔ $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۱<x_۲)$ باشد (یعنی $\Delta>۰$)، آن‌گاه:

x		$x_۱$		$x_۲$	
$P(x)$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

۲ اگر معادلهٔ $P(x)=۰$ ریشهٔ مضاعف برابر $x_۱$ داشته باشد $(\Delta=۰)$، می‌توانیم $P(x)$ را به شکل $P(x)=a(x-x_۱)^۲$ بنویسیم. آن‌گاه:

x		$x_۱$	
$P(x)$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳ اگر $\Delta<۰$ باشد، در این صورت معادلهٔ $P(x)=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد:

x	برای هر $x\in\mathbb{R}$
$P(x)$	موافق علامت a

مثال: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید. *(مشابه کتاب درسی)*

الف) $A=\frac{x^۲-۶x+۱۲}{-۲x^۲-۵x+۳}$ ب) $B=(۲x^۲-۳۲)(۶x+۴۲)$

پاسخ:

الف (۱) $x^۲-۶x+۸=۰ \Rightarrow \Delta=(-۶)^۲-۴\times ۱۲=۳۶-۴۸<۰$

معادله همواره مثبت است. $\Rightarrow a=۱>۰$ و معادله ریشه ندارد. $\Rightarrow$

(۲) $-۲x^۲-۵x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=(-۵)^۲-۴(-۲)\times ۳=۴۹>۰$

$\Rightarrow x_{۱,۲}=\frac{۵\pm ۷}{-۴} \Rightarrow x_۱=-۳, x_۲=\frac{۱}{۲}, a=-۲<۰$

x		-۳		$\frac{۱}{۲}$	
(۱)	+		+		+
(۲)	−	۰	+	۰	−
A	−	ت.ن	+	ت.ن	−

عبارت A در ریشه‌های مخرج تعریف‌نشده است.

ب (۱) $۲x^۲-۳۲=۰ \Rightarrow x^۲=۱۶ \Rightarrow x=\pm ۴, a=۲$

$\Rightarrow ۲x^۲-۳۲=۲(x-۴)(x+۴)$

(۲) $۶x+۴۲=۰ \Rightarrow x=-۷$

x		-۷		-۴		۴	
(۱)	+		+	۰	−	۰	+
(۲)	−	۰	+		+		+
B	−	۰	+	۰	−	۰	+

نامعادله

برای حل نامعادله‌ها می‌توانیم از خواص جمع و ضرب در نامعادله‌ها استفاده کنیم.

۱ اگر $A<B$، آن‌گاه $A+C<B+C$.

۲ اگر $A>B, C>۰$، آن‌گاه $AC>BC$.

۳ اگر $A>B, C<۰$، آن‌گاه $AC<BC$.

مثال: مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $\frac{۳x^۲-۵x+۲}{۳x+۷}<۰$ را به شکل بازه بنویسید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ: (۱) $۳x^۲-۵x+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۲۵-۲۴=۱$

$\Rightarrow x_۱, x_۲=\frac{۵\pm ۱}{۶} \Rightarrow x_۱=۱, x_۲=\frac{۴}{۶}$

(۲) $۳x+۷=۰ \Rightarrow x=-\frac{۷}{۳}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

x		$-\frac{7}{3}$		$\frac{2}{3}$		1	
(1)	+		+	0	−	0	+
(2)	−	0	+		+		+
A	−	ت ن	+	0	−	0	+

بنابراین در $(-\infty,\frac{7}{3})\cup(\frac{2}{3},1)$، معادلهٔ $A=\frac{3x^2-5x+2}{3x+7}$ منفی است.

شرایط همواره مثبت یا همواره منفی بودن عبارت درجه‌دوم ax^2+bx+c:

	همواره منفی $ax^2+bx+c<0$	همواره مثبت $ax^2+bx+c>0$
شرط	$\begin{cases}\Delta<0\\ a<0\end{cases}$	$\begin{cases}\Delta<0\\ a>0\end{cases}$
تعبیر	نمودار سهمی همواره زیر محور x	نمودار سهمی همواره زیر محور x

مثال: به‌ازای چه مقادیری از m، سهمی $(m-2)x^2-2mx+m+1$ همواره پایین محور xها است؟ *(مشابه کتاب درسی)*

پاسخ: چون می‌خواهیم سهمی همواره پایین محور xها باشد، بنابراین باید به صورت بوده و محور xها را قطع نکند؛ یعنی دلتا باید منفی باشد و a هم منفی. پس داریم:

$$(m-2)x^2-2mx+(m+1)=0$$

$$\Rightarrow \Delta=(-2m)^2-4(m-2)(m+1) \Rightarrow \Delta=4m+8$$

$$\begin{cases}\Delta<0 \Rightarrow 4m+8<0 \Rightarrow m<-2\\ a<0 \Rightarrow m-2<0 \Rightarrow m<2\end{cases} \Rightarrow m<-2$$

نامعادلهٔ قدرمطلقی

فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در این صورت:

۱ اگر $|u|\le a$، آن‌گاه $-a\le u\le a$.

۲ اگر $|u|\ge a$، آن‌گاه $u\ge a$ یا $u\le -a$.

مثال: مجموعه‌جواب نامعادله‌های زیر را به شکل بازه بنویسید. *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

الف) $|-9x-16|>2$ ب) $|\frac{2x+3}{4}-1|\le 2$

پاسخ:

الف)
$$\begin{cases}-9x-16>2 \Rightarrow -9x>18 \Rightarrow x<-2\\ \text{یا}\\ -9x-16<-2 \Rightarrow -9x<14 \Rightarrow x>-\frac{14}{9}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموعه‌جواب}=(-\infty,-2)\cup(\frac{-14}{9},+\infty)$$

ب)
$$-2\le\frac{2x+3}{4}-1\le 2 \Rightarrow -1\le\frac{2x+3}{4}\le 3$$

$$\Rightarrow -4\le 2x+3\le 12 \Rightarrow -7\le 2x\le 9 \Rightarrow -\frac{7}{2}\le x\le\frac{9}{2}$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

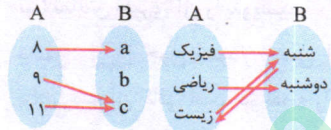
فصل ۵ : تابع

درس ۱: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

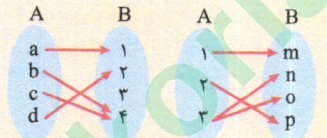
تعریف: یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

روش‌های نمایش تابع

۱. نمودارهای پیکانی هر رابطه را می‌توان به کمک مجموعه‌ها و پیکان‌هایی که اعضای آن‌ها را به هم مربوط می‌کنند، مشخص کرد.



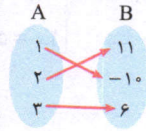
نکته: اگر از هر عضو مجموعهٔ A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد، رابطهٔ بین دو مجموعه را یک «تابع» می‌نامیم.



تابع است. — این رابطه تابع نیست.

۲. زوج‌های مرتب می‌توان اعضای یک رابطه را به کمک یک «زوج» نمایش داد. به هر یک از زوج‌ها «زوج مرتب» می‌گوییم. در هر زوج مرتب عضو اول را «مؤلفهٔ اول» و عضو دوم را «مؤلفهٔ دوم» می‌نامیم.

مؤلفهٔ دوم
↑
$(a,۸)$
↓
مؤلفهٔ اول



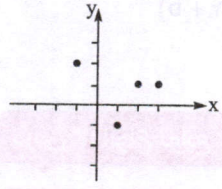
$\Rightarrow \{(۱,-۱۰),(۲,۱۱),(۳,۶)\}$

نکته: اگر یک رابطه به صورت مجموعهٔ زوج‌های مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مؤلفهٔ اول یکسان نباشند.

$f=\{(۵,۷),\underline{(۳,-۱۰)},(۱۱,۹),\underline{(۳,۸)}\} \Rightarrow$ f تابع نیست.

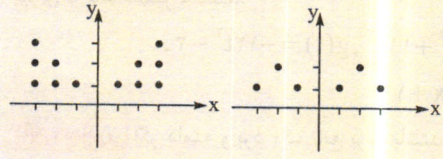
$g=\{(۱,۶),(۳,۸),(-۲,۸),(۶,۵)\} \Rightarrow$ g تابع است.

۳. نمودار مختصاتی و جدول در نمودار مختصاتی محور افقی را محور طول و محور عمودی را محور عرض در نظر می‌گیریم و مختصات هر یک از نقاط را می‌توانیم با یک زوج از اعداد نشان دهیم و برعکس. زوج‌های (a,b) و (b,a) دو نقطهٔ متفاوت را در نمودار نشان می‌دهند.



$\{(-۱,۲),(۲,۱),(۳,۱),(۱,-۱)\}$

نکته: اگر خطی موازی محور yها رسم کنیم و نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کند، آن‌گاه نمودار تابع نیست.

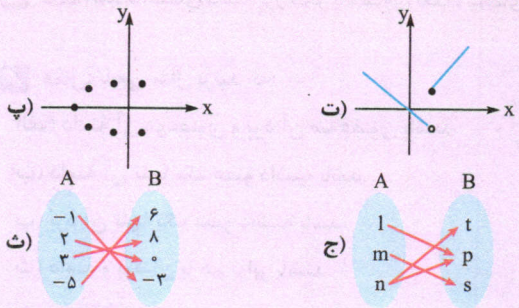


تابع نیست. — تابع است.

مثال: کدام‌یک از روابط زیر یک تابع است؟

الف) $f=\{(-۱,۲),(۱,۳),(۵,۳),(-۲,۱),(۱,-۳)\}$

ب) $g=\{(۶,۷),(۵,۵),(۳,۳),(-۲,۸),(۶,۷)\}$

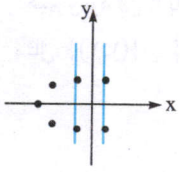


ج) رابطه‌ای که به هر عدد ریشهٔ چهارم آن عدد را نسبت می‌دهد.

پاسخ: الف) در این رابطه دو زوج مرتب $(۱,۳)$ و $(۱,-۳)$ دارای مؤلفهٔ اول یکسان ولی مؤلفهٔ دوم متفاوت هستند؛ پس این رابطه تابع نیست.

ب) تابع است. توجه کنید $(۶,۷)$ دو بار تکرار شده و دو زوج متفاوت نیستند.

پ) تابع نیست، زیرا خطی موازی محور yها وجود دارد که نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند.



ت) تابع است، زیرا خطی موازی محور yها وجود ندارد که تابع را در دو نقطه قطع کند.

ث) تابع است.

ج) تابع نیست، زیرا از n عضو A دو پیکان خارج شده است.

چ) تابع نیست، زیرا هر عدد دو ریشهٔ مرتبهٔ چهارم دارد؛ یعنی $(a,\sqrt[۴]{a})$ و $(a,-\sqrt[۴]{a})$ هر دو عضو رابطه هستند.

مثال: اگر رابطهٔ $\{(-۱,۶),(۴,a^۲-b^۲),(۳,۶),(۴,۱۲),(۳,a+b)\}$ تابع باشد، مقدار $a^۲-b$ را به دست آورید.

پاسخ: برای این‌که رابطهٔ فوق یک تابع باشد، داریم: $a+b=۶$

$$a^۲-b^۲=۱۲ \Rightarrow (a-b)\underbrace{(a+b)}_{۶}=۱۲ \Rightarrow a-b=۲$$

$$\begin{cases}a+b=۶\\a-b=۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=۴\\b=۲\end{cases}$$

درس ۲: دامنه و برد تابع

مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ هر تابع را «دامنه» و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

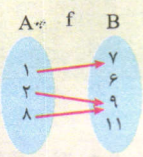
در تابع $f=\{(-۱,۲),(۳,۸),(a,۱۹),(-۴,c)\}$ دامنه و برد به صورت زیر است:

دامنهٔ f $=\{-۱,۳,a,-۴\}$

برد f $=\{۲,۸,۱۹,c\}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته: اگر f تابعی از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B باشد، دامنهٔ f همان مجموعهٔ A است اما برد f زیرمجموعه‌ای از B است و همواره با B برابر نیست.



f دامنهٔ $=\{۱,۲,۸\}$ f برد $=\{۷,۹\}$

نکته: تعداد اعضای دامنه بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای برد است.

مثال: تابعی مثال بزنید که:

الف) دامنهٔ آن دوعضوی و برد آن سه‌عضوی باشد.

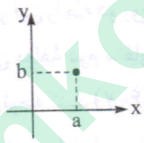
ب) دامنهٔ آن تنها یک عضو داشته باشد.

پ) برد آن تنها یک عضو داشته باشد.

ت) دامنه و برد آن با هم برابر باشند.

پاسخ: الف چنین تابعی وجود ندارد.

ب چون دامنه یک عضو دارد پس برد هم تنها شامل یک عضو است؛ بنابراین اگر این عضو را با a نمایش دهیم و برد آن را با b، داریم:



$f=\{(a,b)\}$

مثال: $\{(۱,۲)\}$ یا $\{(-۵,-۵)\}$

ب $f=\{(۵,۱),(-۱,۱),(۶,۱),(۸,۱)\}$

f برد $=\{۱\}$

ت $f=\{(۱,۶),(۶,۱)\}$ یا $g=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$

f دامنهٔ = f برد $=\{۱,۶\}$

g دامنهٔ = g برد $=\{۱,۲,۳\}$

نمایش جبری یک تابع رابطهٔ بین دامنه و برد تابع f را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی نوشت که این‌گونه نمایش را نمایش جبری می‌نامیم.

در بسیاری از موقعیت‌ها کار با نمایش جبری یک تابع، ساده‌تر و مناسب‌تر از کار با دیگر نمایش‌های تابع است.

مثال: اگر تابعی با نمایش جبری $f(n)=-n^۲+۷n$ داده‌شده باشد و دامنهٔ آن $A=\{۳,۵,۷,۹\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید.

(مشابه کتاب درسی)

پاسخ:

$f(۳)=-۳^۲+۷\times۳=۱۲$, $f(۵)=-۵^۲+۷\times۵=۱۰$

$f(۷)=-۷^۲+۷\times۷=۰$, $f(۹)=-۹^۲+۷\times۹=-۱۸$

بنابراین برد f برابر است با: $\{-۱۸,۰,۱۰,۱۲\}$

تابع خطی هر تابعی که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توابع $y=\sqrt{۲}x-۷$ ، $y=۳x+۰/۱$ ، $y=-۵x-۲\sqrt{۲}$ و $y=-۰/۴x+۶$ توابع خطی هستند.

مثال: اگر جدول زیر مربوط به یک تابع خطی باشد، مقدار f(a) را بیابید.

x	۰	۱	۳
y	$-۱-a$	-۱	$a+۱$

(برگرفته از امتحانات مدارس کشور)

پاسخ: فرض کنیم $y=mx+b$ ، آن‌گاه:

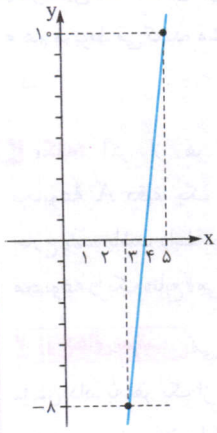
$$\begin{cases} b=-۱-a \\ m+b=-۱ \\ ۳m+b=a+۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=a=۲ \Rightarrow y=۲x-۳ \\ b=-۳ \\ \Rightarrow f(a)=f(۲)=۲\times۲-۳=۱ \end{cases}$$

مثال: برای یک تابع خطی می‌دانیم $f(۳)=-۸$ و $f(۵)=۱۰$.

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) نمایش جبری آن را بنویسید.

پاسخ: الف چون نمودار خطی است، برای رسم آن کافی است دو نقطه را روی دستگاه به هم وصل کنیم.



ب $y=ax+b \Rightarrow \begin{cases} f(۳)=-۸ \Rightarrow -۸=۳a+b \\ f(۵)=۱۰ \Rightarrow ۱۰=۵a+b \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=۹ \\ b=-۳۵ \end{cases} \Rightarrow y=۹x-۳۵$

مثال: در یک ذوزنقه به ارتفاع ۶، طول قاعدهٔ بزرگ ۴ واحد بیشتر از طول قاعدهٔ کوچک است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که مساحت این ذوزنقه را برحسب تابعی از قاعدهٔ آن بیان کند.

پاسخ: قاعده‌های کوچک و بزرگ ذوزنقه را به ترتیب با a و b نمایش می‌دهیم؛ پس داریم $b=a+۴$.

مساحت ذوزنقه $=\frac{۱}{۲}\times۶\times(a+b)=۳(a+a+۴)$

$=۳(۲a+۴)=۶a+۱۲$

یا حتی می‌توانیم برحسب قاعدهٔ بزرگ‌تر بنویسیم $a=b-۴$.

مساحت ذوزنقه $=\frac{۱}{۲}\times۶(a+b)=۳(b-۴+b)$

$=۳(۲b-۴)=۶b-۱۲$

درس ۳: انواع توابع

توابع چندجمله‌ای توابعی که نمایش جبری آن‌ها، چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر هستند.

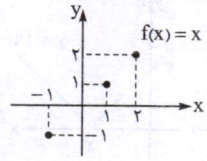
$h(a)=a^۶-۷a^۳+۱۱a^۲$, $g(t)=-۱۲t^۲-۳$,

$f(x)=۵x^۲-۸x+۱۱$

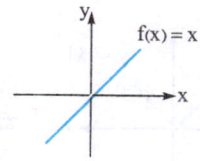
تابع همانی اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد تابع نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

اگر دامنهٔ تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار تابع همان خط $y=x$ است که با معادلهٔ $f(x)=x$ هم نمایش داده می‌شود.



$D_f=\{-1,1,2\}$



$D_f=\mathbb{R}$

تابع ثابت تابعی مانند f که برد آن تنها شامل یک عضو است. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با $f(x)=k$ نمایش می‌دهیم مثل $f(x)=5$ و $f(x)=-1$ و $f(x)=\sqrt{7}$.

تذکر: اگر نمایش جبری تابعی داده شده باشد ولی دامنهٔ آن مشخص نشده باشد، معمولاً بزرگ‌ترین مجموعهٔ ممکن را دامنه در نظر می‌گیریم.

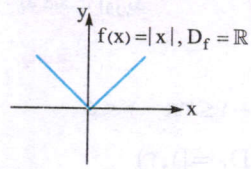
مثال: اگر تابع f ثابت و $f(-1)=6$ و تابع $g=\{(15,a+b),(-7,-7),(\frac{a}{9},3)\}$ همانی باشد، حاصل $f(a-2b)+g(-\frac{b}{3}+11)$ را بیابید.

پاسخ: تابع f ثابت است و $f(-1)=6$؛ بنابراین $f(x)=6$، پس $f(a-2b)=6$. تابع g همانی است؛ بنابراین $g(x)=x$، پس داریم:

$$\begin{cases} a+b=15 \Rightarrow b=-12 \\ \frac{a}{9}=3 \Rightarrow a=27 \end{cases} \Rightarrow g(-\frac{b}{3}+11)=g(15)=15$$

پس: $f(a-2b)+g(-\frac{b}{3}+11)=6+15=21$

تابع قدرمطلق تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند. تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ یا $y=|x|$ نمایش می‌دهیم:



$f(x)=|x|, D_f=\mathbb{R}$

تابع قدرمطلق را به صورت $f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ نیز نمایش می‌دهند.

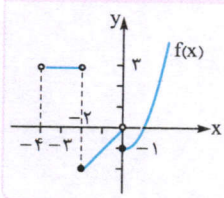
این تابع یک تابع چندضابطه‌ای یا قطعه‌ای نامیده می‌شود.

تابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای): تابعی که برای مقادیر مختلف دارای ضابطه‌های مختلفی باشد:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\geq 1 \\ -2x+7 & x<1 \end{cases} \quad , \quad h(x)=\begin{cases} x-7 & 2<x<7 \\ 2x^2 & x\geq 7 \\ -6 & x\leq 2 \end{cases}$$

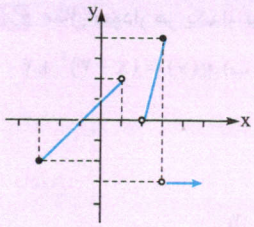
مثال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 2x^2-1 & x\geq 0 \\ x & -2\leq x<0 \\ 3 & -4<x<-2 \end{cases}$ را رسم کرده، دامنه و برد تابع را بیابید.

پاسخ: هر قطعه را در نمودار رسم می‌کنیم:



$D_f=(-4,+\infty), R_f=[-2,+\infty)$

مثال: نمودار تابع f داده شده است.



الف) ضابطهٔ تابع را بنویسید.

ب) مقادیر $f(\sqrt{21})$، $f(\frac{5}{2})$ و $f(-2)$ را به دست آورید.

پاسخ: الف) تابع از سه قطعه تشکیل شده که یک قطعه تابع ثابت و دو قطعهٔ دیگر توابع خطی هستند؛ بنابراین:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & -3\leq x<1 \\ mx+n & 2<x\leq 3 \\ -3 & x>3 \end{cases}$$

$$1)\ f(x)=ax+b \Rightarrow \begin{cases} (-3,-2) \Rightarrow -2=-3a+b \\ (0,1) \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow x+1$$

$$2)\ f(x)=mx+n \Rightarrow \begin{cases} (2,0) \Rightarrow 2m+n=0 \\ (3,4) \Rightarrow 3m+n=4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=-8 \end{cases} \Rightarrow 4x-8$$

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & -3\leq x<1 \\ 4x-8 & 2<x\leq 3 \\ -3 & x>3 \end{cases}$$

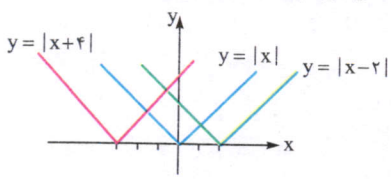
ب $f(-2)=1(-2)+1=-1$

$f(\frac{5}{2})=4(\frac{5}{2})-8=2$

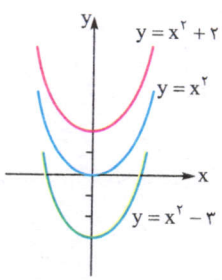
$f(\sqrt{21})=-3$

رسم برخی توابع به کمک انتقال

برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم اگر $k>0$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<0$ باشد انتقال در جهت مثبت خواهد بود:



با داشتن نمودار تابع $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به دست آورد. اگر $k>0$ باشد انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد انتقال در جهت منفی خواهد بود.



بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

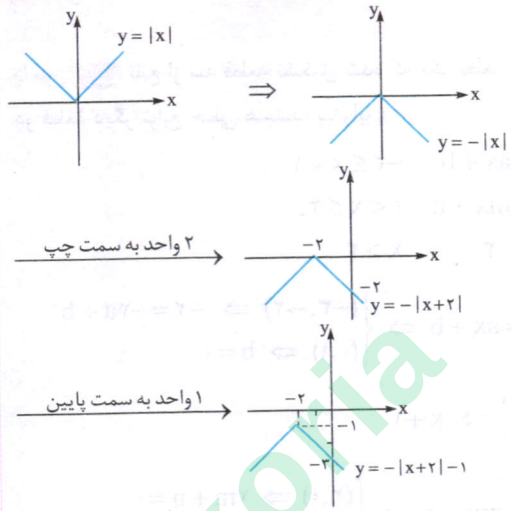
مثال: نمودار هر یک از توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = -|x+۲| - ۱$ ب) $g(x) = (x-۳)^۲ + ۴$

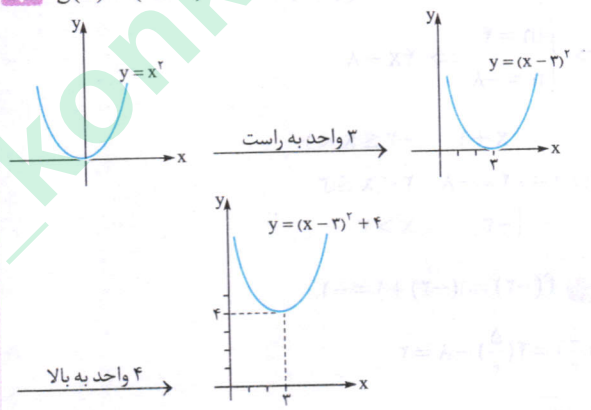
پ) $h(x) = |x-۳| + \frac{۱}{۲}$

پاسخ:

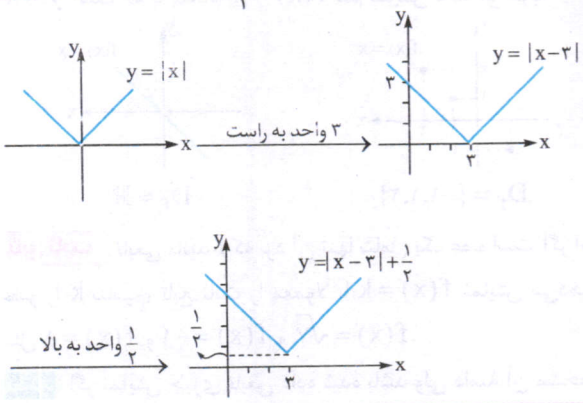
الف) $f(x) = -|x+۲| - ۱$



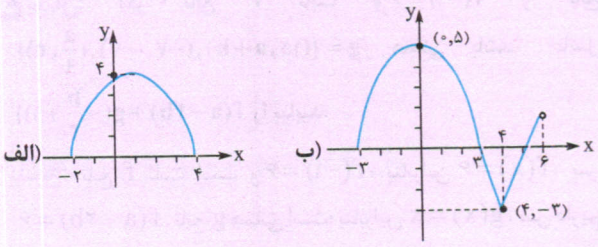
ب) $g(x) = (x-۳)^۲ + ۴$



پ) $h(x) = |x-۳| + \frac{۱}{۲}$



مثال: دامنه و برد توابع زیر را به دست آورید.



پاسخ:

الف) دامنه $= [-۲,۴]$، برد $= [۰,۴]$

ب) دامنه $= [-۳,۶)$، برد $= [-۳,۵]$

مثال: اگر برد $f(x) = ۳x - ۴$ برابر $[-۱,۵)$ باشد دامنهٔ آن را به دست آورید.

پاسخ:

$R_f = [-۱,۵) \Rightarrow -۱ \le y < ۵ \Rightarrow -۱ \le ۳x - ۴ < ۵$

$\Rightarrow ۳ \le ۳x < ۹ \Rightarrow ۱ \le x < ۳ \Rightarrow D_f = [۱,۳)$

@kotob_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

فصل ۶: شمارش بدون شمردن

درس ۱: شمارش

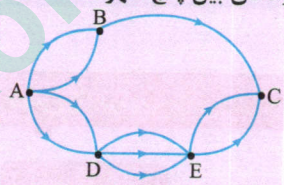
اصل جمع اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m+n$ روش وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد، به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش kام m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1+m_2+\cdots+m_k$ روش وجود دارد.

اصل ضرب اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحلهٔ اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحلهٔ دوم را بتوان با n روش انجام داد، در کل کار مورد نظر به $m\times n$ روش قابل انجام است.

تذکر: اصل ضرب را نیز می‌توان مانند اصل جمع تعمیم داد.

مثال: مطابق نقشهٔ مقابل، تعداد راه‌های بین پنج شهر A، B، C، D و E مشخص شده است. به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر برویم به طوری که از هر شهر بیش از یک بار عبور نکنیم؟



پاسخ: برای رسیدن از شهر A به شهر C یا باید از شهر B عبور کنیم یا از شهرهای D و E. بنابراین:

$$\underbrace{2\times1}_{\text{از A به B به C}}+\underbrace{2\times3\times2}_{\text{از A به D به E به C}}=2+12=14$$

مثال: با ارقام ۰,۱,۲,۳,۵ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت؟ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ: در حالت اول تکرار ارقام مجاز است، فقط در صدگان صفر نمی‌تواند قرار بگیرد.

$$\underbrace{\text{صدگان}}_{1,2,3,5}\ \underbrace{\text{دهگان}}_{0,1,2,3,5}\ \underbrace{\text{یکان}}_{0,1,2,3,5} \Rightarrow 4\times5\times5=100$$

در حالت بدون تکرار ارقام در صدگان ۴ حالت داریم، چون صفر نمی‌تواند در صدگان باشد. برای دهگان هر پنج عدد می‌تواند قرار بگیرد به‌جز عددی که در صدگان قرار گرفته و در یکان همهٔ اعداد به‌جز اعدادی که در دهگان و صدگان قرار گرفته، می‌تواند قرار بگیرد؛ بنابراین:

$$\underset{\text{صدگان}}{4}\times\underset{\text{دهگان}}{4}\times\underset{\text{یکان}}{3}=48$$

مثال: با ارقام ۰,۲,۳,۴,۵:

الف) چند عدد چهاررقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد سه‌رقمی زوج و کم‌تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ: الف) جایگاه یکان به سه روش می‌تواند پُر شود ۰,۲,۴ و چون صفر در سمت چپ قرار نمی‌گیرد صفر را جدا حساب می‌کنیم:

۱) یکان صفر باشد:

$$\overline{4}\times\overline{3}\times\overline{2}\times\overset{0}{\overline{1}}=24$$

۲) یکان صفر نباشد:

$$\underset{\text{به جز یکان و صفر}}{\overline{3}}\times\overline{3}\times\overline{2}\times\overset{2\text{ یا }4}{\overline{2}}=36$$

پس طبق اصل جمع $24+36=60$ عدد چهاررقمی زوج با ارقام غیرتکراری می‌توان نوشت.

ب) صدگان نمی‌تواند ۰,۴,۵ باشد و یکان باید زوج باشد، ۰,۲,۴؛ بنابراین داریم:

۱) صدگان ۲ باشد:

$$\overset{2}{\overline{1}}\times\overline{3}\times\overset{4\text{ یا }0}{\overline{2}}=6$$

۲) صدگان ۳ باشد: در این حالت برای یکان سه حالت ممکن است: صفر، ۲ یا ۴.

$$\overset{3}{\overline{1}}\times\overline{3}\times\overset{4\text{ یا }2\text{ یا }0}{\overline{3}}=9$$

طبق اصل جمع $6+9=15$ عدد سه‌رقمی و کم‌تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت.

مثال: با حروف کلمهٔ «بوستان» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت که با حرف «ن» شروع شود؟

پ) چند کلمهٔ ۵حرفی می‌توان نوشت که با حرف «س» شروع شود و به حرف «ت» ختم شود؟

پاسخ: کلمهٔ بوستان دارای ۶ حرف غیرتکراری است.

الف) $\overline{6}\times\overline{5}\times\overline{4}\times\overline{3}\times\overline{2}=720$

ب) $\overset{\text{ن}}{\overline{1}}\times\overline{5}\times\overline{4}\times\overline{3}\times\overline{2}=120$

پ) $\overset{\text{س}}{\overline{1}}\times\overline{4}\times\overline{3}\times\overline{2}\times\overset{\text{ت}}{\overline{1}}=24$

مثال: با ارقام ۰,۲,۴,۵,۷,۹ و بدون تکرار ارقام چند عدد پنج‌رقمی می‌توان نوشت به طوری که مضرب ۵ باشد.

پاسخ: اعدادی به ۵ بخش‌پذیرند که یکان آن‌ها صفر یا ۵ باشد؛ بنابراین:

حالت اول: یکان صفر باشد:

$$\underset{\text{به‌جز یکان}}{\overline{5}}\times\overline{4}\times\overline{3}\times\overline{2}\times\overset{0}{\overline{1}}=120$$

حالت دوم: یکان ۵ باشد:

$$\underset{\text{به‌جز یکان و صفر}}{\overline{4}}\times\overline{4}\times\overline{3}\times\overline{2}\times\overset{5}{\overline{1}}=96$$

طبق اصل جمع $120+96=216$ عدد بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که مضرب ۵ هستند.

درس ۲: جایگشت

فاکتوریل

اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی و متوالی از ۱ تا n را به صورت $n!$ (n فاکتوریل) نمایش می‌دهیم:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

نکته: $0! = 1$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. *(مشابه کتاب درسی)*

الف) $\frac{17!}{12!}$ ب) $\frac{n!}{(n+1)!}$

پ) $\frac{n!}{(n-4)!}$ ت) $\frac{9!-6!}{4!}$

پاسخ:

الف) $\frac{17!}{12!} = \frac{17\times16\times15\times14\times13\times\cancel{12!}}{\cancel{12!}}$

$= 17\times16\times15\times14\times13$

ب) $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\times\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$

پ) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{n\times(n-1)(n-2)(n-3)\cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!}}$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)$

ت) $\frac{9\times8\times7\times6!-6!}{4!} = \frac{\overbrace{6!}^{6\times5\times\cancel{4!}}(9\times8\times7-1)}{\cancel{4!}}$

$= 6\times5(9\times8\times7-1)$

جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آن‌ها کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم؛ بنابراین تعداد راه‌های چیدن n شیء متمایز یا به عبارتی تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز عبارت است از حاصل‌ضرب $\overset{n}{\cdots}\times\overset{n-1}{\cdots}\times\overset{n-2}{\cdots}\times\cdots\times\overset{2}{\cdots}\times\overset{1}{\cdots}$ که برابر $n!$ است.

مثال: با ارقام ۱,۳,۵,۶,۸,۹ چند عدد ۶رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

پاسخ: $\overline{6}\times\overline{5}\times\overline{4}\times\overline{3}\times\overline{2}\times\overline{1} = 6! = 720$

ترتیب $P(n,r)$

تعداد جایگشت‌های rتایی از nشیء متمایز یا به عبارتی تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء متمایز را که در آن‌ها ترتیب قرارگرفتن مهم باشد با $P(n,r)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با حروف کلمهٔ «چالش زندگی» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمهٔ ۹حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «چ» و «ش» کنار هم قرار داشته باشند؟

ب) چند کلمهٔ ۷حرفی می‌توان نوشت؟ چند تا از آن‌ها با «چالش» شروع می‌شوند؟

پ) چند کلمهٔ ۹حرفی می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف «زندگی» کنار هم باشند؟

ت) چند کلمهٔ ۶حرفی می‌توان نوشت؟

پاسخ: الف) حروف «چ» و «ش» به دو حالت کنار هم قرار می‌گیرند؛ «چش» و «شچ». این دو حرف را در یک بسته قرار داده و یک شیء در نظر می‌گیریم که با ۷ حرف دیگر ۸ حرف را تشکیل می‌دهند که به $8!$ حالت می‌توانند کنار هم قرار بگیرند. دو حرف «چ» و «ش» هم به دو حالت کنار هم بودند؛ بنابراین تعداد کلمات۹حرفی که حروف «چ» و «ش» کنار هم قرار بگیرند برابر است با: $\underset{\text{چ ش}\ \text{ش چ}}{2}\times8!$

ب) $P(9,7) = \frac{9!}{(9-7)!} = \frac{9!}{2!}$ کلمهٔ ۷حرفی می‌توان نوشت.

کلمهٔ «چالش» چهار حرف دارد؛ پس چهار حرف اول مشخص است. سه حرف دیگر را باید از بین حروف کلمهٔ «زندگی» انتخاب کنیم و کنار هم قرار دهیم؛ بنابراین: $P(5,3) = \frac{5!}{2!} = 5\times4\times3 = 60$

پ) حروف کلمهٔ «زندگی» $5!$ جایگشت دارند. این حروف را در یک بسته قرار می‌دهیم و بقیهٔ چهار حروف و یک بسته هم $5!$ جایگشت دارند؛ بنابراین: $\underset{\text{جایگشت حروف زندگی}}{5!}\times\underset{\text{جایگشت یک بسته و بقیهٔ چهار حرف}}{5!}$

ت) $P(9,6) = \frac{9!}{(9-6)!} = \frac{9!}{3!}$

درس ۳: ترکیب

ترکیب $C(n,r)$

به هر انتخاب r شیء از n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد یا به عبارتی به هر زیرمجموعهٔ rعضوی از یک مجموعهٔ nعضوی، یک ترکیب rتایی از n شیء می‌گوییم. تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء متمایز را معمولاً با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad (0\le r\le n)$$

مثال: مجموعهٔ $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ چند زیرمجموعهٔ ۵عضوی دارد؟

پاسخ: تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی $= \binom{8}{5} = \frac{8!}{3!5!} = 56$

مثال: یک مجموعهٔ nعضوی دارای ۲۲۰ زیرمجموعهٔ سه‌عضوی است. این مجموعه چند زیرمجموعهٔ پنج‌عضوی دارد؟

پاسخ: تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی برابر است با $\binom{n}{3}$؛ بنابراین:

$$\binom{n}{3} = 220 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!\,3!} = 220$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 6\times220 = 12\times11\times10 \Rightarrow n = 12$$

حال تعداد زیرمجموعه‌های ۵عضوی را به دست می‌آوریم:

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{7!5!} = 792$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

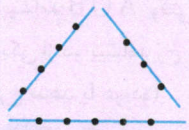
مثال: گل‌فروشی در فروشگاه خود ۹ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل ۵ تا ۷ شاخه گل متمایز قرار می‌دهد. او چند دسته گل مختلف می‌تواند درست کند؟ *(مشابه تمرین کتاب درسی)*

پاسخ: گل‌فروش می‌تواند از بین ۹ گل مختلف ۵ تا یا ۶ تا یا ۷ شاخه انتخاب کند، بنابراین:

$$\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}=\frac{9!}{5!4!}+\frac{9!}{6!3!}+\frac{9!}{7!2!}$$

دسته گل مختلف می‌تواند درست کند.

مثال: با نقاط روی شکل چند مثلث می‌توان ساخت؟



پاسخ: روش اول: اگر بخواهیم به روش مستقیم تعداد مثلث‌ها را شمارش کنیم، می‌توانیم از هر پاره‌خط یک نقطه یا از یک پاره‌خط دو نقطه و از یک پاره‌خط دیگر یک نقطه انتخاب کنیم؛ بنابراین:

$$\underbrace{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}_{\text{از هر پاره خط یک نقطه}}+\underbrace{\binom{3}{2}\binom{9}{1}}_{\text{از پاره‌خط سه نقطه‌ای ۲تا و از بقیه یکی}}+\underbrace{\binom{4}{2}\binom{8}{1}}_{\text{از پاره‌خط چهار نقطه‌ای دو نقطه و از بقیه یکی}}+\underbrace{\binom{5}{2}\binom{7}{1}}_{\text{از پاره‌خط پنج نقطه‌ای دوتا و از بقیه یکی}}$$

$$=3\times4\times5+3\times9+6\times8+10\times7=205$$

روش دوم: سه نقطه از بین تمام نقاط انتخاب می‌کنیم و حالت‌هایی که سه نقطه روی یک پاره‌خط قرار دارند را از آن کم می‌کنیم:

$$\binom{3+4+5}{3}-\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}\right]$$

$$=\binom{12}{3}-(1+4+10)=220-15=205$$

مثال: مجموعهٔ $A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$

الف) دارای چند زیرمجموعهٔ چهارعضوی شامل ۱۴ است؟

ب) دارای چند زیرمجموعهٔ چهارعضوی فاقد ۱۰ است؟

پ) دارای چند زیرمجموعهٔ چهارعضوی شامل ۱۴ و فاقد ۱۰ است؟

پاسخ: الف از زیرمجموعهٔ چهارعضوی یکی به جز ۱۴ مشخص است؛ پس سه عضو دیگر را می‌خواهیم:

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=20$$

ب به جز ۱۰

$$\binom{6}{4}=\frac{6!}{4!2!}=15$$

پ از چهار عضو زیرمجموعه یکی مشخص است؛ به جز ۱۰ و ۱۴ پس سه عضو دیگر می‌ماند:

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10$$

نکته:

۱) $\binom{n}{0}=1,\binom{n}{1}=n$

۲) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

۳) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

۴) $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

مثال: اگر $\binom{n}{12}=\binom{n}{7}$ مقدار $P(n,3)-\frac{1}{17}\binom{n}{5}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\binom{n}{12}=\binom{n}{7}\Rightarrow n=12+7=19$$

$$P(19,3)-\frac{1}{17}\binom{19}{5}=\frac{19!}{16!}-\frac{1}{17}\times\frac{19!}{14!5!}=19\times18\times11$$

مثال: از میان ۷ ریاضی‌دان و ۶ شیمی‌دان و ۸ فیزیک‌دان قرار است کمیته‌ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می‌تواند انتخاب شود هرگاه: *(مشابه کتاب درسی)*

الف) کمیته ۳نفره باشد و حداقل یک ریاضی‌دان در آن باشد.

ب) کمیته ۴نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشد.

پاسخ: الف روش اول:

$$\underbrace{\binom{7}{1}\binom{14}{2}}_{\text{یک ریاضی‌دان دو نفر از بقیه}}+\underbrace{\binom{7}{2}\binom{14}{1}}_{\text{دو ریاضی‌دان یک نفر از بقیه}}+\underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{سه ریاضی‌دان}}=7\times91+21\times14+35=966$$

روش دوم: متمم هیچ ریاضی‌دانی شرکت نکرده باشد را حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{\binom{21}{3}}_{\text{سه نفر از کل نفرات}}-\underbrace{\binom{14}{3}}_{\text{سه نفر بین شیمی‌دان و فیزیک‌دان}}=\frac{21\times20\times19}{3!}-\frac{14\times13\times12}{3!}$$

$$=1330-364=966$$

ب در یک رشته باید دو نفر انتخاب شود.

$$\underbrace{\binom{6}{1}\binom{7}{1}\binom{8}{2}}_{\text{۱ شیمی‌دان ۱ ریاضی‌دان ۲ فیزیک‌دان}}+\underbrace{\binom{6}{1}\binom{7}{2}\binom{8}{1}}_{\text{۱ شیمی‌دان ۲ ریاضی‌دان ۱ فیزیک‌دان}}+\underbrace{\binom{6}{2}\binom{7}{1}\binom{8}{1}}_{\text{۲ شیمی‌دان ۱ ریاضی‌دان ۱ فیزیک‌دان}}$$

$$=6\times7\times28+6\times21\times8+15\times7\times8=3024$$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

فصل ۷ : آمار و احتمال

درس ۱: احتمال یا اندازه‌گیری شانس

پدیده یا آزمایش تصادفی پیشامدهایی که نتیجهٔ آن به طور دقیق قابل پیش‌بینی نباشد، اما از همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آن‌ها مطلع باشیم را پدیده‌ها یا آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.

مثل پرتاب یک تاس، قبل از انداختن تاس نتیجه مشخص نیست، اما از تمام حالات ممکن (۱ تا ۶) خبر داریم؛ پس پرتاب تاس یک آزمایش تصادفی است.

فضای نمونه مجموعهٔ شامل همهٔ حالت‌های ممکن را فضای نمونه‌ای می‌نامیم. این مجموعه را S می‌نامیم.

پیشامدهای تصادفی هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، یک پیشامد تصادفی نام دارد.

مثال: خانواده‌ای دارای ۵ فرزند است.

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را مشخص کنید.

ب) پیشامد A که در آن حداقل ۴ فرزند پسر باشد را مشخص کنید.

پ) پیشامد B که در آن حداکثر ۲ فرزند دختر باشد را مشخص کنید.

پاسخ: الف طبق اصل ضرب همهٔ حالت‌های ممکن برابر است با:

$۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۲^۵$

ب «حداقل ۴ فرزند پسر» = A

A = {(پ ، پ ، پ ، پ ، د) ، (د ، پ ، پ ، پ ، پ) ، (پ ، پ ، پ ، د ، پ) ، (پ ، پ ، د ، پ ، پ) ، (پ ، د ، پ ، پ ، پ)}

تعداد اعضای پیشامد A برابر ۶ است.

پ «حداکثر ۲ فرزند دختر» = B

B = {(پ ، پ ، پ ، د ، پ) ، (پ ، پ ، پ ، پ ، د) ، (پ ، د ، پ ، پ ، پ) ، (پ ، پ ، د ، پ ، پ) ، (د ، پ ، پ ، پ ، پ) ، (پ ، پ ، پ ، د ، د) ، (پ ، پ ، د ، پ ، د) ، (پ ، د ، پ ، پ ، د) ، (د ، پ ، پ ، د ، پ) ، (د ، پ ، د ، پ ، پ) ، (پ ، د ، پ ، د ، پ) ، (د ، پ ، د ، د ، پ) ، (پ ، پ ، پ ، پ ، پ) ، (د ، د ، پ ، پ ، پ)}

تعداد اعضای پیشامد B برابر ۱۶ است.

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن سکه رو و تاس فرد بیاید را مشخص کنید.

پ) پیشامد B که در آن تاس اول بیاید را مشخص کنید.

پاسخ: الف تاس ۶ حالت و سکه دو حالت دارد؛ بنابراین کل حالات برابر $۲\times۶=۱۲$ است.

S = {(۱ ، ر) ، (۲ ، ر) ، (۳ ، ر) ، (۴ ، ر) ، (۵ ، ر) ، (۶ ، ر) ، (۱ ، پ) ، (۲ ، پ) ، (۳ ، پ) ، (۴ ، پ) ، (۵ ، پ) ، (۶ ، پ)}

ب «سکه رو و تاس فرد» = A

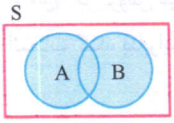
A = {(۱ ، ر) ، (۳ ، ر) ، (۵ ، ر)}

پ «تاس اول» = B

B = {(۲ ، ر) ، (۲ ، پ) ، (۳ ، ر) ، (۳ ، پ) ، (۵ ، ر) ، (۵ ، پ)}

پیشامدها و برخی اعمال روی آن‌ها

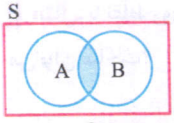
اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت:



$A\cup B$

الف اجتماع دو مجموعه $(A\cup B)$:

پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد (یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد یا هر دو)

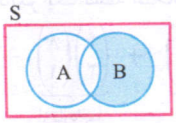


$A\cap B$

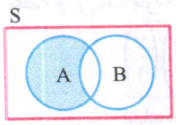
ب اشتراک دو مجموعه $(A\cap B)$:

پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو با هم رخ بدهند. (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد B رخ بدهد.)

پ تفاضل دو پیشامد $(A-B$ یا $B-A)$:



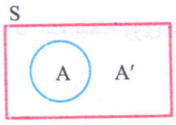
$B-A$



$A-B$

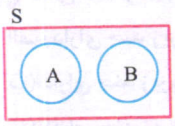
پیشامد $(A-B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.

ت متمم یک پیشامد (A'): اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم پیشامد A که با A' (A^c) نمایش می‌دهیم، وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد؛ بنابراین: $A\cap A'=\varnothing, A\cup A'=S$



دو پیشامد ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A\cap B=\varnothing$، در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار با هم رخ نمی‌دهند.



توجه: همواره هر پیشامد تصادفی مانند A و متمم آن یعنی A'، دو پیشامد ناسازگارند زیرا $A\cap A'=\varnothing$.

نکته: اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند. این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه $A\cap B=\varnothing$، $A\cap C=\varnothing$ و $B\cap C=\varnothing$ باشد.

مثال: اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۷ را روی کارت‌هایی نوشته و به تصادف یک کارت برمی‌داریم:

پیشامد A: «عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.»

پیشامد B: «عدد روی کارت مجذور کامل باشد.»

الف) پیشامد این‌که A رخ دهد ولی B رخ ندهد را بیابید.

ب) پیشامد $A\cap B$ را بیابید.

پ) آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟

پاسخ: الف $A-B=\{۳,۶,۱۲,۱۵\}$ ب $A\cap B=\{۹\}$ پ خیر، $A\cap B\neq\varnothing$.

$B=\{۱,۴,۹,۱۶\}$

$A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵\}$

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ به صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود.

۱) $0 \le P(A) \le 1$ ۲) $P(S)=1$

۳) $P(\varnothing)=0$

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند:

۱) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

۲) $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\le P(B)$

نکته: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، آن‌گاه:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

مثال: در جعبه‌ای ۶ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز داریم. اگر چهار مهره به تصادف خارج کنیم چه‌قدر احتمال دارد:

الف) هر چهار مهره هم‌رنگ باشند؟

ب) دقیقاً سه مهره هم‌رنگ باشند؟

پاسخ:

الف) $n(S)=\binom{11}{4}=\frac{11!}{7!4!}=330$

$$P(A)=\frac{\binom{5}{4}+\binom{6}{4}}{330}=\frac{20}{330}=\frac{2}{33}$$

یا هر چهار مهره آبی یا هر چهار مهره قرمز

ب) $$P(B)=\frac{\binom{5}{3}\binom{6}{1}+\binom{6}{3}\binom{5}{1}}{330}=\frac{160}{330}=\frac{16}{33}$$

سه مهره قرمز یکی آبی یا سه مهره آبی یکی قرمز

مثال: احتمال قبولی علی در درس ریاضی ۷۰ درصد و در درس فیزیک ۶۵ درصد و در هر دو درس ۴۵ درصد است. مطلوب است:

الف) احتمال قبولی در حداقل یکی از دروس

ب) احتمال مردودی در هر دو درس

پ) احتمال قبولی فقط در یکی از دروس

پاسخ: اگر قبولی در درس ریاضی را با A و قبول در درس فیزیک را با B نمایش دهیم:

الف) $P(A\cup B)=P$ (قبولی در حداقل یک درس)

$=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/70+0/65-0/45=0/90$

ب) متمم حداقل در یک از دروس قبول شود:

$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-0/90=0/1$

پ) $P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

$=0/70+0/65-2\times 0/45=0/45$

درس ۲: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

آمار مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار مجموعهٔ روش‌هایی است که شامل جمع‌آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده‌ها و در نهایت نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

مراحل علم آمار: ۱ جمع‌آوری اعداد و ارقام ۲ سازماندهی و نمایش ۳ تحلیل و تفسیر داده‌ها ۴ نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی

کاربرد علم آمار در پزشکی: یکی از کاربردهای علم آمار در علوم پزشکی، بررسی موضوع چاقی است. برای این‌که میزان چاقی یک فرد را بسنجیم از معیار «شاخص تودهٔ بدن» استفاده می‌کنیم.

مثال: وزن شخصی ۹۲ کیلوگرم و قدش ۱ متر و ۶۴ سانتی‌متر است. شاخص تودهٔ بدن شخص را به دست آورید!

(شاخص تودهٔ بدن فرد از فرمول $\frac{W_{kg}}{(H_m)^2}$ به دست می‌آید.)

پاسخ:

$$\text{شاخص تودهٔ بدن}=\frac{92}{(1/64)^2}\simeq 34/21$$

که بنا به جدول صفحهٔ ۵۵ کتاب درسی این فرد چاقی درجه‌یک دارد.

تعریف جامعه یا جمعیت مجموعهٔ تمام افراد یا اشیایی که دربارهٔ یک یا چند ویژگی آن‌ها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می‌شود و هر یک از افراد یا اشیا را عضو جامعه می‌نامند.

تعریف اندازه یا حجم جامعه تعداد اعضای جامعه را اندازهٔ جامعه یا حجم جامعه گویند.

تعریف نمونه بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب‌شده را عضو نمونه گویند.

تعریف اندازه یا حجم نمونه تعداد اعضای نمونه را اندازهٔ نمونه یا حجم نمونه گویند.

مثال: درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف) اندازهٔ نمونه و اندازهٔ جامعه برابرند.

ب) در علم آمار، بعد از جمع‌آوری اطلاعات به تحلیل و تفسیر داده‌ها می‌پردازیم.

پ) نمونه بخشی از جامعه است.

ت) در سرشماری نفوس باید کل نمونه را در نظر بگیریم.

پاسخ: الف) نادرست؛ نمونه بخشی از جامعه است، پس اندازهٔ نمونه به طور کلی کم‌تر از جامعه است.

ب) نادرست؛ مرحلهٔ دوم علم آمار سازماندهی و نمایش است.

پ) درست

ت) نادرست؛ در سرشماری نفوس باید کل جامعه را در نظر بگیریم.

مثال: می‌خواهیم دربارهٔ کیفیت قطعات تولیدی کارخانه‌ای با ظرفیت تولیدی ۵۰۰۰۰ قطعه تحقیق کنیم. برای این منظور، ۲۰۰۰ قطعه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید.

ویژگی مورد بررسی	اندازهٔ نمونه	اندازهٔ جامعه	جامعه

پاسخ:

ویژگی مورد بررسی	اندازهٔ نمونه	اندازهٔ جامعه	جامعه
کیفیت محصولات	۲۰۰۰	۵۰۰۰۰	کل قطعات تولیدی کارخانه

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

مثال: می‌خواهیم قد دانش‌آموزان کلاس اول مدارس منطقهٔ ۲ را بررسی کنیم. برای این کار دانش‌آموزان کلاس اول مدرسهٔ شکوفه‌های منطقهٔ ۲ را انتخاب می‌کنیم. در این بررسی آماری جامعه، نمونه، واحد آماری و دادهٔ آماری را مشخص کنید.

پاسخ:

- کل دانش‌آموزان کلاس اول مدارس منطقهٔ ۲ جامعه است.
- کل دانش‌آموزان کلاس اول مدرسهٔ شکوفه‌ها نمونه است.
- هر دانش‌آموز یک واحد آماری است.
- طول قد هر دانش‌آموز یک دادهٔ آماری است.

درس ۳: متغیر و انواع آن

تعریف متغیر و مقدار متغیر

متغیر: ویژگی‌ای از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

مقدار متغیر: عددی را که به ویژگی یک عضو جامعه نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گوییم.

متغیرهای یک خودرو	مقدار متغیر
سرعت	۱۲۰
رنگ خودرو	مشکی

متغیرهای یک فرد	مقدار متغیر
سن فرد	۵۲
قد فرد	۱۶۱
رنگ چشم	قهوه‌ای

متغیرهای کمّی و کیفی

تعریف متغیرهای کمّی: متغیرهایی را که قابل اندازه‌گیری‌اند، «متغیر کمّی» گویند. مثل وزن، قد، میزان قند خون.

انواع متغیرهای کمّی

۱ **متغیر کمّی پیوسته:** متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند اختیار کند. مثل قد، وزن، محیط و مساحت.

۲ **متغیر کمّی گسسته:** متغیر گسسته، متغیری است که پیوسته نباشد. مثل تعداد فرزندان یک خانواده، تعداد مدادهای رنگی یک دانش‌آموز.

مثال: در هر مورد نوع متغیر مطرح‌شده را مشخص کنید. (مشابه کتاب درسی)

متغیر	نوع متغیر
حجم مخزن	
ارتفاع ساختمان‌های تهران	
تعداد پله‌های پل عابر	
مساحت کشورهای خاورمیانه	
تعداد ماه‌های هر فصل	

پاسخ:

متغیر	نوع متغیر
حجم مخزن	کمّی پیوسته
ارتفاع ساختمان‌های تهران	کمّی پیوسته
تعداد پله‌های پل عابر	کمّی گسسته
مساحت کشورهای خاورمیانه	کمّی پیوسته
تعداد ماه‌های هر فصل	کمّی گسسته

تعریف متغیرهای کیفی: متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری نیستند را «متغیرهای کیفی» گویند، مثل گروه خونی، مزهٔ غذا.

انواع متغیرهای کیفی:

۱ **متغیر کیفی ترتیبی:** متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد. مثل سطح تحصیلات. (دیپلم، فوق دیپلم، لیسانس، فوق لیسانس و دکتری)

۲ **متغیر اسمی (غیرترتیبی):** متغیر کیفی است که ترتیبی نیست. مثل گروه خونی (A,B,O,AB) و جنسیت. (زن و مرد)

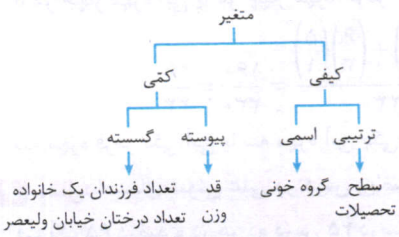
مثال: در هر مورد نوع متغیر مطرح‌شده را مشخص کنید. (مشابه کتاب درسی)

متغیر	نوع متغیر
ماه‌های سال	
نوع آلایندگی هوا	
مدل خودرو	

پاسخ:

متغیر	نوع متغیر
ماه‌های سال	کیفی ترتیبی
نوع آلایندگی هوا	کیفی اسمی
مدل خودرو	کیفی اسمی

انواع متغیرها در یک نگاه



مثال: نوع هر یک از متغیرهای زیر را تعیین کنید.

۱) مراحل رشد انسان

۲) تعداد تصادفات نوروز ۱۴۰۳

۳) میزان رضایت از رانندهٔ اسنپ (ضعیف، متوسط، خوب و عالی)

۴) رنگ مقنعهٔ مدارس دخترانهٔ تهران

۵) مساحت آپارتمان‌های مسکن ملی

۶) نام خودروهای چینی

۷) تعداد موشک‌های پرتاب‌شده به اسرائیل

پاسخ:

۱ کیفی ترتیبی (جنین نوزاد، کودک، نوجوان، جوان، بزرگسال)

۲ کمّی گسسته

۳ کیفی ترتیبی (قابل مقایسه کردن)

۴ کیفی اسمی (صورتی، سفید، سورمه‌ای، مشکی و...) ترتیب ندارد.

۵ کمّی پیوسته

۶ کیفی اسمی (ترتیب ندارد).

۷ کمّی گسسته

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

کتابای دوازدهمی‌ها

خیلی سبز!

کتاب‌های تست پایه

شیمی پایه
زیست شناسی پایه
عربی پایه
فیزیک پایه رشتهٔ تجربی(سؤال)
فیزیک پایه رشتهٔ تجربی(درسنامه+پاسخ)
فیزیک پایه رشتهٔ ریاضی(سؤال)
فیزیک پایه رشتهٔ ریاضی(درسنامه+پاسخ)
هندسه پایه
فلسفه و منطق پایه(جلد اول)
دین و زندگی پایه
فارسی پایه

کتاب‌های تست دوازدهم

شیمی ۳
زیست‌شناسی ۳
فیزیک ۳ رشتهٔ تجربی(سؤال)
فیزیک ۳ رشتهٔ تجربی(درسنامه +پاسخ)
ریاضیات تجربی۳
حسابان ۲
فیزیک ۳ رشتهٔ ریاضی(سؤال)
فیزیک ۳ رشتهٔ ریاضی(درسنامه+پاسخ)
هندسه۳
فارسی۳
عربی۳
انگلیسی۳
دین و زندگی۳
ریاضی و آمار۳رشتهٔ انسانی
دین و زندگی۳ رشتهٔ انسانی
عربی۳رشتهٔ انسانی
علوم و فنون ادبی۳
جامعه‌شناسی۳
فلسفه۲
تاریخ۳
جغرافیا۳

با کتاب‌های تست خیلی سبز کنکور چه آسونه!

کتاب‌های تست جامع

زیست شناسی جامع(جلد سؤال)
زیست شناسی جامع(جلد پاسخ)
فیزیک جامع رشتهٔ تجربی
فیزیک جامع رشتهٔ ریاضی
ریاضیات تجربی جامع(درسنامه+سؤال)
ریاضیات تجربی جامع (پاسخ)
ریاضیات گسسته +آمارواحتمال جامع
حسابان‌وریاضی جامع(درسنامه+سؤال)
حسابان و ریاضی جامع(پاسخ)
فارسی جامع (درسنامه+سؤال)
فارسی جامع (پاسخ)
عربی جامع
انگلیسی جامع+کتابچه‌واژگان انگلیسی
دین و زندگی جامع(درسنامه+سؤال)
دین و زندگی جامع (پاسخ)
ریاضی و آمار جامع
دین و زندگی جامع‌رشتهٔ انسانی(سؤال+درسنامه)
دین و زندگی جامع‌رشتهٔ انسانی-(پاسخ)
عربی جامع رشتهٔ انسانی
فلسفه‌و منطق جامع
علوم و فنون ادبی جامع
تاریخ جامع
جامعه شناسی جامع
جغرافیاجامع
شیمی جامع
اقتصادکنکور
روان‌شناسی کنکور

با کتاب‌های تست خیلی سبز کنکور چه آسونه!

کتاب‌های ماجراهای من ودرسام

ریاضی۳
فیزیک ۳(تجربی)
زیست شناسی ۳
شیمی۳
فیزیک ۳(ریاضی)
حسابان۲
هندسه۳
ریاضیات‌گسسته
انگلیسی۳
علوم و فنون ادبی۳
ریاضی و آمار ۳
تاریخ ۳
جامعه شناسی ۳
جغرافیا۳
فلسفه۲
فارسی ۳
عربی ۳ (انسانی)
دین و زندگی ۳ (انسانی)
عربی زبان قرآن ۳
دین و زندگی۳

با این کتاب‌ها چاره‌ای نداری جز اینکه ۲۰ بگیری!

درس خوندن یه ماجرای هیجان انگیزه!

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

خیلی سبز!

کتابای دوازدهمی ها

کتاب‌های فصل آزمون

زیست‌شناسی
شیمی
فیزیک تجربی
فیزیک ریاضی
ریاضی تجربی
حسابان و ریاضیات پایه
گسسته و آمار
هندسه۳
هندسه‌پایه

آزمون‌های فصلی و جامع به سبک کنکور

کتاب‌های نردبام

ریاضی تجربی جامع
ریاضی پایه و حسابان جامع
گسسته و آمار جامع
فیزیک ۳ ریاضی
فیزیک ۳ تجربی
هندسه ۳
عربی جامع
انگلیسی جامع
فارسی جامع
شیمی۳
زیست جامع
دین و زندگی جامع

برای درصدهای بالا و بالاتر

کتاب های آموزش شگفت‌انگیز

شیمی ۳
حسابان ۲
ریاضیات‌گسسته
هندسه ۳
فیزیک ۳ (ریاضی)
ریاضی ۳ (تجربی)
فیزیک۳ (تجربی)
عربی۳
فارسی ۳
انگلیسی ۳

آموزش عمومی به سبک خیلی سبز!

کتاب‌های جمع‌بندی

فیزیک رشته ریاضی
فیزیک رشته تجربی
ریاضی تجربی
شیمی
زیست‌شناسی
حسابان و ریاضی پایه
گسسته و آمار و احتمال
هندسه۱ و ۲
هندسه ۳
انگلیسی
عربی
دین و زندگی
فارسی

خاطر جمع، جمع‌بندی کنید!!

کتاب‌های شب‌امتحان

فیزیک ۳ (تجربی)
فیزیک ۳ (ریاضی)
شیمی ۳
ریاضی ۳ (تجربی)
زیست شناسی ۳
حسابان۲
ریاضیات‌گسسته
هندسه۳
انگلیسی ۳
فارسی ۳
دین و زندگی۳
عربی۳
هویت‌اجتماعی (علوم اجتماعی)
ریاضی و آمار ۳ (انسانی)
علوم و فنون ۳ ادبی
عربی ۳ (انسانی)
دین و زندگی ۳ (انسانی)
جغرافیا۳ (انسانی)
تاریخ ۳ (انسانی)
جامعه شناسی ۳
فلسفه۲
سلامت و بهداشت

شب امتحان ریلکس راحت بخوابید

کتاب‌های موضوعی

زیست‌گیاهی کنکور
زیست تصویری کنکور
مسائل شیمی کنکور
آیات و روایات کنکور
ترجمه و مفهوم عربی کنکور
هفت خان لغت، املا و تاریخ ادبیات
هفت خان قرابت معنایی
هفت خان دستور زبان فارسی
هفت خان آرایه های ادبی
درک مطلب عربی کنکور
پت و متن
عبارت های درست و نادرست در زیست‌شناسی

برای اینکه بدونین موضوع چیه!!!

چند کنکورها

جامع رشته تجربی (پک سؤال)
جامع رشته تجربی (جلد پاسخ)
جامع رشته ریاضی (پک سؤال)
جامع رشته ریاضی (جلد پاسخ)
جامع رشته انسانی (پک سؤال)
جامع رشته انسانی (جلد پاسخ)
درس‌های عمومی (جلد سؤال)
درس‌های عمومی (جلد پاسخ)

کنکور بدهید قبل از اینکه کنکور بدهید

مجموعه کتابای جی بی

Reading + Cloze test
چکیده‌انگلیسی
Grammar
واژگان انگلیسی
آیات و روایات
چکیده دین و زندگی
آیات و روایات انسانی
چکیده دین و زندگی انسانی
عربی۱
عربی۲
عربی۳
لغت‌نامه‌عربی
درک مطلب عربی
قواعد عربی
ترجمه و مفهوم عربی
چکیده‌عربی
لغت‌نامه‌عربی انسانی
فارسی۱
فارسی۲
فارسی۳
آرایه‌های ادبی
لغت، املا و تاریخ ادبیات
دستور زبان فارسی
قرابت‌معنایی
حفظیات شیمی
شیمی۱
شیمی۲
شیمی۳
شیمی آلی
مسائل‌شیمی
دین و زندگی ۱
دین و زندگی ۲
دین و زندگی ۳
ریاضی۱
ریاضی۲
ریاضی۳
زیست‌گیاهی
زیست‌شناسی۱
زیست‌شناسی۲
زیست‌شناسی۳
زمین‌شناسی
ژنتیک
دستگاه‌های بدن انسان
فرمول‌های فیزیک + تصاویر (تجربی)
فرمول‌های فیزیک + تصاویر (ریاضی)
فیزیک ۲ (تجربی-ریاضی)

درس‌هات رو بذار تو جیبت!!!

کتابای یازدهمی‌ها

خیلی سبز!

کتاب‌های آموزش شگفت‌انگیز

هندسه ۲
حسابان ۱
ریاضی ۲ (تجربی)
آمار و احتمال
فارسی ۲
فیزیک ۲ (تجربی)
فیزیک ۲ (ریاضی)

آموزش عمیق به سبک خیلی سبز!

کتاب‌های شب امتحان

فیزیک ۲ (ریاضی)
فیزیک ۲ (تجربی)
زیست‌شناسی ۲
ریاضی ۲ (تجربی)
حسابان ۱
هندسه ۲
آمار و احتمال
شیمی ۲
انسان و محیط زیست
زمین‌شناسی
عربی ۲
انگلیسی ۲
دین و زندگی ۲
فارسی ۲
تاریخ معاصر
علوم و فنون ادبی ۲
فلسفه ۱
جامعه‌شناسی ۲
جغرافیا ۲
روانشناسی
ریاضی و آمار ۲ (انسانی)
تاریخ ۲ (انسانی)
عربی ۲ (انسانی)
دین و زندگی ۲ (انسانی)

ریکد شب امتحان راحت بخوابید

کتاب‌های کار

فیزیک ۲ (ریاضی)
فیزیک ۲ (تجربی)
زیست‌شناسی ۲
ریاضی ۲
حسابان ۱
هندسه ۲
آمار و احتمال
شیمی ۲
زمین‌شناسی
فارسی ۲
عربی ۲
انگلیسی ۲
علوم و فنون ادبی ۲
ریاضی و آمار ۲
عربی ۲ (انسانی)

کتاب‌های کار برای کاردرست‌ها

کتاب‌های جی بی

واژگان انگلیسی
انگلیسی ۲
فارسی ۲
عربی ۲
آرایه های ادبی
شیمی ۲
ریاضی ۲
زیست شناسی ۲
فیزیک ۲ (تجربی-ریاضی)

درس هات رو بذار تو جیبت!!!

کتاب‌های تست

فیزیک ۲ (ریاضی)
فیزیک ۲ (تجربی)
زیست‌شناسی ۲
ریاضی ۲
حسابان ۱
هندسه ۲
آمار و احتمال
شیمی ۲
زمین‌شناسی
عربی زبان قرآن ۲
دین و زندگی ۲
انگلیسی ۲
فارسی ۲
جامعه‌شناسی ۲
جغرافیا ۲
علوم و فنون ادبی ۲
فلسفه ۱
روان‌شناسی
ریاضی و آمار ۲ (انسانی)
تاریخ ۲ (انسانی)
عربی ۲ (انسانی)
دین و زندگی ۲ (انسانی)

با کتاب‌های تست خیلی سبز، تکلو چه آسونه!

کتاب‌های ماجراهای من و درسام

فیزیک ۲ (ریاضی)
فیزیک ۲ (تجربی)
زیست‌شناسی ۲
ریاضی ۲ (تجربی)
حسابان ۱
هندسه ۲
آمار و احتمال
شیمی ۲
انسان و محیط زیست
زمین‌شناسی
عربی زبان قرآن ۲
دین و زندگی ۲
انگلیسی ۲
فارسی ۲
تاریخ معاصر
فلسفه ۱
جامعه‌شناسی ۲
جغرافیای ایران ۲
علوم و فنون ادبی ۲
روانشناسی
ریاضی و آمار ۲ (انسانی)
تاریخ ۲ (انسانی)
دین و زندگی ۲ (انسانی)
عربی ۲ (انسانی)

با این کتاب‌ها چاره‌ای نداری جز اینکه ۲۰ بگیری!

درس خوندن یه ماجرای هیجان انگیزه!

کتاب‌های نردبام

فیزیک ۲ (ریاضی)
فیزیک ۲ (تجربی)
هندسه ۲
حسابان ۱
ریاضی ۲
شیمی ۲

برای درصدهای بالا و بالاتر

@ketab_konkoria

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

کتابای دهمی‌ها

خیلی سبز!

کتاب‌های آموزش شگفت‌انگیز

هندسه۱
ریاضی۱
فارسی۱
فیزیک۱ (تجربی)
فیزیک۱ (ریاضی)

آموزش عمیق به سبک خیلی سبز!

کتاب‌های شب امتحان

فیزیک۱ (ریاضی)
فیزیک۱ (تجربی)
هندسه۱
ریاضی۱ (ریاضی و تجربی)
شیمی۱
زیست‌شناسی۱
عربی۱
دین و زندگی۱
انگلیسی۱
فارسی۱
جغرافیای ایران
عربی۱ (انسانی)
دین و زندگی۱ (انسانی)
اقتصاد
جامعه‌شناسی۱
منطق
علوم و فنون ادبی۱
ریاضی و آمار۱ (انسانی)
تاریخ۱

شب امتحان رید راحت بخوابید

کتاب‌های کـــار

فیزیک۱ (ریاضی)
فیزیک۱ (تجربی)
هندسه۱
ریاضی۱
شیمی۱
زیست‌شناسی۱
فارسی۱
عربی زبان قرآن۱
انگلیسی۱
منطق
علوم و فنون ادبی۱
ریاضی و آمار۱
عربی۱ (انسانی)

کتاب‌های کار برای کاردرست‌ها

کتاب‌های جی بی

واژگان انگلیسی
انگلیسی۱
فارسی۱
عربی۱
آرایه های ادبی
شیمی۱
ریاضی۱
زیست شناسی۱

درس‌هات رو بذار تو جیبت!!!

کتاب‌های تست

فیزیک۱ (ریاضی)
فیزیک۱ (تجربی)
هندسه۱
ریاضی۱
شیمی۱
زیست‌شناسی۱
عربی زبان قرآن۱
دین و زندگی۱
فارسی۱
انگلیسی۱
جغرافیای ایران
ریاضی و آمار۱ (انسانی)
عربی۱ (انسانی)
دین و زندگی۱ (انسانی)
اقتصاد
جامعه‌شناسی
منطق
علوم و فنون ادبی۱
تاریخ۱

با کتاب‌های تست خیلی سبز کنکور چه آسونه!

کتاب‌های ماجراهای من و درسام

فیزیک۱ (ریاضی)
فیزیک۱ (تجربی)
هندسه۱
ریاضی۱
شیمی۱
زیست‌شناسی۱
عربی زبان قرآن۱
دین و زندگی۱
انگلیسی۱+کتابچه رایگان واژگان و گرامر
فارسی۱
جغرافیای ایران
عربی۱ (انسانی)
دین و زندگی۱ (انسانی)
اقتصاد
جامعه‌شناسی۱
منطق
علوم و فنون ادبی۱
ریاضی و آمار۱ (انسانی)
تاریخ۱

درس خوندن به ماجرای هیجان انگیز! با این کتاب‌ها چاره‌ای نداری جز اینکه بخری!

کتاب‌های نردبام

فیزیک۱ (ریاضی)
فیزیک۱ (تجربی)
هندسه۱
ریاضی۱

برای درصدهای بالا و بالاتر

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

کتاب‌های جیبی

درس هات رو بذار تو جیبت!!!

خلاصهٔ جمع‌وجور چیزهای مهم کتاب‌های درسی فقط در یک کتاب کوچک که در جیب مبارک جا می‌شود.

ویژهٔ دوستان خلاصه‌خوان، مرورگرهای سریع، آدم های بی‌اعصاب که حوصلهٔ خوندن زیاد ندارن، آدم هایی که بعضی چیزها یادشون می‌ره، اونایی که توی اتوبوس و مهمونی و ... هم درس می‌خونن و همه اونایی که می‌خوان زود تند سریع درساشونو مرور کنن!

مجموعه کتاب‌های جمع‌بندی

خاطر جمع، جمع‌بندی کنید!!

درساتو نرسیدی تموم کنی؟ خوندی ولی بعضی چیزها یادت نمی‌آد؟ می‌خوای زودتر جمع‌وجور کنی کاراتو!

آخرای سال که می‌شه جای خالی یه کتاب کم حجم احساس می‌شه که فقط نکات اصلی درس‌ها رو داشته باشه و تعداد تست‌هاش کم ولی برای مرور کافی باشه. کتابی که به آدم قوت قلب بده و کل مطالب درس رو جمع‌وجور کنه.

کتابای جمع‌بندی این‌جور کتابایی هستن! خاطرت جمع!

کتاب‌های چند کنکور

کنکور بدهید قبل از آنکه کنکور بدهید

اگه می خواید قبل کنکور بفهمید که روز کنکور چه خبره کتاب های چند کنکور رو از دست ندید. کتاب های چند کنکور شامل کنکورهای سراسری داخل کشور و خارج از کشور هستش. تو این کتاب ها کل درس هایی رو که توو کنکور میاد، یه جا و توو آزمون های استاندارد می بینید.

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

توی دنیای مجازی بی ما رو بگیرین

توی وبسایت خیلی‌سبز هم می تونین خرید کنید هم سؤال بپرسین و هم جوابشو بگیرین و هم از اوضاع و احوال کتاب های جدید باخبر بشین.

www.Kheilisabz.com

کانال تلگرام خیلی‌سبز هم هست، توی این کانال ما با شما حرف می زنیم، از اتفاقات روزمره زندگی بگیر تا کتابای جدید و حتی انتخاب رشته کنکور!

telegram.me/kheilisabzpub

ما خیلی‌سبزیا کلاً تصویر دوست داریم، میدونین که! توی اینستاگرام خیلی‌سبز هم میتونیم با هم حرف بزنیم هم عکسامون رو نشون بدیم!

instagram.com/kheilisabz

راستی هنوز تلفنم داریم:

۰۲۱-۶۳۵۶۳

دانلود از:

www.Kheilisabz.com

اپلیکیشن خیلی بوکز

کتاب های دیجیتال خیلی سبز

- برای کاهش هزینه ها!
- برای جلوگیری از قطع درخت ها!
- برای دسترسی راحت تر!
- و برای کلی چیزهای خوب دیگه!

از همهٔ آدم‌های باحال، سرحال و **توانمند** درحوزهٔ بازاریابی و فروش، منابع انسانی، **سخت‌افزار و نرم‌افزار، مالی و اداری بازرگانی، تحلیل وتوسعهٔ کسب وکار، زنجیرهٔ تامین وتولید کتاب** دعوت می‌کند به صرف چای، شیرینی و همکاری:

HR@kheilisabz.com

همچنین از همهٔ **آدم‌های خلاقی که ایده‌ای برای تولید محتوای آموزشی دارند یا به همکاری در تألیف و ویراستاری کتاب های** کمک آموزشی دوره‌های ابتدایی، متوسطه اول، متوسطه دوم وکنکور **علاقه مندند**، دعوت می‌شود برای یک گپ دوستانه و تولید کتاب:

talent@kheilisabz.com

خیلی سبز!

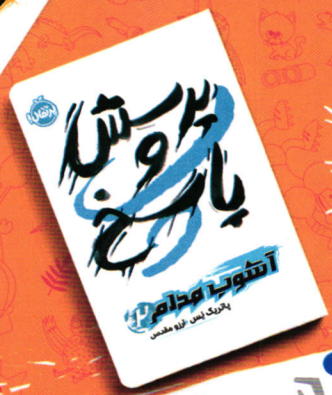
سلام بر یون!

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

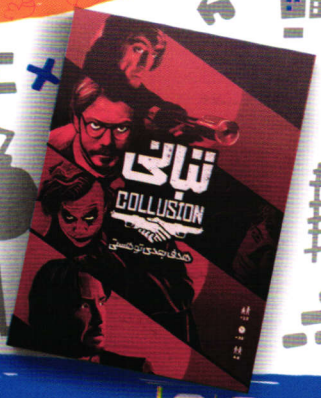
porteghalpub | www.porteghaal.com

پرتقال!

بهترین کتاب های جهان
برای بچه های ایران



GAME
زینگو
zingo



کارخونه‌ی بازی های باحال!

BINGO

zingobazi | www.zingobazi.com

Elipon®
DRAW YOUR DREAM
www.elipon.com
elipon.iran

بخاطر هزینه ها و زحمات تهیه فایل کتابها برای حمایت از ما و همچنین دسترسی به تمامی کتاب ها در کانال کتابیکو عضو شوید@kotob_konkoria

کتاب‌های ماجرای بیست نسل جدید کتاب‌های ماجراهای من و درسام

خیلی سبز!

کتاب‌های جی‌بی

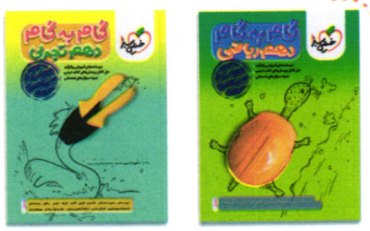
درس‌هات رو بذار تو جیبت!!!

- چکیده زیست‌شناسی دهم
- چکیده فیزیک تجربی دهم
- چکیده فیزیک ریاضی دهم
- چکیده هندسه دهم
- چکیده شیمی دهم
- چکیده ریاضی دهم

گام به گام

همراه همیشگی درسایت

درسنامه | حل پرسش‌های کتاب درسی | نمونه سؤال امتحانی



- یادگیری مطالب آموزشی، با درسنامه‌های کارآمد
- تسلط روی مفاهیم، با حل پرسش‌های کتاب درسی
- آمادگی برای امتحان‌ها، با نمونه سؤال‌های امتحانی

kheilisabz | @kheilisabzpub

9 786222 309572

@kotob_konkoria